

A. MUFFAT

Question proposée par M. Bourguet

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 16 (1877), p. 318-319

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__318_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTION PROPOSÉE PAR M. BOURGUET

(voir 2^e série, t. XVI, p. 185);

SOLUTION DE M. A. MUFFAT,

Elève en Mathématiques spéciales au lycée de Lyon.

Trouver les racines de l'équation

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{x}{x+1} + \frac{x(x-1)}{(x+1)(x+2)} \\ - \frac{x(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \dots$$

Réduisons ensemble les deux premiers termes, il vient

$$0 = -\frac{x-1}{2(x+1)} + \frac{x(x-1)}{(x+1)(x+2)} + \dots$$

L'équation admet donc évidemment la racine 1. Si nous divisons par $x-1$ pour supprimer cette racine, et si nous multiplions par $x+1$, ce qui n'introduit aucune racine étrangère à l'équation, nous avons, en changeant les signes,

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{x}{x+2} + \frac{x(x-2)}{(x+2)(x+3)} \\ - \frac{x(x-2)(x-3)}{(x+2)(x+3)(x+4)} + \dots$$

Réduisons encore ensemble les deux premiers termes, ou a

$$0 = -\frac{x-2}{2(x+2)} + \frac{x(x-2)}{(x+2)(x+3)} - \dots$$

L'équation admet, par suite, la racine 2. Il est facile de démontrer que cette équation admet tous les nombres entiers pour racines : supposons que les $n - 1$ premiers nombres aient été trouvés pour racines en simplifiant chaque fois l'équation, on arrivera à

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{x}{x+n} + \frac{x(x-n)}{(x+n)(x+n+1)} - \frac{x(x-n)[x-(n-1)]}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)} + \dots,$$

et, en opérant comme plus haut,

$$0 = -\frac{x-n}{2(x+n)} + \frac{x(x-n)}{(x+n)(x+n+1)} - \dots$$

Ainsi $x = n$ est encore racine. Nous avons vu que 1 et 2 étaient racines, donc 3, 4, . . . sont aussi racines, et, par suite, l'équation proposée admet pour racines tous les nombres entiers positifs.