L. LALANNE

Philosophie des mathématiques. Sur un nouvel exemple de la réduction des démonstrations à leur forme la plus simple et la plus directe

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 16 (1877), p. 145-151

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__145_0>

PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES.

SUR
UN NOUVEL EXEMPLE DE LA RÉDUCTION DES DÉMONSTRATIONS
A LEUR FORME LA PLUS SIMPLE ET LA PLUS DIRECTE;

Par M. L. LALANNE,
Inspecteur général des Ponts et Chaussées.

Dans la séance de l'Académie des Sciences en date du 26 juin 1876, M. Yvon Villarceau, comparant la complication des procédés en usage pour effectuer les développements de $\cos mx$ et de $\sin mx$ avec la simplicité des lois de ces développements, en concluait que, « d'après une remarque de Lamé, il devait exister un mode d'opérer dont le degré de simplicité fût conforme à celui du résultat » (*Comptes rendus*, t. LXXXII, p. 1469); et il donnait, en effet, une méthode aussi simple que nouvelle pour obtenir les développements dont il s'agit.

M. de Saint-Venant, relevant cette remarque de son savant confrère, a rappelé qu'il avait, le 5 mai 1849, exprimé la même chose dans une Communication faite à la Société philomathique (*l'Institut*, n° 803). « Tout théorème, disait-il, est susceptible d'une infinité de démonstrations; mais il n'a qu'une *raison*, qu'un *pourquoi*, renfermé en germe dans les définitions et les principes de la Science. Cette raison logique étant une fois trouvée, son expression offrira, en général, la forme de démonstration la plus directe, la plus naturelle, la plus simple et la plus facile à comprendre et à retenir (*)... »

(*) Cette remarque a été faite par Lamé dans la première édition de

C'est ainsi que la vraie raison du rapport constant qui existe entre l'aire d'une figure tracée sur un plan et l'aire de sa projection sur un autre plan se manifeste dans sa division, non pas en triangles comme on fait quelquefois, mais en trapèzes dont les bases sont perpendiculaires à l'intersection des deux plans. C'est ainsi qu'une foule de théorèmes et de formules de Géométrie, de Trigonométrie, de Mécanique, démontrées naguère par des circuits de raisonnements et de calculs, sont reconnus aujourd'hui n'être que la conséquence immédiate de cette simple et évidente vérité, que *la projection sur une droite d'un côté d'un polygone fermé est égale à la somme algébrique des projections des autres côtés* et qu'il existe une relation analogue pour les projections de plusieurs aires sur un même plan » (*).

M. de Saint-Venant, dans la Communication qu'il a faite à l'Académie à ce sujet, donne des exemples à l'appui de cette thèse que *tout théorème simple est suscep-*

---

ses *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, publiée en 1852. A propos d'une marche longue et compliquée que Poisson avait suivie pour parvenir aux équations d'équilibre d'une membrane élastique, il dit : « ... Je ne vois là qu'un exemple de plus des longueurs qu'occasionne l'oubli du principe suivant : lorsqu'on parvient à un résultat simple par des calculs compliqués, il doit exister une manière beaucoup plus directe d'arriver au même résultat; toute simplification qui s'opère, tout facteur qui disparait dans le cours du calcul primitif est l'indice certain d'une méthode à chercher, où cette simplification serait toute faite, où ce facteur n'apparaîtrait pas. » *Voir* aussi la deuxième édition (Paris, Gauthier-Villars, 1866), p. 110 et 111, où ce passage est intégralement reproduit.

(*) Cette vérité peut s'énoncer encore en disant que la somme algébrique des projections, sur une droite, des côtés d'un polygone fermé est nulle; et la relation analogue qui existe dans l'espace et qu'indique M. de Saint-Venant consiste en ce que la somme algébrique des projections, sur un plan, des faces d'un polyèdre convexe est nulle pareillement.

tible d'être démontré simplement (*Comptes rendus*, t. LXXXIII, p. 102).

M. Chasles adopte au moins implicitement le même ordre d'idées lorsque, faisant ressortir la fécondité de certaines méthodes nouvelles, telles que le *Principe de correspondance*, il rappelle les prévisions qu'Archimède énonçait dans la préface du Traité des spirales, sur le caractère et l'avenir de la Géométrie : « Combien y a-t-il de théorèmes en Géométrie qui, paraissant d'abord inabordables, reçoivent plus tard leur démonstration? » [*Comptes rendus*, t. LXXXIII, p. 758, et *Revue de France*, 30 novembre, t. XX, p. 798; 1876 (*)].

De ce qui précède, on peut donc induire que la recherche de démonstrations simples, pour tous les résultats ou théorèmes simples eux-mêmes, méritera l'attention des géomètres, tant qu'il restera quelques progrès à faire dans cette voie.

Des études entreprises il y a quelques années sur les polyèdres mettent l'auteur de la présente Note à même de produire un exemple frappant en ce genre.

Il s'agit d'un théorème connu de Statique, intimement lié avec le principe de l'égalité de pression dans les fluides et qui consiste en ce qu'*un polyèdre quelconque est en équilibre lorsqu'il n'est soumis qu'à l'action de forces appliquées normalement aux faces, en leurs centres de gravité et respectivement proportionnelles aux superficies de ces faces.*

Le savant Gergonne a fait, de cette question, l'objet d'une étude approfondie dans le tome X des *Annales de Mathématiques pures et appliquées.* Il annonce d'abord que le théorème n'a encore été démontré nulle part, et

(*) Voici le texte grec : Ποῖα τῶν ἐν γεωμετρίᾳ θεωρημάτων οὐκ εὐμέθοδα ἐν ἀρχᾷ φανέντα, χρόνῳ τὴν ἐξεργασίαν λαμβάνοντι.

il cherche à suppléer à cette omission en prenant comme point de départ la proposition que, si à un point quelconque de l'intérieur d'un tétraèdre on applique quatre puissances respectivement perpendiculaires à ces faces et d'une intensité proportionnelle à leur étendue, ces puissances se feront équilibre.

Après une démonstration assez pénible de cette proposition incidente, on n'est guère plus avancé, même en sachant qu'on pourrait l'étendre à un polyèdre ; car la difficulté consiste en ce que, généralement, les perpendiculaires menées aux plans des faces d'un tétraèdre et à plus forte raison d'un polyèdre quelconque, par les centres de gravité des aires de ces faces, ne passent pas par un même point. Il faut donc prendre une autre voie pour parvenir au but.

Pour cela, l'auteur considère en premier lieu le cas d'un tétraèdre à base horizontale isoscèle, où l'arête aboutissant au sommet de la base est verticale. Dans ce solide, les droites menées perpendiculairement aux faces par leurs centres de gravité se coupent en un même point. On le démontre, et, en vertu de la proposition qui sert de point de départ, l'équilibre a lieu. L'auteur passe ensuite successivement au cas d'un tétraèdre dont les trois arêtes au-dessus du plan de la base sont égales, puis d'un tétraèdre quelconque, et enfin d'une pyramide quelconque. Chacun de ces cas se ramène au précédent, et la décomposition en pyramides permet naturellement d'étendre la proposition à un polyèdre quelconque.

Ce n'est donc qu'après une longue et pénible exhaustion, qui ne comporte pas moins de six étapes successives et qui occupe une dizaine de pages dans son recueil, que le savant rédacteur des *Annales* parvenait à démontrer le théorème dont il s'agit. Mais l'appareil et les circuits d'une pareille analyse sont-ils bien en rapport avec la simplicité de l'énoncé?

Dans son *Traité de Mécanique* (2e Partie; Paris, Hachette; 1873), M. Ed. Collignon, en donnant une démonstration directe de l'équilibre pour le cas d'un tétraèdre quelconque et en passant de ce cas à celui du polyèdre, a supprimé quatre des six étapes de M. Gergonne. Cependant l'équilibre des forces mises en jeu ne ressort de cette démonstration qu'en considérant séparément la résultante des forces et la somme de leurs moments par rapport à trois droites.

Mais on peut arriver au but d'une manière plus directe et beaucoup plus simple par une démonstration qui se rattache à l'emploi des projections et de leurs sommes algébriques particulièrement signalées par M. de Saint-Venant comme permettant de remplacer par des vérités d'ordre intuitif de longs circuits de raisonnements et de calculs. L'auteur espère qu'elle paraîtra ne pas démentir le principe appuyé de l'autorité imposante des géomètres précédemment cités.

Décomposons chacune des forces en trois autres, suivant des directions rectangulaires entre elles; et, pour fixer les idées, supposons que l'une de ces directions soit verticale, les deux autres étant horizontales. Il y aura trois faisceaux de forces, parallèles entre elles, dans chaque faisceau. Chacune des composantes verticales, étant égale au produit de la force normale par le cosinus de l'inclinaison à l'horizon de la face correspondante, est proportionnelle à la projection horizontale de cette face. Si donc on projette tout le système sur le plan horizontal, la somme des projections des faces du polyèdre situées au-dessus du *contour apparent* étant égale à la somme des projections des faces situées au-dessous, la somme des composantes verticales qui agissent de haut en bas sera aussi égale à la somme des composantes verticales qui agissent de bas en haut. Les points d'application de chacune de ces deux séries de composantes sont, comme on sait, les centres de gravité des projections des faces; les deux résultantes passeront donc par le même point, qui est le centre de gravité du polygone limité par le contour apparent; et comme elles sont égales et qu'elles agissent en sens contraires, elles se détruisent.

Le même raisonnement étant applicable aux deux autres faisceaux, il en résulte que la composition des forces parallèles, dans chacun des trois faisceaux, donne une résultante nulle. Le système est donc en équilibre.

Un polyèdre fermé quelconque pouvant être décomposé en polyèdres convexes, la proposition est générale.

Il est bien entendu que toutes les forces agissent normalement aux faces, soit du dehors en dedans, soit de l'intérieur à l'extérieur, sans quoi la proposition n'aurait pas lieu.

En résumé, la raison essentielle de la réalité de cette proposition est que *la somme des projections des faces d'un polyèdre sur un plan est nulle,* en considérant comme de signes contraires les projections des faces situées, les unes au-dessus, les autres au-dessous du contour apparent; vérité d'ordre purement intuitif. L'expression de cette *raison,* de ce *pourquoi,* comme M. de Saint-Venant l'a appelé, combinée avec le rapport qui lie entre elles une face et sa projection et avec la correspondance des centres de gravité de l'une et de l'autre, n'offre-t-elle pas « la démonstration la plus directe, la plus naturelle, la plus simple, ainsi que la plus facile à comprendre et à retenir, du théorème énoncé »?

On démontrerait de la même manière et plus facilement encore un théorème dû à M. Chasles (*) et qui consiste en ce que *les forces concourantes, normales aux faces d'un polyèdre fermé et proportionnelles aux superficies de ces faces, forment un système en équilibre.* Car les composantes de ces forces parallèlement à une direction quelconque que, pour abréger, nous supposons verticale, passent, sur le plan horizontal, par la projection du point de concours; et leur somme est nulle, puisqu'elles sont respectivement proportionnelles à des projections de faces dont la somme est nulle pareillement.

L'analogie du théorème de Gergonne avec celui de M. Chasles est manifeste. On fait usage de considérations fondées sur les mêmes principes dans le corps de doctrines qui, sous le nom de *Statique graphique,* a pris un développement considérable par les travaux de géomètres étrangers, parmi lesquels nous citerons MM. Culmann, en Suisse (*Die graphische Statik*, Zurich, 1866 et 1875), Cremona, en Italie (*Le figure reciproche nella Statica grafica,* Milan, 1872; *Elementi di calcolo grafico,* Turin, 1874), Rankine, en Angleterre (*Manuel of civil engineering*, Londres, 1865), etc. (**).

(*) *Correspondance mathématique et physique* publiée par M. Quételet. t. VI, p. 92; Bruxelles, 1830. La démonstration que nous en donnons, fondée sur la considération du *contour apparent,* dispense de tout calcul; elle est donc très-différente en la forme, quoique analogue, au fond, à celle de l'illustre géomètre. *Voir* aussi le *Bulletin des Sciences mathématiques* du baron de Férussac, t. XIII, p. 246; Paris, 1830.

(**) Sous cette dénomination de *Statique graphique,* on a compris des procédés entièrement inédits, des constructions déjà connues et des idées qui ont pris naissance en France. Les principaux promoteurs de la science nouvelle se sont plu à remonter aux origines et à rendre à notre pays la part qui lui appartient de très-ancienne date. Les noms de Viète, de Descartes, de Varignon, de Monge, de Poinsot, de Chasles, de