

GERONO

**Formules d'interpolation de Lagrange et
de Newton (Fin d'un premier article)**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16
(1857), p. 358-366

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__358_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FORMULES D'INTERPOLATION DE LAGRANGE ET DE NEWTON

(Fin d'un premier article)

(voir page 317).

On peut de la formule d'interpolation de Lagrange déduire celle de Newton, en supposant que les nombres $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, x_m$ soient les termes de la progression arithmétique $x_0, x_0 + h, \dots, x_0 + (m-1)h, x_0 + mh$.

Reprenons la première de ces formules qui est

$$(3) \left\{ \begin{aligned} & \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{m-1})(x-x_m)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_{m-1})(x-x_m)} u_0 \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_{m-1})(x-x_m)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_{m-1})(x_1-x_m)} u_1 + \dots \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{p-1})(x-x_{p+1})\dots(x-x_{m-1})(x-x_m)}{(x_p-x_0)(x_p-x_1)\dots(x_p-x_{p-1})(x_p-x_{p+1})\dots(x_p-x_{m-1})(x_p-x_m)} u_p + \dots \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{m-2})(x-x_m)}{(x_{m-1}-x_0)(x_{m-1}-x_1)\dots(x_{m-1}-x_{m-2})(x_{m-1}-x_m)} u_{m-1} \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{m-2})(x-x_{m-1})}{(x_m-x_0)(x_m-x_1)\dots(x_m-x_{m-2})(x_m-x_{m-1})} u_m. \end{aligned} \right.$$

Si l'on remplace x_1, x_2, \dots, x_m par $x_0 + h, x_0 + 2h, \dots, x_0 + mh$, le dernier terme de cette formule devient

$$\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)\dots[x-x_0-(m-2)h][x-x_0-(m-1)h]}{mh.(m-1)h\dots 2h.h} u_m$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\dots\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-2)\right]\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-1)\right]}{m.(m-1)\dots 2.1} u_m.$$

L'avant-dernier terme prendra la forme

$$\frac{(x-x_0)(x-x_0-h) \dots [x-x_0-(m-2)h](x-x_0-mh)}{(m-1)h(m-2)h \dots h \times (-h)} u_{m-1},$$

et pourra s'écrire ainsi

$$\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right) \dots \left[\frac{x-x_0}{h}-(m-2)\right]\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{(m-1)(m-2) \dots 1 \cdot 1} u_{m-1},$$

et, afin que le dénominateur soit encore le produit $m(m-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$, on multipliera par m les deux termes de l'expression précédente, ce qui donnera

$$\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right) \dots \left[\frac{x-x_0}{h}-(m-2)\right]\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{m(m-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot m u_{m-1}.$$

On trouvera de même que les termes précédant l'avant-dernier de la formule (3) deviennent respectivement

$$+ \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right) \dots \left[\frac{x-x_0}{h}-(m-1)\right]\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{m(m-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\times \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} u_{m-2},$$

$$- \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right) \dots \left[\frac{x-x_0}{h}-(m-1)\right]\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{m(m-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\times \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} u_{m-3},$$

.....

Considérons généralement le terme

$$\frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{p-1})(x - x_{p+1})\dots(x - x_{m-1})(x - x_m)}{(x_p - x_0)(x_p - x_1)\dots(x_p - x_{p-1})(x_p - x_{p+1})\dots(x_p - x_{m-1})(x_p - x_m)} u_p,$$

dans lequel le nombre p est supposé moindre que m . En remplaçant dans ce terme $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{m-1}, x_m$ par $x_0 + h, x_0 + 2h, \dots, [x_0 + (p-1)h], (x_0 + ph), [x_0 + (p+1)h], \dots, [x_0 + (m-1)h], (x_0 + mh)$, on a d'abord

$$\frac{(x - x_0)(x - x_0 - h)\dots[x - x_0 - (p-1)h][x - x_0 - (p+1)h]\dots[x - x_0 - (m-1)h](x - x_0 - mh)}{p \cdot h \cdot (p-1)h \dots h \cdot (-h) \times \dots [(m-1) - p]h \times \dots (m-p)h} u_p.$$

Puis

$$\frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\dots\left[\frac{x-x_0}{h}-(p-1)\right]\left[\frac{x-x_0}{h}-(p+1)\right]\dots\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-1)\right]\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{p \cdot (p-1) \dots 1 \cdot (-1) \dots \times \dots [(m-1) - p] \times \dots (m-p)} u_p,$$

ou bien encore

$$\pm \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\dots\left[\frac{x-x_0}{h}-(p-1)\right]\left[\frac{x-x_0}{h}-(p+1)\right]\dots\left[\frac{x-x_0}{h}-(m-1)\right]\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{p(p-1)\dots 1 \times \dots [(m-1) - p](m-p)} u_p$$

et enfin

$$\pm \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\dots\left[\frac{x-x_0}{h}-(p-1)\right]\left[\frac{x-x_0}{h}-(p+1)\right]\dots\left(\frac{x-x_0}{h}-m\right)}{m(m-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$\times \frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p} u_p.$$

Il faut mettre le signe + ou le signe - suivant que $m-p$ est pair ou impair.

Ainsi, lorsque les valeurs substituées à la variable x sont $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots, x_0 + (m-1)h, x_0 + mh$, on peut donner à la formule d'interpolation de Lagrange

la forme suivante :

$$(4) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right) \dots \left[\frac{x-x_0}{h} - (m-1)\right]}{m(m-1) \dots 3.2.1} u_m \\ & - \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right) \dots \left[\frac{x-x_0}{h} - (m-2)\right] \left(\frac{x-x_0}{h} - m\right)}{m(m-1) \dots 3.2.1} m u_{m-1} + \dots \\ & \pm \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right) \dots \left[\frac{x-x_0}{h} - (p-1)\right] \left[\frac{x-x_0}{h} - (p+1)\right] \dots \left(\frac{x-x_0}{h} - m\right)}{m(m-1) \dots 3.2.1} \\ & \times \frac{m(m-1) \dots (m-p+1)}{1.2 \dots p} u_p + \dots \\ & \mp \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right) \left(\frac{x-x_0}{h} - 2\right) \dots \left(\frac{x-x_0}{h} - m\right)}{m(m-1) \dots 3.2.1} m u_1 \\ & \pm \frac{\left(\frac{x-x_0}{h} - 1\right) \dots \left(\frac{x-x_0}{h} - m\right)}{m(m-1) \dots 3.2.1} u_0. \end{aligned} \right.$$

Pour en déduire la formule d'interpolation de Newton, il faut remplacer $u_m, u_{m-1}, u_{m-2}, \dots, u_1$ par les développements

$$(5) \left\{ \begin{aligned} & u_0 + m \Delta u_0 + \frac{m(m-1)}{1.2} \Delta^2 u_0 + \dots + \Delta^m u_0, \\ & u_0 + (m-1) \Delta u_0 + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} \Delta^2 u_0 + \dots + \Delta^{m-1} u_0, \\ & u_0 + (m-2) \Delta u_0 + \frac{(m-2)(m-3)}{1.2} \Delta^2 u_0 + \dots + \Delta^{m-2} u_0, \\ & \dots \\ & u_0 + \Delta u_0. \end{aligned} \right.$$

Afin d'abrégier l'écriture, posons $z = \frac{x-x_0}{h} - m$. Il en

résultera

$$z + 1 = \frac{x - x_0}{h} - (m - 1),$$

$$z + 2 = \frac{x - x_0}{h} - (m - 2) \dots,$$

$$z + m = \frac{x - x_0}{h}.$$

Et en représentant par $f(z)$ le produit des $(m + 1)$ facteurs consécutifs $z, (z + 1), (z + 2), \dots, (z + m)$, la formule (4) se transformera en celle-ci

$$(6) \frac{1}{m(m-1)\dots 3.2.1} \left\{ \begin{aligned} & \frac{f(z)}{z} u_m - \frac{f(z)}{z+1} \cdot m u_{m-1} + \frac{f(z)}{z+2} \cdot \frac{m(m-1)}{1.2} u_{m-2} - \dots \\ & \pm \frac{f(z)}{z+m-p} \frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{1.2\dots p} u_p \mp \dots \\ & \mp \frac{f(z)}{z+m-1} \cdot m u_1 \pm \frac{f(z)}{z+m} u_0. \end{aligned} \right\}$$

Si l'on remplace dans la formule (6) $u_m, u_{m-1}, u_{m-2}, \dots, u_1$ par les développements (5), le résultat de la substitution sera évidemment une expression de la forme

$$a_0 u_0 + a_1 \Delta u_0 + a_2 \Delta^2 u_0 + \dots + a_p \Delta^p u_0 + \dots + a_m \Delta^m u_0,$$

et on aura d'abord

$$a_0 = \frac{1}{m(m-1)\dots 2.1} \left[\frac{f(z)}{z} - m \frac{f(z)}{z+1} + \frac{m(m-1)}{1.2} \frac{f(z)}{z+1} + \dots \right. \\ \left. \mp m \frac{f(z)}{z+m-1} \pm \frac{f(z)}{z+m} \right].$$

Mais on a vu (page 317) que

$$1.2.3 \dots m = \frac{f(z)}{z} - m \frac{f(z)}{z+1} + \frac{m(m-1)}{1.2} \frac{f(z)}{z+2} - \dots \\ \mp m \frac{f(z)}{z+m-1} \pm \frac{f(z)}{z+m};$$

donc

$$a_0 = 1.$$

Il viendra ensuite

$$a_1 = \frac{1}{m(m-1)\dots 2 \cdot 1}$$

$$\times \left[m \frac{f(z)}{z} - m(m-1) \frac{f(z)}{z+1} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} \frac{f(z)}{z+2} - \dots \right],$$

$$\quad \quad \quad \mp \frac{f(z)}{z+m-1}$$

d'où

$$a_1 = \frac{1}{(m-1)\dots 2 \cdot 3}$$

$$\times \left[\frac{f(z)}{z} - (m-1) \frac{f(z)}{z+1} + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} \frac{f(z)}{z+2} - \dots \right],$$

$$\quad \quad \quad \mp \frac{f(z)}{z+m-1}$$

ou bien, en représentant par $\varphi(z)$ le produit des m facteurs consécutifs $z, z+1, \dots, z+m-1$, et en ayant égard à ce que

$$f(z) = \varphi(z) \times (z+m),$$

on aura

$$a_1 = \frac{z+m}{(m-1)\dots 2 \cdot 1}$$

$$\times \left[\frac{\varphi(z)}{z} - (m-1) \frac{\varphi(z)}{z+1} + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} \frac{\varphi(z)}{z+2} - \dots \right].$$

$$\quad \quad \quad \mp \frac{\varphi(z)}{z+m-1}$$

Or (page 317)

$$1 \cdot 2 \dots (m-1) = \frac{\varphi(z)}{z} - (m-1) \frac{\varphi(z)}{z+1}$$

$$+ \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} \frac{\varphi(z)}{z+1} + \dots \mp \frac{\varphi(z)}{z+m-1},$$

donc

$$a_1 = z + m = \frac{x - x_0}{h}.$$

Le coefficient a_p du terme général $a_p \Delta^p u_0$ sera déterminé par l'égalité

$$a_p = \frac{1}{m(m-1)\dots 2.1} \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{1.2\dots p} \frac{f(z)}{z} \\ - m \cdot \frac{(m-1)(m-2)(m-3)\dots(m-p)}{1.2.3\dots p} \frac{f(z)}{z+1} \\ + \frac{m(m-1)}{1.2} \cdot \frac{(m-2)(m-3)\dots(m-p-1)}{1.2\dots p} \frac{f(z)}{z+2} - \dots \\ \pm \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-p+1)}{1.2.3\dots p} \frac{f(z)}{z+m-p} \end{array} \right\},$$

d'où, en réduisant,

$$a_p = \frac{1}{1.2.3\dots(m-p)} \times \left[\frac{\frac{f(z)}{z} - (m-p) \frac{f(z)}{z+1} + (m-p)(m-p-1) \frac{f(z)}{z+2} - \dots \pm \frac{f(z)}{z+m-p}}{1.2.3\dots(p-1)p} \right].$$

Cela posé, nommons $\varphi(z)$ le produit des $(m-p+1)$ facteurs consécutifs $z, z+1, z+2, \dots, (z+m-p)$, il en résultera

$$f(z) = \varphi(z) \times (z+m-p+1)(z+m-p+2)\dots(z+m),$$

et par suite

$$a_p = \frac{(z+m)\dots(z+m-p+1)}{1.2.3\dots(m-p)} \times \left[\frac{\frac{\varphi(z)}{z} - (m-p) \frac{\varphi(z)}{z+1} + \frac{(m-p)(m-p-1)}{1.2} \frac{\varphi(z)}{z+2} - \dots \pm \frac{\varphi(z)}{z+m-p}}{1.2.3\dots(p-1)p} \right].$$

Mais

$$1.2.3\dots(m-p) = \frac{\varphi(z)}{z} - (m-p) \frac{\varphi(z)}{z+1} \\ + \frac{(m-p)(m-p-1)}{1.2} - \dots + \frac{\varphi(z)}{z+m-p};$$

donc

$$a_p = \frac{(z+m)(z+m-1)\dots[(z+m-(p-1))]}{1.2\dots p},$$

et, parce que

$$z+m = \frac{x-x_0}{h},$$

on aura

$$a_p = \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right) \left(\frac{x-x_0}{h}-1\right) \dots \left[\frac{x-x_0}{h} - (p-1)\right]}{1.2\dots p}.$$

En remplaçant successivement p par les nombres 1, 2, 3, ..., m , cette dernière égalité donne

$$a_1 = \frac{x-x_0}{h},$$

$$a_2 = \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right) \left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)}{1.2},$$

$$a_3 = \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right) \left(\frac{x-x_0}{h}-1\right) \left(\frac{x-x_0}{h}-2\right)}{1.2.3}, \dots,$$

$$a_m = \frac{\left(\frac{x-x_0}{h}\right) \left(\frac{x-x_0}{h}-1\right) \dots \left[\frac{x-x_0}{h} - (m-1)\right]}{1.2.3\dots m}.$$

D'ailleurs

$$a_0 = 1,$$

par conséquent l'expression

$$a_0 u_0 + a_1 \Delta u_0 + a_2 \Delta^2 u_0 + \dots + a_m \Delta^m u_0$$

revient à

$$\begin{aligned}
 & u_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta u_0 + \left(\frac{x - x_0}{h} \right) \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) \frac{\Delta^2 u_0}{1 \cdot 2} + \dots \\
 & + \left(\frac{x - x_0}{h} \right) \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) \left(\frac{x - x_0}{h} - 2 \right) \dots \\
 & \times \left[\frac{x - x_0}{h} - (m - 1) \right] \frac{\Delta^m u_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}.
 \end{aligned}$$

Ce qui est la formule d'interpolation de Newton.

G.
