

EUGÈNE ROUCHÉ

Sur l'élimination

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 16
(1877), p. 105-113

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1877_2_16__105_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR L'ÉLIMINATION ;

PAR M. EUGÈNE ROUCHÉ.

DÉFINITIONS.

Soient les deux polynômes

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m,$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n,$$

 m étant supérieur ou égal à n .Désignons par c_{ik} le coefficient de $x^i y^k$ dans l'expression entière

$$(1) \quad f(x) \frac{g(y) - g(x)}{y - x} - g(x) \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

et par R le déterminant d'ordre m

$$\begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} & \dots & \dots & \dots & c_{0,m-1} \\ c_{10} & c_{11} & \dots & \dots & \dots & c_{1,m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,0} & c_{n-1,1} & \dots & \dots & \dots & c_{n-1,m-1} \\ b_0 & b_1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_0 & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

p étant un entier moindre que n , représentons par R_p le $p^{\text{ième}}$ mineur principal de R , c'est-à-dire le déterminant qui résulte de R par la suppression des p premières horizontales et des p premières verticales. Remplaçons

successivement dans ce mineur R_p la première verticale par chacune des trois suivantes :

$$\begin{array}{ccc|cc}
 c_{p0} + c_{p1}x & + \dots + c_{pp}x^p & | & g_p(x) & | & f_p(x) \\
 & \vdots & | & \vdots & | & \vdots \\
 c_{n-1,0} + c_{n-1,1}x + \dots + c_{n-1,p}x^p & & | & g_{n-1}(x) & | & f_{n-1}(x) \\
 b_0 + b_1x & + \dots + b_px^p & | & 0 & | & -x^0 \\
 & b_0x & + \dots + b_{p-1}x^p & | & 0 & | & -x^1 \\
 & \vdots & & | & \vdots & | & \vdots
 \end{array}$$

où $g_p(x)$ et $f_p(x)$ désignent les polynômes de degrés $n - p - 1$ et $m - p - 1$, qui sont les coefficients de x^p dans les expressions entières

$$\frac{g(y) - g(x)}{y - x}, \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x};$$

nous obtiendrons ainsi trois polynômes que nous représenterons respectivement par

$$V_p(x), \quad G_p(x), \quad F_p(x),$$

et dont les deux derniers ont pour degrés $n - p - 1$ et $m - p - 1$. Quant au premier $V_p(x)$, son terme plus élevé en x est R_px^p : $V_0(x)$ n'est autre que R .

LEMME.

On a identiquement

$$(2) \quad V_p(x) = f(x)G_p(x) - g(x)F_p(x).$$

En effet, on peut substituer à la première verticale de $V_p(x)$ celle qu'on obtient en lui ajoutant les verticales suivantes, respectivement multipliées par $x^{p+1}, x^{p+2}, \dots, x^{m-1}$.

La verticale ainsi modifiée devient

$$\begin{array}{c}
 c_{p0} + c_{p1}x + \dots + c_{p,m-1}x^{m-1} \\
 \vdots \\
 c_{n-1,0} + c_{n-1,1}x + \dots + c_{n-1,m-1}x^{m-1} \\
 g(x) \\
 xg(x) \\
 \vdots
 \end{array}$$

Cela posé, puisque les trois déterminants $V_p(x)$, $G_p(x)$, $F_p(x)$ sont du même ordre et ne diffèrent que par la première verticale, il suffit, pour l'exactitude de l'identité (2), que chaque élément de la première verticale de $V_p(x)$ soit égal à la somme des éléments correspondants des premières verticales de $G_p(x)$ et de $F_p(x)$, respectivement multipliés par $f(x)$ et par $-g(x)$. Or, cela est évident pour les $m - n$ derniers éléments; et, si l'on considère l'un quelconque des autres, la relation

$$c_{i0} + c_{i1}x + \dots + c_{i,m-1}x^{m-1} = f(x)g_i(x) - g(x)f_i(x),$$

qui reste à démontrer, résulte de ce que les deux membres représentent l'un et l'autre le coefficient de x^i dans le développement de l'expression (1).

De l'identité (2) qui, pour $p = 0$, se réduit à

$$(3) \quad R = f(x)G_0(x) - g(x)F_0(x),$$

on déduit immédiatement les théorèmes suivants :

THÉORÈME I.

Pour que les deux équations

$$f(x) = 0, \quad g(x) = 0,$$

aient au moins une racine commune, il faut et il suffit que le déterminant R soit nul.

La condition est nécessaire. En effet, R étant indépendant de x , sa valeur sera fournie par le second membre de l'identité (3), quelque valeur qu'on y mette pour x ; or si les équations proposées ont une racine commune, en adoptant cette racine pour la valeur attribuée à x , on voit que R est égal à zéro.

La condition est suffisante; car, si R est nul, le second membre de l'identité (3) devra être nul, pour toute valeur de x , et en particulier pour toutes les racines de l'équation $g(x) = 0$. Donc ces n racines doivent satisfaire à l'équation

$$f(x)G_0(x) = 0,$$

et comme le polynôme $G_0(x)$ n'est que du degré $n - 1$, il faut que l'une au moins des racines de $g(x) = 0$ appartienne à l'équation $f(x) = 0$.

THÉORÈME II.

Pour que les équations $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ aient un nombre de racines communes égal à p , il faut et il suffit que le déterminant R et que ses mineurs principaux R_1, R_2, \dots, R_{p-1} , jusqu'au $(p - 1)^{\text{ième}}$ inclusive-ment, soient nuls.

Les conditions sont nécessaires. En effet, l'identité (2) montre que $V_p(x)$ s'annule quand on y remplace x par une racine commune aux équations proposées. Si donc ces équations ont p racines communes, chacun des polynômes $V_0(x), V_1(x), \dots, V_{p-1}(x)$ sera identiquement nul, puisqu'il doit s'annuler pour p valeurs de x , et que son degré est inférieur à p ; donc, en particulier, les coefficients R, R_1, \dots, R_{p-1} de la plus haute puissance de x dans ces polynômes doivent être nuls.

Les conditions sont suffisantes. En effet, raisonnons

de proche en proche. Supposons d'abord $R = 0$, mais $R_1 \geq 0$; puisque R est nul, il y a au moins une racine commune en vertu du premier théorème, et il n'y en a qu'une, car, s'il y en avait deux, on aurait $R_1 = 0$ d'après l'alinéa précédent. Donc, pour que les équations $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$ aient *une* racine commune et une seule, il faut et il suffit que R soit nul, sans que R_1 le soit. — Supposons maintenant $R = 0$, $R_1 = 0$, mais $R_2 \geq 0$, il y a au moins une racine commune, puisque R est nul, il y en a même deux, sans quoi R_1 serait différent de zéro; enfin il ne saurait y en avoir trois, puisque alors, d'après l'alinéa précédent, R_2 serait nul. Donc, pour que les équations proposées aient *deux* racines communes, et seulement *deux*, il faut et il suffit que R et R_1 soient nuls, sans que R_2 le soit. — On continuerait de même.

THÉORÈME III.

En supposant les conditions du théorème II remplies, les p racines communes sont fournies par l'équation $V_p(x) = 0$; et les autres racines, qui sont au nombre de $m - p$ pour $f(x) = 0$ et au nombre de $n - p$ pour $g(x) = 0$, sont données respectivement par les équations $F_{p-1}(x) = 0$ et $G_{p-1}(x) = 0$.

En effet, chacune des p racines communes annule $V_p(x)$, en vertu de l'identité (2). D'ailleurs le polynôme $V_p(x)$ est du degré p , puisque le terme le plus élevé en x est $R_p x^p$ et que R_p n'est pas nul par hypothèse. Donc l'équation $V_p(x) = 0$, donne les p racines communes et pas d'autres.

D'autre part, $V_{p-1}(x)$ étant identiquement nul, on a pour toute valeur de x

$$f(x)G_{p-1}(x) - g(x)F_{p-1}(x) = 0,$$

et en particulier

$$f(x)G_{p-1}(x) = 0,$$

pour toute valeur de x satisfaisant à l'équation $g(x) = 0$; donc les $n - p$ valeurs de x qui annulent $g(x)$ sans annuler $f(x)$ doivent rendre nul le polynôme $G_{p-1}(x)$; mais ce polynôme est de degré $n - p$; donc l'équation $G_{p-1}(x) = 0$ a pour racines les $n - p$ racines de $g(x) = 0$ qui ne se trouvent pas dans $f(x) = 0$.

On verrait de même que les $m - p$ racines de $f(x) = 0$ qui n'appartiennent pas à $g(x)$ sont les racines de l'équation $F_{p-1}(x) = 0$, qui est de degré $m - p$.

CALCUL DES ÉLÉMENTS c_{ik} DU DÉTERMINANT R.

La symétrie de l'expression (1), par rapport à x et à y , prouve d'abord que

$$(4) \quad c_{ki} = c_{ik}.$$

D'autre part, le coefficient de y^k dans (1) est

$$f(x)g_k(x) - g(x)f_k(x),$$

et les polynômes $g_k(x)$, $f_k(x)$ ont évidemment pour expressions

$$\begin{aligned} g_k(x) &= b_{k+1} + b_{k+2}x + b_{k+3}x^2 + \dots, \\ f_k(x) &= a_{k+1} + a_{k+2}x + a_{k+3}x^2 + \dots \end{aligned}$$

Les seconds membres peuvent être prolongés indéfiniment, à condition de remplacer par zéro les quantités b dont l'indice surpasse n , et les quantités a dont l'indice surpasse m . On a donc

$$\begin{aligned} c_{ik} &= a_0 b_{k+i+1} + a_1 b_{k+i} + \dots + a_i b_{k+1} \\ &\quad - b_0 a_{k+i+1} - b_1 a_{k+i} - \dots - b_i a_{k+1}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

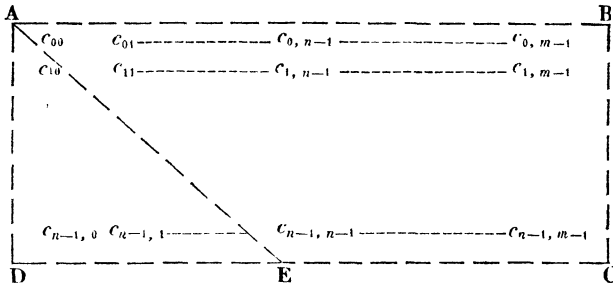
$$c_{ik} = \begin{vmatrix} a_0 & a_{k+i+1} \\ b_0 & b_{k+i+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_{k+i} \\ b_1 & b_{k+i} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_i & a_{k+1} \\ b_i & b_{k+1} \end{vmatrix}.$$

On déduit de là

$$(5) \quad c_{0k} = \begin{vmatrix} a_0 & a_{k+1} \\ b_0 & b_{k+1} \end{vmatrix},$$

$$(6) \quad c_{ik} = \begin{vmatrix} a_i & a_{k+1} \\ b_i & b_{k+1} \end{vmatrix} + c_{i-1, k+1}.$$

Les trois formules (4), (5) et (6) conduisent à une règle pratique simple pour calculer les éléments c_{ik} qui figurent dans le déterminant R, c'est-à-dire les éléments renfermés dans le tableau rectangulaire



D'abord la formule (4) montre qu'il suffit de calculer les éléments contenus dans le trapèze ABCE, vu que les éléments situés dans le triangle ADE sont égaux à leurs symétriques par rapport à la ligne droite AE.

Puis, la formule (5) prouve que, *pour avoir les éléments de la première horizontale du trapèze, il suffit d'écrire le système bilinéaire*

$$(7) \quad \begin{cases} a_0, a_1, a_2, \dots, \dots, \dots, a_m, \\ b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, 0, 0, \end{cases}$$

et de former les déterminants du second ordre qui ré-

sultent de la combinaison de la première verticale de ce système avec chacune des verticales suivantes.

Enfin, la formule (6) montre que l'on obtient les éléments de la $i^{\text{ème}}$ horizontale en combinant la $(i + 1)^{\text{ème}}$ verticale du système bilinéaire avec chacune des verticales suivantes, et ajoutant à chaque déterminant du second ordre ainsi obtenu l'élément qui, dans la partie déjà calculée du trapèze, est situé immédiatement à DROITE ET AU-DESSUS.

Exemple. — Soit proposé de calculer la résultante des équations

$$x^2 + p'x^2 + q'x + r' = 0, \quad x^2 + px + q = 0.$$

Du système bilinéaire

$$\begin{array}{cccc} r', & q', & p', & 1, \\ q, & p, & 1, & 0, \end{array}$$

on déduit le trapèze

$$\begin{array}{ccc} pr' - qq', & r' - qp', & -q, \\ & q' - pp' - q, & -p. \end{array}$$

La résultante, c'est-à-dire la condition pour que les équations aient une racine commune, est donc

$$R = \begin{vmatrix} pr' - qq' & r' - qp' & -q \\ r' - qp' & q' - q - pp' & -p \\ q & p & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour exprimer que les équations proposées ont deux racines communes, il faut joindre à cette condition la relation

$$R_1 = \begin{vmatrix} q' - q - pp' & -p \\ r' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$q' - q = p(p' - p),$$

en vertu de laquelle la première se réduit à

$$r' = q(p' - p).$$

On peut, en effet, vérifier, par un calcul direct, que ce sont là les conditions pour que le polynôme $x^3 + p'x^2 + q'x + r'$ soit divisible par le polynôme $x^2 + px + q$.