NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

AUDIBERT

# Concours d'admission à l'École normale supérieure en 1893

*Nouvelles annales de mathématiques 3e série*, tome 12 (1893), p. 464-468

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1893_3_12__464_1>

## CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1895.

SOLUTION PAR M. AUDIBERT

---

Nous supposerons $a > b > c > 0$.

I. Soient $t_1$ le paramètre d'un second point de C, $x$, $y$, $z$ les coordonnées du milieu de la corde $(t, t_1)$; des égalités

$$x = \frac{1}{t-a} + \frac{1}{t_1-a},$$

$$y = \frac{1}{t-b} + \frac{1}{t_1-b},$$

$$z = \frac{1}{t-c} + \frac{1}{t_1-c},$$

on tire

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &x(tt_1) - (1+ax)(t+t_1) + a(2+ax) = 0, \\ &y(tt_1) - (1+by)(t+t_1) + b(2+by) = 0, \\ &z(tt_1) - (1+cz)(t+t_1) + c(2+cz) = 0. \end{aligned} \right.$$

L'élimination de $tt_1$ et de $t + t_1$ conduit à l'équation de la surface S sous les deux formes

$$
(S)\quad
\left\{
\begin{array}{ll}
(1) & \left\{
\begin{array}{l}
(a-b)(a-c)(b-c)xyz \\
\qquad\qquad -(a-b)(a+b-2c)xy \\
\qquad\qquad +(a-c)(a+c-2b)xz \\
\qquad\qquad -(b-c)(b+c-2a)yz \\
\qquad\qquad +2(b-c)x-2(a-c)y+2(a-b)z=0
\end{array}
\right. \\
\text{et} & \\
(2) & \left\{
\begin{array}{l}
[(a-b)x+2][(b-c)y+2][(a-c)z-2] \\
\quad +[(a-c)x+2][(a-b)y-2][(b-c)z-2]=0.
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
$$

II. La courbe C peut être considérée comme la limite d'un polygone inscrit de côtés infiniment petits, dont les milieux sont sur la surface S; elle est donc située sur cette surface dont l'équation est d'ailleurs vérifiée par les coordonnées du point $(t)$. En outre, l'équation (S) (2) prouve que les deux groupes de droites

$$
(2)\quad
\left\{
\begin{array}{ll}
(a-c)x+2=0, & (b-c)y+2=0, \\
(a-b)x+2=0, & (b-c)z-2=0, \\
(a-b)y-2=0, & (a-c)z-2=0,
\end{array}
\right.
$$

$$
(3)\quad
\left\{
\begin{array}{ll}
(a-b)x+2=0, & (a-b)y-2=0, \\
(a-c)x-2=0, & (a-c)z-2=0, \\
(b-c)y+2=0, & (b-c)z-2=0
\end{array}
\right.
$$

sont situés sur la surface S.

Le premier de ces groupes représente les trois asymptotes de C.

Le second représente les trois droites parallèles aux axes se projetant sur les centres des hyperboles équilatères projections de C sur les plans des coordonnées. On pouvait prévoir qu'elles seraient comprises sur la surface S, car elles sont les lieux des milieux des cordes de C qui se projettent suivant les diamètres de ces hyperboles.

Ce groupe représente aussi dans chaque plan les asymptotes des projections de C ou des hyperboles équilatères

$$(4)\quad \begin{cases} (a-b)xy + 2(y-x) = 0, \\ (a-c)xy + 2(z-x) = 0, \\ (b-c)yz + 2(z-y) = 0. \end{cases}$$

III. Si des deux premières équations (1) on tire les valeurs de $tt_1$ et de $t+t_1$, on trouve

$$t+t_1 = \frac{(a^2-b^2)xy + 2(ay-bx)}{(a-b)xy+y-x},$$

$$tt_1 = \frac{ab[(a-b)xy + 2(y-x)] + a^2x - b^2y + 2(a-b)}{(a-b)xy+y-x}.$$

Ces deux paramètres sont racines d'une équation du second degré dont les coefficients sont fonctions des coordonnées $x$ et $y$ d'un point déterminé M de S. A chacun de ces points correspondra donc une seule corde réelle ou imaginaire.

IV. La condition de réalité des racines déduite des relations qui précèdent s'exprime par la formule

$$(5)\quad \begin{cases} (a-b)[(a-b)x+2] \\ \quad\times[(a-b)y-2][(a-b)xy+2(y-x)] > 0. \end{cases}$$

On en conclut que les points de S qui sont milieux de cordes *imaginaires* de C se projettent sur chacun des plans coordonnés dans la région délimitée par l'une des hyperboles (4) et ses asymptotes.

V. Nous avons montré que les six droites des groupes (2) et (3) sont situées sur S. Il faut de plus examiner si des droites orientées d'une façon quelconque par rapport aux axes, telles que celles représentées par les équations

$$x = \alpha z + p,$$
$$y = \alpha' z + p',$$

peuvent aussi être appliquées sur cette surface.

Si nous introduisons ces expressions dans S (1), nous obtenons une équation du troisième degré en $z$ dans laquelle le coefficient de $z^3$ est

$$(a-b)(a-c)(b-c)\alpha\alpha'.$$

Ce coefficient ne pourra s'annuler qu'en faisant $\alpha = 0$, ou $\alpha' = 0$, ou simultanément $\alpha = 0$ et $\alpha' = 0$.

Dans le dernier cas, nous retrouverons les droites (2) et (3). La première hypothèse nous fait découvrir le groupe nouveau

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &(a-b)(a-c)x = b+c-2a,\\ &(a-c)^2 z + (a-b)^2 y + 2(b+c-2a) = 0.\\ &(a-b)(b-c)y = a+c-2b,\\ &(a-b)^2 x + (b-c)^2 z + 2(a+c-2b) = 0,\\ &(a-c)(b-c)z = a+b-2c,\\ &(b-c)^2 y + (a-c)^2 x + 2(a+b-2c) = 0. \end{aligned}\right.$$

VI. Les droites joignant les milieux d'une infinité de cordes de C ne peuvent être que celles situées sur la surface S.

Pour trouver les surfaces lieux des cordes qui rencontrent ces droites, il faut écrire que la corde $(t, t_1)$,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &tt_1(y-x)+(t+t_1)(ax-by) = a^2x-b^2y+2(a-b),\\ &tt_1(z-x)+(t+t_1)(ax-cz) = a^2x-c^2z+2(a-c), \end{aligned}\right.$$

rencontre une des droites des trois groupes (2), (3), et (6).

Les droites du groupe (2) ne fourniront pas de lieu.

Prenons, par exemple, la première d'entre elles,

$$(a-c)x+2=0, \qquad (b-c)y+2=0.$$

Ces valeurs de $x$ et de $y$ annulent le critère (5), et, par suite, $t = t_1 = c$ et $z = \infty$; la droite ne rencontre pas de corde réelle.

La première droite du groupe (3) joint les milieux des cordes réelles qui se projettent sur les diamètres de l'hyperbole $(a-b)xy + 2(y-x) = 0$.

Le lieu existe donc pour elle. Cependant le critère (5) est aussi annulé par $x = -\frac{2}{a-b}$ et $y = \frac{2}{a-b}$; mais on n'en peut conclure que $t = t_1$, car en même temps l'équation du deuxième degré, dont $t$ et $t_1$ sont racines, a tous ses coefficients nuls. Il y a simplement indétermination, ce qui doit être.

La condition de rencontre de la droite en question et de la corde (7) est

$$2tt_1 - (a+b)(t+t_1) + 2ab = 0.$$

A l'aide de (7), on éliminera les paramètres, d'où résultera l'équation du lieu

$$\begin{aligned}(a-b)^2xy - (a-c)^2xz - (b-c)^2yz \\ + 2(b-c)x + 2(a-c)y - 2(a+b-2c)z = 0.\end{aligned}$$

C'est un hyperboloïde à une nappe.

Les droites du groupe (6) fournissent chacune un lieu.

Nous ne donnerons ici que le résultat du calcul pour la première de ces droites :

$$\begin{aligned}(a-b)^2xy - (a-c)^2xz + 2(b-c)x \\ + 2(a-b)y - 2(a-c)z = 0.\end{aligned}$$

C'est un paraboloïde hyperbolique.

Il est facile de vérifier que cette surface renferme la courbe C et la première droite du groupe (6).