

L. PAINVIN

## Solution de la question 295

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 16 (1857), p. 85-94

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1857\\_1\\_16\\_\\_85\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__85_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

**SOLUTION DE LA QUESTION 295**

(voir t. XIII, p. 315),

**PAR M. L. PAINVIN,**

Docteur ès Sciences mathématiques

---

**Soit**

(1)  $F(x, y) = 0$

l'équation d'une courbe quelconque; par un point P

$(\alpha, \beta)$  pris dans son plan menons des normales qui la rencontreront, par exemple, en  $m$  points  $A_1, A_2, \dots, A_m$ (<sup>\*</sup>); si  $(x_i, y_i)$  sont les coordonnées d'un quelconque  $A_i$  de ces points, ces coordonnées seront données par les équations

$$(2) \quad \frac{dF}{dx_i}(\beta - y_i) = \frac{dF}{dy_i}(\alpha - x_i),$$

$$(3) \quad F(x_i, y_i) = 0.$$

Si nous désignons par  $n_i$  la distance du point P,  $(\alpha, \beta)$  au point  $A_i$ ,  $(x_i, y_i)$ , on aura

$$(4) \quad n_i^2 = (\alpha - x_i)^2 + (\beta - y_i)^2.$$

Supposons qu'on établisse entre les longueurs  $n_i$  de ces normales la relation

$$(5) \quad \varphi(n_1, n_2, n_3, \dots, n_m) = 0.$$

Si l'on substitue dans l'équation (5) les valeurs des  $x_i, y_i$ , déduites des équations (2) et (3) en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$ , on aura le lieu des points P pour lesquels cette relation est satisfaite.

Le coefficient angulaire de la tangente à la courbe P sera donné par l'équation

$$d\alpha \sum \frac{d\varphi}{dn_i} \frac{dn_i}{d\alpha} + d\beta \sum \frac{d\varphi}{dn_i} \frac{dn_i}{d\beta} = 0:$$

si l'on remarque que l'on a la relation

$$\frac{dF}{dx_i} \frac{dx_i}{d\alpha} + \frac{dF}{dy_i} \frac{dy_i}{d\alpha} = 0,$$

qui devient, en vertu de l'équation (2),

$$(\alpha - x_i) \frac{dx_i}{d\alpha} + (\beta - y_i) \frac{dy_i}{d\alpha} = 0,$$

(<sup>\*</sup>) Si  $p$  est le degré de la courbe, alors  $m = p^2$

on trouvera que

$$\frac{dn_i}{d\alpha} = \alpha \frac{x_i}{n_i},$$

et par un calcul semblable

$$\frac{dn_i}{d\beta} = \frac{\beta - y_i}{n_i},$$

$n_i$  ayant la valeur (4).

On aura donc pour le coefficient angulaire de la tangente à la courbe P au point  $(\alpha, \beta)$  la valeur suivante :

$$b \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\alpha \frac{\sum \frac{1}{n_i} \frac{d\varphi}{dn_i} x_i}{\sum \frac{1}{n_i} \frac{d\varphi}{dn_i}}}{\beta \frac{\sum \frac{1}{n_i} \frac{d\varphi}{dn_i} y_i}{\sum \frac{1}{n_i} \frac{d\varphi}{dn_i}}}.$$

Considérons maintenant un point Q ayant pour coordonnées  $(a, b)$  et désignons par  $l_i$  la distance de ce point au point  $A_i$ , de sorte qu'on aura

$$(7) \quad l_i^2 = (a - x_i)^2 + (b - y_i)^2.$$

Déterminons le lieu des points Q par la condition que la relation

$$(8) \quad \varphi(l_1, l_2, l_3, \dots, l_m) = 0$$

soit satisfaite,  $\varphi$  étant la même caractéristique que dans l'équation (5).

La courbe P sera donc déterminée par les équations (2), (3), (4) et (5) entre lesquelles on éliminera les  $x_i$  et  $y_i$ ; la courbe Q sera déterminée par les équations (2), (3), (7) et (8) entre lesquelles on éliminera les  $x_i$  et  $y_i$ .

A chaque point  $(\alpha, \beta)$  de la courbe P correspondra une courbe Q (\*).

Pour obtenir le coefficient angulaire de la tangente à la courbe Q en un point quelconque  $(a, b)$ , remarquons que les  $x_i$  et  $y_i$  ne sont fonctions ni de  $a$  ni de  $b$ ; on a donc immédiatement

$$\frac{dl_i}{da} = \frac{a - x_i}{l_i}, \quad \frac{dl_i}{db} = \frac{b - y_i}{l_i},$$

et, par conséquent,

$$(9) \quad \frac{db}{da} = - \frac{a - \frac{\sum \frac{1}{l_i} \frac{d\varphi}{dl_i} x_i}{\sum \frac{1}{l_i} \frac{d\varphi}{dl_i}}}{b - \frac{\sum \frac{1}{l_i} \frac{d\varphi}{dl_i} y_i}{\sum \frac{1}{l_i} \frac{d\varphi}{dl_i}}}.$$

Or si l'on fait

$$a = \alpha, \quad b = \beta,$$

il en résulte

$$l_i = n_i,$$

on arrive alors facilement aux conclusions suivantes :

1°. La courbe Q passe par le point  $(\alpha, \beta)$ , car pour  $a = \alpha$  et  $b = \beta$ , l'équation (8) se trouve satisfaite en vertu de l'équation (5); d'ailleurs ce résultat était évident à priori.

2°. La courbe Q touche la courbe P au point  $(\alpha, \beta)$ ; car si l'on fait

$$a = \alpha, \quad b = \beta,$$

---

(\*) Dans la courbe P, les points A varient; ils sont fixes dans la courbe Q

les équations (6) et (9) montrent que l'on a

$$\frac{db}{da} = \frac{d\beta}{d\alpha};$$

donc les deux courbes ont la même tangente au point  $(\alpha, \beta)$ .

3°. Si l'on suppose que les points  $A_i$  aient des masses respectivement égales  $\frac{1}{n_i} \frac{d\varphi}{dn_i}$ , qu'on compose ces masses comme des forces parallèles et qu'on désigne par G le point d'application de la résultante, je dis que la normale à la courbe P au point  $(\alpha, \beta)$  passera par le point G.

En effet, le point G a pour coordonnées

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{\sum \frac{1}{n_i} \frac{d\varphi}{dn_i} x_i}{\sum \frac{1}{n_i} \frac{d\varphi}{dn_i}}, \\ \eta = \frac{\sum \frac{1}{n_i} \frac{d\varphi}{dn_i} y_i}{\sum \frac{1}{n_i} \frac{d\varphi}{dn_i}}. \end{array} \right.$$

L'équation de la normale à la courbe P au point  $(\alpha, \beta)$  est

$$(11) \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = - \frac{X - \alpha}{Y - \beta},$$

$\frac{d\beta}{d\alpha}$  ayant la valeur (6), X et Y étant les coordonnées courantes. On voit immédiatement que l'équation (11) est vérifiée pour  $X = \xi$  et  $Y = \eta$ , ce qui démontre la proposition énoncée.

Lorsque

$$\varphi = \sum n_i^2 - k^2 = 0,$$

( 90 )

$k^2$  étant une constante, alors

$$\xi = \frac{\sum x_i}{m},$$

$$\eta = \frac{\sum y_i}{m},$$

le point G est le centre de gravité des points  $A_1, A_2, \dots, A_m$ .

Lorsque  $\varphi = \sum n_i - k^2 = 0$ ,

$$\xi = \frac{\sum \frac{x_i}{n_i}}{\sum \frac{1}{n_i}},$$

$$\eta = \frac{\sum \frac{y_i}{n_i}}{\sum \frac{1}{n_i}}.$$

Lorsque  $\varphi = n_1, n_2, \dots, n_m - k^2 = 0$ ,

$$\xi = \frac{\sum \frac{x_i}{n_i^2}}{\sum \frac{1}{n_i^2}},$$

$$\eta = \frac{\sum \frac{y_i}{n_i^2}}{\sum \frac{1}{n_i^2}};$$

ce qui fournit deux autres théorèmes analogues à celui qui est énoncé dans la question que je traite.

4°. Si l'on suppose que les points  $A_i$  aient des masses respectivement égales à  $\frac{1}{l_i} \frac{d\varphi}{dl_i}$ , qu'on compose ces masses comme des forces et qu'on désigne par  $G_1$  le point d'application de la résultante, la normale à la courbe Q,

( 91 )

au point quelconque  $(a, b)$  passera par le point  $G_1$ .

Pour les mêmes points  $A_1, A_2, \dots, A_m$  correspondants au point  $(\alpha, \beta)$  de la courbe P, le point  $G_1$  variera en même temps que le point  $(a, b)$  sur la courbe Q correspondante au même point  $(\alpha, \beta)$ .

Pour démontrer la proposition, remarquons que le point  $G_1$  a pour coordonnées

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = \frac{\sum \frac{1}{l_i} \frac{d\varphi}{dl_i} x_i}{\sum \frac{1}{l_i} \frac{d\varphi}{dl_i}}, \\ \eta_1 = \frac{\sum \frac{1}{l_i} \frac{d\varphi}{dl_i} y_i}{\sum \frac{1}{l_i} \frac{d\varphi}{dl_i}}. \end{array} \right.$$

L'équation de la normale au point quelconque  $(a, b)$  est

$$(13) \quad \frac{db}{da} = - \frac{X - a}{Y - b},$$

$\frac{db}{da}$  ayant la valeur (9), X et Y étant les coordonnées courantes. Il est évident que l'équation (13) est vérifiée pour

$$X = \xi_1 \quad \text{et} \quad Y = \eta_1.$$

Lorsque  $\varphi = \sum n_i^2 - k^2 = 0$ ,

$$\xi_1 = \frac{\sum x_i}{m},$$

$$\eta_1 = \frac{\sum y_i}{m},$$

alors le point  $G_1$  coïncide avec le point G ; donc toutes les normales à la courbe Q passent par le même point G ; donc, dans ce cas, la courbe Q est un cercle qui a son



centre en G, et qui a pour rayon la distance du point G au point  $(\alpha, \beta)$ .

Le calcul direct conduit au même résultat. En effet, l'équation de la courbe Q est, dans ce cas,

$$\sum [(a - x_i)^2 + (b - y_i)^2] = k^2.$$

Or cette équation, en ayant égard à l'équation

$$\sum [(\alpha - x_i)^2 + (\beta - y_i)^2] = k^2,$$

lieu des points P, peut se mettre sous la forme

$$(a - \xi)^2 + (b - \eta)^2 = (\alpha - \xi)^2 + (\beta - \eta)^2,$$

où

$$\xi = \frac{\sum x_i}{m}, \quad \eta = \frac{\sum y_i}{m},$$

ce qui vérifie parfaitement l'énoncé précédent.

5°. Le lieu du point G<sub>1</sub> s'obtiendra en éliminant  $a$  et  $b$  entre les équations (8) et (11).

Dans le cas de

$$\varphi = \sum n_i^2 - k^2 = 0,$$

ce lieu est le point G.

Le lieu des points G s'obtiendra en éliminant  $\alpha$  et  $\beta$  entre les équations (5) et (10).

6°. Il résulte de la proposition 2° que la courbe P est l'enveloppe des courbes Q (\*).

On peut d'ailleurs vérifier cette propriété par le calcul

#### *Application.*

Prenons pour la courbe (1)

$$y^2 = 2px,$$

(\* Car  $(\alpha, \beta)$  est un point quelconque de la courbe P.

et supposons

$$\varphi = \sum n_i - k^2 = 0.$$

Les  $(x_i, y_i)$  seront donnés par les équations

$$\begin{aligned} y^2 &= 2px, \\ (\alpha - x)y + p(\beta - y) &= 0, \end{aligned}$$

qui peuvent se mettre sous la forme

$$(14) \quad \begin{cases} y^3 - 2p(\alpha - p)y - 2p^2\beta = 0, \\ x = \frac{y^2}{2p}. \end{cases}$$

Soient  $y_1, y_2, y_3$  les trois racines de la première des équations (14) et  $x_1, x_2, x_3$  les valeurs correspondantes données par la seconde; on aura, sachant que

$$(15) \quad \begin{cases} n_i^2 = (\alpha - x_i)^2 + (\beta - y_i)^2, \\ 3(\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha(x_1 + x_2 + x_3) - 2\beta(y_1 + y_2 + y_3) \\ \quad + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = k^2. \end{cases}$$

En s'appuyant sur les formules qui donnent la somme des puissances semblables des racines en fonction des coefficients, on trouve

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &= 0, \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 &= -4p(p - \alpha), \\ y_1^4 + y_2^4 + y_3^4 &= 8p^2(p - \alpha)^2, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= \frac{1}{2p}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = -2(p - \alpha), \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 2(p - \alpha)^2. \end{aligned}$$

L'équation de la courbe P sera donc

$$(16) \quad \alpha^2 + 3\beta^2 + 4p\alpha = 2p^2 + k^2;$$

c'est une ellipse dont l'un des axes principaux est dirigé suivant l'axe des  $x$  (\*).

On trouvera facilement

$$(17) \quad \begin{cases} \xi = -\frac{2}{3}(\alpha + p), \\ \eta = 0. \end{cases}$$

La courbe Q est un cercle dont le centre sera donné par les valeurs (17) et son rayon est égal à la distance du point  $(\alpha, \beta)$  au point  $(\xi, \eta)$ . La courbe Q aura donc pour équation

$$(18) \quad \left[ a + \frac{2}{3}(\alpha + p) \right]^2 + b^2 = \frac{1}{9}(\alpha - 2p)^2 + \beta^2.$$

Les coordonnées du point  $G_1$  seront

$$(19) \quad \begin{cases} \xi_1 = -\frac{2}{3}(\alpha + p), \\ \eta_1 = 0. \end{cases}$$

Le lieu des points  $G_1$  s'obtiendra en éliminant  $a$  et  $b$  entre les équations (18) et (19), ce lieu est donc un point déterminé par les équations (19).

Le lieu des points G s'obtiendra en éliminant  $\alpha$  et  $\beta$  entre les équations (16) et (17); ce lieu est donc la droite  $\eta = 0$ , c'est-à-dire l'axe des  $x$ , ce qui constitue une propriété remarquable dont il est facile de donner l'énoncé.

Les propriétés générales que nous venons d'établir subsistent non-seulement pour des courbes algébriques, mais encore pour les courbes transcendentes telles, que les normales menés d'un point quelconque à la courbe sont en nombre fini (\*\*).

(\*) Lorsque la courbe donnée est une conique quelconque, la courbe P, dans le cas actuel, est aussi une conique. Tm.

(\*\*) Dans une courbe transcendente, les normales sont toujours en nombre infini, en comprenant les normales imaginaires et celles qui sont