Nouvelles annales de mathématiques

H. Faure

Sur un théorème de Chasles

Nouvelles annales de mathématiques 3e série, tome 7 (1888), p. 31-37

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1888_3_7__31_1>

SUR UN THÉORÈME DE CHASLES;

PAR M. H. FAURE.

1. Théorème. — *Étant données trois coniques* A, A′, A″ *circonscrites à un quadrilatère et une conique* U, *si l'on décrit une conique* B *passant par les intersections de* U *et de* A, *les points d'intersection de* B *et* A′ *et ceux de* U *et* A″ *sont sur une même conique.*

Soit, en effet,

$$A = \lambda A' + \mu A''$$

l'équation de la conique A et

$$B = A - \nu U$$

celle de B. Il existe une conique passant par les intersections de B et A′ qui a pour équation

$$B - \lambda A' = 0,$$

c'est-à-dire

$$A + \nu U - \lambda A' = \lambda A' + \mu A'' + \nu U - \lambda A' = \mu A'' + \nu U = 0,$$

ce qui démontre le théorème. Remarquons, du reste, que notre énoncé rentre dans celui de Chasles (*Sections coniques*, p. 276, n° 404). Nous avons, en effet, ici quatre coniques A′, A″, B, U, telles que les points d'intersection de A′ et A″ et ceux de B et U sont sur A ; il en sera, par suite, de même des points d'intersection de ces coniques combinées deux à deux d'une autre manière, par exemple B et A′ et U et A″.

Ce simple changement dans l'énoncé de Chasles donne lieu, cependant, à un grand nombre de conséquences qui ne se trouvent pas dans le *Traité des sections coniques.*

2. *Cas particuliers.* — Prenant pour U une conique ayant un double contact avec A, on voit que :

Quand trois coniques A, A′, A″ *sont circonscrites à un quadrilatère, si une conique* U *tangente à* A *aux points* α, β *rencontre la seconde* A′ *aux points* a, b, c, d, *il existe une conique passant par ces quatre points et bitangente à la troisième* A″ *aux points où cette troisième conique est coupée par la droite* $\alpha\beta$.

Si l'on prend pour la conique U les deux tangentes à la conique A menées aux points α, β, on obtient un théorème donné par M. Weill (*Nouvelles Annales*, p. 20; janvier 1884), et dont ce géomètre déduit d'intéressantes applications.

On peut prendre pour A, A′, A″ des systèmes de droites ; donc :

Étant donnés un quadrilatère et une conique U, *si l'on décrit une conique* B *passant par les intersections de* U *avec deux côtés opposés du quadrilatère, les quatre points d'intersection de* B *avec les deux autres côtés opposés et les quatre points d'intersection de* U *avec les diagonales du quadrilatère sont huit points d'une même conique.*

Prenant pour A et A′ les côtés opposés d'un quadrilatère inscrit à A″, et pour U une droite double tangente à A″, on est conduit à cet énoncé :

Une conique A″ *étant circonscrite à un quadrilatère, si en un point a de cette conique on lui mène une tangente et que l'on trace une conique* B *touchant deux côtés opposés du quadrilatère aux points où ces côtés sont coupés par la tangente, cette conique rencontrera les deux autres côtés opposés du quadrilatère en quatre points qui, avec le point de contact a, seront sur une conique ayant avec* A″ *un contact du troisième ordre.*

Prenons pour A′ et A″ deux cercles concentriques, et pour A la droite de l'infini, il s'ensuit que :

Étant données une hyperbole et ses asymptotes, si l'on décrit un cercle rencontrant l'hyperbole aux points a, b, c, d, et un second cercle concentrique au premier rencontrant les asymptotes aux points a', b', c', d', ces huit points sont sur un conique.

3. On sait que le cercle orthoptique d'une conique (c'est-à-dire le cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits) passe par les points d'intersection de la conique avec ses directrices.

De là nous déduisons ces théorèmes :

Étant donnés une conique A *et un cercle* U, *si par les points d'intersection de ces deux courbes on trace une conique* B, *les points où cette conique* B *rencontre les directrices sont sur un cercle qui passe par les intersections du cercle* U *avec le cercle orthoptique de* A.

Si l'on mène à une conique une tangente en un de ses points m rencontrant les directrices aux points a et b, le cercle qui passe par ces points a et b et qui a *son centre sur la perpendiculaire menée aux directrices par le point m, rencontre le cercle orthoptique de la conique aux mêmes points que le cercle de courbure en m.*

Étant données deux coniques A *et* U, *si sur* U *on prend les quatre points a, b, c, d, d'où l'on voit* A *sous un angle droit :* 1° *les points d'intersection de* A *et* U, *et les points d'intersection des deux cordes ab, cd avec les directrices sont huit points d'une même conique;* 2° *les points d'intersection de ces mêmes cordes avec* A *et les points d'intersection de* U *avec les directrices sont huit points d'une même conique.*

Si d'un point m on mène à une conique A *deux tangentes rectangulaires, par les points d'intersection de ces tangentes avec les directrices de* A, *on peut mener une conique ayant un double contact avec le cercle orthoptique de* A; *la corde de contact est la polaire du point m par rapport à* A.

4. Théorème corrélatif. — *Étant données trois coniques* A, A′, A″ *inscrites à un quadrilatère et une conique* U, *si l'on décrit une conique* B *inscrite au quadrilatère circonscrit à* U *et* A, *les tangentes communes à* B *et* A′ *et celles communes à* U *et* A″ *touchent une même conique.*

Pour simplifier les énoncés des théorèmes que nous déduirons de celui-ci, nous dirons que les sommets du quadrilatère circonscrit à la conique A et à une conique *fixe* sont les foyers de la conique A. De même, toutes les coniques inscrites à un même quadrilatère circonscrit à la conique fixe seront dites *homofocales*.

En supposant que la conique fixe se réduise aux ombilics du plan, on revient aux définitions usuelles.

Supposons donc que, dans le théorème énoncé cidessus, nous considérions A'' comme la conique fixe, nous pourrons dire :

5. *Étant données deux coniques homofocales* A, A' *et une conique* U, *si l'on décrit une conique* B *inscrite au quadrilatère circonscrit à* U *et* A, *les tangentes communes à* B *et* A' *toucheront une conique homofocale à* U.

Ou bien :

Trois coniques A, B, U *étant inscrites à un quadrilatère* Q, *si l'on décrit une conique* A' *homofocale à* A, *on pourra, au quadrilatère* P *circonscrit à* B *et* A', *inscrire une conique homofocale à* U.

6. Puisque l'on peut inscrire à P une conique homofocale à U et que U est une conique quelconque inscrite au quadrilatère Q, on doit en conclure que le lieu des foyers des coniques inscrites à P est le même que le lieu des foyers des coniques inscrites à Q. D'autre part, la conique A' peut aussi être prise arbitrairement pourvu qu'elle reste homofocale à A. Il en résulte que : *le lieu des foyers des coniques inscrites dans le quadrilatère circonscrit à deux coniques* A *et* U *ne change pas si l'on remplace ces deux coniques par deux autres respectivement homofocales.*

On sait aussi que le lieu des foyers (dans le sens que nous leur donnons ici) des coniques inscrites à un quadrilatère est une cubique qui passe par les sommets du quadrilatère, et l'on peut ajouter par les six points de contact des coniques du système avec la conique fixe.

Par conséquent : *Si l'on considère deux systèmes de coniques respectivement homofocales, les points d'intersection des tangentes communes à une conique quel-*

conque du premier système et à une conique quelconque du second restent sur une cubique qui coïncide avec le lieu des foyers des coniques inscrites au quadrilatère déterminé par les quatre tangentes communes à deux quelconques des coniques.

On peut dire encore : *Si l'on considère deux systèmes de coniques respectivement homofocales, les points de contact des coniques du premier système avec celles du second sont sur la cubique précédente.*

Si, dans le théorème général (4), on prend pour U un point, on obtient les théorèmes VIII et IX donnés par M. Weill, dans l'article cité plus haut, et, par suite, les théorèmes X et XI.

Les applications de ce théorème sont fort nombreuses ; pour terminer nous en citerons encore quelques-unes.

7. *Deux coniques* A, A' *étant homofocales, si par un point m de* A *on mène deux tangentes à* A', *il existe une conique ayant pour foyer le point de contact, qui passe en m et qui, en ce point, a un contact du troisième ordre avec* A.

8. *Des coniques* U, U_1, U_2, ... *touchant aux points a et b les droites ma, mb, par le point m passent des coniques* A, A_1, A_2, ... *respectivement homofocales aux premières. Ces coniques forment deux séries. Celles d'une même série ont l'une avec l'autre un contact du troisième ordre.*

De là résulte que : *le lieu des foyers des coniques qui ont avec une conique donnée* A *un contact du troisième ordre en un point donné m de cette conique est le même que celui des points de contact des tangentes menées du point m à un système de coniques homofocales à la conique* A.

9. Étant donné un système A de coniques homofocales, on sait que le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point m à toutes les coniques du système est une cubique C; or, si l'on désigne par a et b les points de contact sur l'une des coniques et que l'on décrive toutes les coniques U qui ont pour foyers les deux points a et b, le lieu des points de contact des tangentes menées du point m aux coniques U sera la même cubique C. Il y a donc une infinité de manières de décrire cette cubique, à l'aide d'un même mode de génération.

Remarque. — La solution de la question 1567 résulte du n° 6 en donnant au mot *foyer* son sens ordinaire. La première Partie avait déjà été indiquée par Steiner sous une autre forme. En 1854, les *Nouvelles Annales* avaient proposé cette question (n° 272) : *Les foyers de trois coniques inscrites au même quadrilatère étant désignés par a, α; b, β; c, γ, on a la relation*

$$\frac{ac.\alpha c}{bc.\beta c}=\frac{a\gamma.\alpha\gamma}{b\gamma.\beta\gamma}.$$

Il suffisait de prouver que c et γ étaient les foyers d'une conique inscrite au quadrilatère $ab\alpha\beta$. J'ai donné en 1855 une solution analytique de cette question (p. 97). C'est en cherchant une solution géométrique du problème que j'étais arrivé depuis longtemps aux résultats (6). Le théorème du n° 7 figure dans notre recueil de théorèmes relatifs aux sections coniques, publié en 1867.