

H. LAURENT

Théorie élémentaire des fonctions elliptiques

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 16
(1877), p. 361-369

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__361_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. H. LAURENT.

[SUITE (*).]

THÉORÈMES DE CAUCHY ET DE LAURENT.

Nous terminerons ces considérations préliminaires en donnant, d'après Cauchy et le commandant Laurent, une nouvelle forme au théorème de Maclaurin.

Soit $f(x)$ une fonction finie continue monodrome et monogène à l'intérieur d'un cercle de rayon R décrit de l'origine comme centre. Elle sera développable par la formule de Maclaurin pour toute valeur de x comprise à l'intérieur du cercle en question.

En effet, si l'on décrit un cercle de rayon R' un peu plus petit que R de l'origine comme centre, on aura, en intégrant le long de ce cercle,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z)}{z-x} dz,$$

pourvu que le point x soit situé dans son intérieur; alors le module de z sera plus grand que celui de x et, $\frac{1}{z-x}$ étant développé suivant les puissances de x , on aura

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int f(z) dz \left(\frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left[\int \frac{f(z)}{z} dz + x \int \frac{f(z)}{z^2} dz + x^2 \int \frac{f(z)}{z^3} dz + \dots \right. \\ &\quad \left. + x^n \int \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz + \dots \right]. \end{aligned}$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2^e série, t. XVI, p. 78, 211.

Or on sait que

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{f^n(0)}{1.2.3\dots n};$$

on aura donc

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \dots + \frac{x^n}{1.2\dots n} f^n(0) + \dots;$$

ce qu'il fallait prouver.

Si la fonction $f(x)$ est finie, continue, monodrome et homogène à l'intérieur d'une couronne circulaire de rayons R et R' , ayant son centre à l'origine, elle sera développable pour toutes les valeurs de x comprises dans cette couronne en une double série procédant suivant les puissances entières ascendantes et descendantes de x .

En effet, soit \int_A un signe d'intégration indiquant que la variable reste sur un cercle de rayon A décrit de l'origine comme centre, soit r un peu plus petit que R , et r' un peu plus grand que R' , la somme

$$\int_r \frac{f(z)}{z-x} dz - \int_{r'} \frac{f(z')}{z'-x} dz'$$

sera égale à l'intégrale $\int \frac{f(z)}{z-x} dz$ prise le long d'un cercle de rayon très-petit décrit autour du point x intérieur à la couronne; en sorte que, si l'on observe que celle-ci est égale à $2\pi\sqrt{-1}f(x)$, on aura

$$\int_r \frac{f(z)}{z-x} dz - \int_{r'} \frac{f(z')}{z'-x} dz' = 2\pi\sqrt{-1}f(x),$$

ou bien, en observant que $\text{mod. } z > \text{mod. } x$ et que

mod. $z' < \text{mod. } x$,

$$\int_r f(z) dz \left(\frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} + \dots \right) \\ + \int_{r'} f(z') dz' \left(\frac{1}{x} + \frac{z'}{x^2} + \frac{z'^2}{x^3} + \dots \right) = 2\pi\sqrt{-1} f(z);$$

ce qui démontre le théorème.

Exemples. — $\log(1+x)$ est développable à l'intérieur d'un cercle de rayon 1 décrit de l'origine comme centre, mais il cesse d'être développable au delà comme l'on sait, et, en effet, pour $x = -1$, le logarithme de $1+x$ est infini.

Le point critique de $(1-x)^m$ est $x = 1$, c'est ce qui explique pourquoi la formule du binôme cesse d'avoir lieu quand le module de x est supérieur à l'unité, etc.

REMARQUE CONCERNANT LES FONCTIONS PÉRIODIQUES.

Une fonction $f(x)$ possède la période ω quand on a

$$f(x + \omega) = f(x)$$

et, par suite, n étant entier,

$$f(x + n\omega) = f(x).$$

$e^{\frac{2\pi}{\omega}x\sqrt{-1}}$ possède évidemment la période ω ; quand on donne une valeur particulière à $e^{\frac{2\pi x\sqrt{-1}}{\omega}}$, il en résulte pour x une série de valeurs de la forme $x_0 + n\omega$, n désignant un entier et x_0 un nombre bien déterminé. Si donc on considère une fonction $f(x)$ monodrome quelconque possédant la période ω , elle pourra être considérée comme fonction de $y = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}x}{\omega}}$ et, si l'on se donne y , x ayant les va-

leurs $x_0 + n\omega$, $f(x)$ prendra les valeurs

$$f(x_0 + n\omega) = f(x_0).$$

Ainsi, γ étant donné, $f(x)$ aura une valeur unique et bien déterminée; il en résulte que $f(x)$ est fonction monodrome de γ .

Il résulte de là que toute fonction périodique monodrome possédant la période ω pourra se développer suivant les puissances ascendantes et descendantes de $e^{\frac{2\pi}{\omega}x\sqrt{-1}}$ à l'intérieur de certaines couronnes circulaires.

Mais quand $e^{\frac{2\pi}{\omega}x\sqrt{-1}}$ décrit un cercle, son module reste constant; or, si l'on pose

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad \omega = g + h\sqrt{-1},$$

il se réduit à

$$e^{\frac{2\pi\mu}{g^2+h^2}},$$

μ désignant une fonction linéaire de α et β , et pour que cette expression reste constante, μ doit rester constant; x décrit donc une droite, de direction fixe d'ail-

leurs, quand on fait varier le module de $e^{\frac{2\pi}{\omega}x\sqrt{-1}}$. Ainsi c'est entre deux droites parallèles que le développement de $f(x)$ sera possible, l'une de ces droites ou même toutes les deux pouvant s'éloigner à l'infini.

Ce théorème nous servira à jeter les fondements de la théorie des fonctions elliptiques.

NOTIONS SUR LES FONCTIONS ALGÈBRIQUES.

Une fonction γ , définie par une équation de la forme

$$f(\gamma, x) = 0,$$

où $f(x, y)$ désigne un polynôme entier en x et y , qui n'admet pas de diviseur entier, est ce que l'on appelle une *fonction algébrique*. L'équation qui la définit est dite *irréductible*.

Une fonction ainsi définie est susceptible d'autant de valeurs pour une même valeur de x qu'il y a d'unités dans le degré de f pris relativement à y ; mais ces valeurs ne peuvent pas être séparées les unes des autres et ne constituent qu'une seule et même fonction, ainsi que l'a démontré M. Puiseux.

1° Une fonction algébrique ne peut s'annuler que si le dernier terme de l'équation qui la définit s'annule, et, par suite, elle n'a qu'un nombre limité de zéros. — $\frac{1}{y}$ est défini par une équation algébrique que l'on sait former et n'admet, par suite, qu'un nombre limité de zéros; donc y n'admet qu'un nombre limité d'infinis qui sont les racines de l'équation obtenue en égalant à zéro le coefficient de la plus haute puissance de y dans l'équation qui sert à le définir.

2° Nous admettrons que y soit une fonction continue de x , excepté pour les points où y devient infini ou acquiert des valeurs telles que l'on ait à la fois

$$f(x, y) = 0, \quad \frac{df}{dy} = 0;$$

encore en ces points n'y a-t-il pas, à proprement parler, discontinuité, mais simplement indétermination d'une certaine espèce dont nous parlerons plus loin; nous donnerons à ces points le nom de *points critiques*.

Nous supposons ce théorème connu du lecteur, et, en réalité, il est supposé connu de toutes les personnes qui s'occupent de Calcul différentiel; il est impossible de prendre la dérivée d'une fonction implicite sans l'admettre.

3° La fonction algébrique y admet une dérivée bien déterminée en tout point qui n'est pas critique : cela résulte de la règle de la différentiation des fonctions implicites, et l'on a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{df}{dx} : \frac{df}{dy},$$

expression finie et déterminée si $\frac{df}{dy}$ n'est pas nul.

4° La fonction algébrique y est monodrome à l'intérieur de tout contour ne contenant pas de point critique. Considérons, en effet, un contour fermé C ne contenant aucun point critique ; supposons que la variable x décrive un certain chemin continu à l'intérieur de C , en partant du point x_0 pour y revenir. Soient S ce chemin, y_0 la valeur de y en x_0 au départ, et y_1 la valeur que prend y quand x revient en x_0 . Si l'on n'a pas $y_1 = y_0$, y_1 ne pourra être qu'une des valeurs de y . Cela posé, déformons le chemin S en le réduisant à des dimensions de plus en plus petites. Quand ce chemin se sera, dans toutes ses parties, suffisamment rapproché de x_0 , les valeurs de y le long du contour S seront, en vertu de la continuité de y , aussi peu différentes que l'on voudra de y_0 , et, par suite, différeront de y_1 d'une quantité finie, puisque, à l'intérieur du contour C dans lequel nous cheminons, les valeurs de y sont nettement distinctes ; donc, quand le contour S sera devenu suffisamment petit, y reviendra en x_0 avec sa valeur initiale y_0 . Mais, s'il n'en est pas toujours ainsi, il est clair que, pendant que le contour S se déforme, il arrive un moment où y revient encore en x_0 avec la valeur y_1 différente de y_0 , tandis qu'un moment après il reviendra avec la valeur primitive y_0 . Soient donc deux contours S_0 et S_1 , infiniment voisins, ramenant y l'un avec la valeur y_0 , l'autre avec la valeur y_1 ; considérons deux mobiles parcourant

ces contours en restant toujours infiniment voisins l'un de l'autre : en deux points infiniment voisins, y ne pourra avoir que des valeurs infiniment peu différentes. En effet, si l'on considère, à chaque instant, la différence des valeurs de y en deux points correspondants, cette différence, d'abord infiniment petite, restera telle, car elle varie d'une manière continue comme y , et elle ne saurait devenir finie que si l'on considère deux racines distinctes de l'équation $f(x, y) = 0$; mais, pour passer d'une valeur à une autre, y serait obligé de rompre la continuité, à moins que l'on ne soit précisément dans le voisinage d'un point critique où deux valeurs distinctes de y sont susceptibles de différer infiniment peu l'une de l'autre pour une même valeur de x . Ainsi donc, y revient toujours en x_0 , avec la même valeur y_0 , si l'on ne sort pas du contour C. C. Q. F. D.

DISCUSSION DE LA FONCTION $\sqrt{x-a}$.

Il est intéressant d'étudier la manière dont les fonctions algébriques permutent leurs valeurs les unes dans les autres autour des points critiques; nous renverrons, pour cet objet, le lecteur à un Mémoire de M. Puiseux, inséré au t. XV du *Journal de M. Liouville*. Il suffira, en effet, pour le but que nous avons en vue, de discuter les fonctions de la forme \sqrt{X} , où X représente un polynôme entier en x .

Commençons par la fonction $y = \sqrt{x-a}$, dans laquelle a est une constante. Cette fonction a deux valeurs

$$+\sqrt{x-a} \quad \text{et} \quad -\sqrt{x-a},$$

en chaque point égales et de signes contraires. Nous n'avons à considérer qu'un seul point critique, le point a

pour lequel les deux valeurs de γ deviennent égales à zéro. La fonction γ ne cesse donc d'être monodrome qu'à l'intérieur d'un contour contenant le point a .

Posons

$$x = a + re^{\theta\sqrt{-1}},$$

$re^{\theta\sqrt{-1}}$ sera représenté par la droite qui va du point a au point x (la résultante de deux droites représentant, il ne faut pas l'oublier, la somme des imaginaires représentées par ces droites); on aura

$$\sqrt{x-a} = r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\theta}{2}\sqrt{-1}}.$$

Si le point x décrit un contour fermé contenant le point a , la droite $re^{\theta\sqrt{-1}}$ joignant le point a au point x tournera en décrivant un angle total égal à 2π ; la fonction

$$\sqrt{x-a} = r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\theta}{2}\sqrt{-1}}$$

reviendra alors, quand x reviendra au point de départ correspondant à $\theta = \theta_0$, avec la valeur

$$-\sqrt{x-a} = r^{\frac{1}{2}} e^{\left(\frac{\theta_0}{2} + \pi\right)\sqrt{-1}}.$$

Ainsi l'effet d'une rotation autour du point a est de changer le signe de la fonction γ .

DISCUSSION DE LA FONCTION

$$\sqrt{A(x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-l)}.$$

Quand le point x tournera autour du point a , $\sqrt{x-a}$ changera de signe; ainsi :

Quand la variable décrira un contour fermé contenant une des quantités a, b, \dots, l , la fonction reviendra au point de départ avec un changement de signe.

Quand la variable décrira un contour fermé contenant un nombre pair de points critiques, un nombre pair de facteurs $\sqrt{x-a}$, $\sqrt{x-b}$, ... changeront de signes, et la fonction reviendra au point de départ avec sa valeur initiale; ce sera l'inverse quand le contour contiendra un nombre impair de points critiques.

Au lieu de décrire un contour formé d'un contour simple, la variable peut tourner plusieurs fois autour d'un ou de plusieurs points critiques; mais ce cas complexe ne présentera aucune difficulté et se ramènera aux précédents.

Je suppose, par exemple, un contour ayant son origine en o et présentant la forme ci-dessous : quand la

Fig. 6.



variable a suivi le chemin opt s, la fonction arrive en s avec une valeur que j'appellerai γ_s , et quand x parcourt le chemin sqr s, γ revient en s avec la valeur $-\gamma_s$, en sorte que l'on pourrait supprimer la boucle sqr s et partir de o avec la valeur $-\gamma_0$; on pourrait de même supprimer la boucle $uptu$ en partant avec la valeur initiale $+\gamma_0$; il reste alors le chemin $optsqruo$ qui contient le point a et l'on revient en o avec la valeur $-\gamma_0$.

(A suivre.)