

H. LAURENT

**Note sur un théorème fondamental dans
la théorie des courbes**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 16
(1877), p. 26-28

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__26_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**NOTE SUR UN THÉORÈME FONDAMENTAL DANS LA THÉORIE
DES COURBES ;**

PAR M. H. LAURENT.

On sait que, lorsque deux courbes variables de forme et de position ont ensemble $n + 1$ points communs et que ces points, dans une position particulière de la figure, viennent à se confondre, elles ont un contact d'une nature particulière, et que l'on appelle *contact d'ordre n* ; au point de contact les ordonnées des deux courbes sont égales, ainsi que leurs n premières dérivées. Cette proposition n'est pas démontrée d'habitude avec toute la rigueur désirable. Je me propose d'en donner ici une démonstration que je crois irréprochable.

Soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ les ordonnées des deux courbes correspondant à l'abscisse x ; si les courbes ont $n + 1$ points communs, on pourra représenter leurs abscisses par

$$x_1, x_2, \dots, x_{n+1},$$

et leurs ordonnées par

$$f(x_1) = \varphi(x_1), \dots, f(x_{n+1}) = \varphi(x_{n+1}).$$

Si l'on considère alors la fonction $f(x) - \varphi(x)$, elle s'annulera pour les valeurs supposées croissantes :

$$x = x_1, \quad x = x_2, \quad \dots, \quad x = x_{n+1};$$

donc, en vertu du théorème de Rolle, sa dérivée sera nulle pour n valeurs de x , à savoir x'_1 compris entre x_1 et x_2 , x'_2 compris entre x_2 et x_3 , \dots , x'_n compris entre x_n et x_{n+1} . Toujours en vertu du théorème de Rolle, sa dérivée seconde s'annulera pour $n - 1$ valeurs de x comprises : la première, entre x'_1 et x'_2 , \dots , et, par suite, comprises toutes entre x'_1 et x'_n , c'est-à-dire entre x_1 et x_{n+1} . En continuant ainsi, on voit que $f^n(x) - \varphi^n(x)$ s'annulera pour une valeur de x comprise entre la plus grande et la plus petite des quantités x_1, x_2, \dots, x_n . Soit ξ cette valeur; on aura

$$f^n(\xi) - \varphi^n(\xi) = 0$$

ou

$$f^n(\xi) = \varphi^n(\xi).$$

Si l'on suppose maintenant que x_1, x_2, \dots, x_{n+1} tendent simultanément vers la valeur x , on aura

$$f^n(x) = \varphi^n(x),$$

et la démonstration faite pour les $n^{\text{ièmes}}$ dérivées s'applique, bien entendu, aux dérivées d'ordre moins élevé.

La démonstration précédente fait bien ressortir les cas où le théorème énoncé tomberait en défaut, et, comme on a appliqué le théorème de Rolle, on a été obligé de supposer $f(x)$ et $\varphi(x)$ continus, ainsi que leurs $n - 1$ premières dérivées; quant à la $n^{\text{ième}}$, on l'a simplement supposée *bien déterminée* et finie. Mais le théorème s'applique encore au cas où quelques dérivées seraient infinies si, par une transformation de coordonnées, on peut éviter qu'il en soit ainsi.

(28)

On peut donner relativement aux courbes dans l'espace une démonstration tout à fait analogue à celle-ci. Nous croyons pouvoir nous dispenser de la reproduire ici.