

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 16
(1877), p. 188-191

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__188_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

**SOLUTIONS DE QUESTIONS
PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.**

Question 21

(voir 1^{re} série, t. I, p. 166);

PAR M. H. BROCARD.

Démontrer que la circonférence qui passe par les milieux des côtés d'un triangle a les propriétés suivantes :

1^o *Elle passe par les pieds des trois hauteurs du triangle, et par les milieux des droites qui joignent le point de rencontre des trois hauteurs aux sommets du triangle.*

2^o *Elle est tangente aux quatre cercles, tangents aux trois côtés du triangle.*

Soient A, B, C les sommets du triangle ; a, b, c les milieux des côtés ; H le point de rencontre des hauteurs ; a', b', c' les milieux des segments HA, HB, HC ; a'', b'', c'' les pieds des hauteurs.

Les neuf points $a, b, c ; a', b', c' ; a'', b'', c''$ sont situés sur une même circonférence, qui, pour cette raison, a reçu la dénomination de *cercle des neuf points*.

Les intéressantes et nombreuses propriétés de ce cercle sont enseignées ou, au moins, énoncées dans tous les cours, et aujourd'hui elles sont bien connues des élèves de nos classes de Mathématiques. Il en a été question dans presque tous les volumes des *Nouvelles Annales*, et depuis la fondation de ce recueil, époque à laquelle cet énoncé a été proposé, les propriétés du cercle des neuf points ont fait l'objet de diverses recherches, dont nous devons nous borner à donner le résumé ou l'indication.

Cet énoncé peut, dans tous les cas, se traduire sous la forme suivante, plus abrégée et non moins précise :

Le cercle des neuf points, défini dans tout triangle, est tangent au cercle inscrit et aux cercles exinscrits.

Ces préliminaires établis, revenons aux deux propositions renfermées dans l'énoncé de la question 21.

Considérons le trapèze $abca''$. Soit i le point où cb , parallèle à $Ba''a$, remonte AHa'' (*). Le point i est le milieu de Aa'' , et $Ba'' = 2ci$; donc la droite Aa'' est parallèle à la bissectrice de l'angle des directions ba , ou cB , et ca'' . Ainsi le trapèze $abca''$ est isocèle, et la circonférence, passant par les points a, b, c , milieux des côtés du triangle, passe aussi par les points a'', b'', c'' , pieds des trois hauteurs.

On peut établir, aussi aisément, que cette même circonférence passe par les points a', b', c' . En effet, décrivons la circonférence circonscrite au triangle ABC , et considérons les rayons vecteurs Ha'', Hb'', Hc'' prolongés jusqu'à leurs rencontres avec la courbe, aux points α, β, γ . Les angles $HBa'', \alpha AC$ sont égaux, comme ayant leurs côtés perpendiculaires; mais les angles inscrits $\alpha BC, \alpha AC$ sont égaux: donc $\alpha BC = HBa''$; ainsi le point a'' est le milieu de $H\alpha$.

La circonférence abc peut donc être définie: la figure semblable au cercle circonscrit, le centre de similitude étant le point de rencontre des hauteurs, et le rapport de similitude $\frac{1}{2}$. Elle passe donc par les points a', b', c' , milieux des rayons vecteurs HA, HB, HC .

La seconde proposition de l'énoncé se démontrerait aussi d'une manière très-simple; mais, pour ne pas reproduire presque textuellement des articles déjà publiés

(*) Le lecteur est prie de faire la figure.

dans ce journal, nous renverrons les lecteurs à ces démonstrations. Nous signalerons, néanmoins, à leur attention, celle que M. Gerono a exposée dans le t. IV (2^e série, p. 220) des *Nouvelles Annales*. En suivant les indications de M. Hamilton, M. Gerono a fait connaître la détermination graphique des points de contact du cercle inscrit et de chacun des cercles exinscrits avec le cercle des neuf points.

Voici quelques remarques très-simples qu'il nous paraît utile de faire connaître :

Les droites ab , $a'b'$ sont parallèles à AB et égales à la moitié de AB. De même, les droites ab' , ba' sont parallèles à CH et égales à la moitié de CH; mais CH est la hauteur correspondant au côté AB, ainsi le quadrilatère $aba'b'$ est un rectangle, et la circonférence circonscrite a son centre au point de rencontre O' des diagonales aa' , bb' . De même, les angles $bc'b'$, $bc'b'$ sont droits et s'appuient sur les extrémités b , b' de la diagonale bb' , diamètre de la circonférence. Celle-ci passe donc aux points c , c' .

Par les raisons données plus haut, cette circonférence doit passer par les points a'' , b'' , c'' .

Si l'on désigne par O le centre du cercle circonscrit, on voit immédiatement que $Oa = Ha' = \frac{HA}{2}$ (théorème de CARNOT).

Question 291

(voir 1^{re} série, t. XIII, p. 192);

PAR M. H. BROCARD.

m et *r* étant des nombres entiers positifs, si l'un des nombres $3^m + 1$, $3^{m+r} + 1$ est divisible par 10, l'autre est aussi divisible par 10.

Il conviendrait de présenter la question sous une forme plus indéterminée, et de l'énoncer de la manière suivante :

m et r étant des nombres entiers, sous quelle condition $3^{m+r} + 1$ est-il divisible par 10, lorsque $3^m + 1$ est divisible par 10 ?

Il serait facile de voir, en effet, que la proposition donnée serait en défaut pour $r = 1$, par exemple.

Dans la nouvelle hypothèse, 3^{m+1} étant divisible par 10, 3^m est terminé par le chiffre 9. Il faut donc que 3^{m+r} soit aussi terminé par le chiffre 9, ou que 3^r soit terminé par le chiffre 1. Or les puissances de 3 sont terminées par 1, 3, 7, 9, dans l'ordre périodique 1, 3, 9, 7 ; 1, 3, 9, 7 ; 1, . . . ; il s'ensuit que les valeurs de r qui correspondent au chiffre 1 sont 0, 4, 8, 12, . . . , $4n$.

Ainsi l'énoncé primitif n'est pas d'une généralité absolue, et doit être rectifié comme il suit :

Si le nombre $3^m + 1$ est divisible par 10, $3^{m \pm 4n} + 1$ sera également divisible par 10.

(*Voir à ce sujet les questions du Concours général de 1874, Nouvelles Annales, 2^e série, t. XIV, p. 507.*)