NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Note sur les formules d'interpolation de Lagrange et de Newton

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 317-319
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__317_0>

NOTE SUR LES FORMULES D'INTERPOLATION DE LAGRANGE ET DE NEWTON.

Si $F(x)$ représente une fonction algébrique entière dont le degré ne soit pas supérieur au nombre entier m, et qui prenne les $(m+1)$ valeurs u_0, u_1, u_2,..., u_{m-2}, u_{m-1}, u_m lorsqu'on y remplace la variable x par les $m+1$ valeurs différentes x_0, x_1, x_2,..., x_{m-2}, x_{m-1}, x_m, on sait que

$$\begin{aligned}
F(x) = {} & \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{m-1})(x-x_m)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_{m-1})(x_0-x_m)}\,u_0 \\
& + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_{m-1})(x_1-x_m)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_{m-1})(x_1-x_m)}\,u_1 + \ldots \\
& + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m-2})(x-x_m)}{(x_{m-1}-x_0)(x_{m-1}-x_1)\ldots(x_{m-1}-x_{m-2})(x_{m-1}-x_m)}\,u_{m-1} \\
& + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m-2})(x-x_{m-1})}{(x_m-x_0)(x_m-x_1)\ldots(x_m-x_{m-2})(x_m-x_{m-1})}\,u_m.
\end{aligned}$$

C'est la formule d'interpolation de Lagrange.

Nous allons établir, au moyen de cette formule, un principe qui nous sera utile; en voici l'énoncé :

Soit $f(x)$ le produit des $(m+1)$ facteurs consécutifs x, $(x+1)$, $(x+2)$,..., $(x+m-1)$, $(x+m)$; on aura, pour toute valeur de x,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
& 1.2.3\ldots(m-1)\,m = \frac{f(x)}{x} - m\cdot\frac{f(x)}{x+1} + \frac{m(m-1)}{1.2}\,\frac{f(x)}{x+2} \\
& - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\,\frac{f(x)}{x+3} + \ldots \\
& \pm \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}\,\frac{f(x)}{x+p} \mp \ldots \mp m\cdot\frac{f(x)}{x+m-1} \pm \frac{f(x)}{x+m}.
\end{aligned}\right.$$

Par exemple, on a, quelle que soit la valeur de x,

$$1.2.3 = (x+1)(x+2)(x+3) - 3x(x+2)(x+3) + 3x(x+1)(x+3) - x(x+1)(x+2),$$

comme on peut le reconnaître par un calcul très-simple.

Pour établir d'une manière générale l'égalité (1), proposons-nous de déterminer une fonction algébrique entière $\varphi(x)$ qui soit, au plus, du degré m et qui prenne les valeurs $u_0, u_1, u_2,\ldots, u_{m-1}, u_m$, lorsqu'on y remplacera la variable x par $0, -1, -2,\ldots, -(m-1), -m$. La formule d'interpolation de Lagrange donne immédiatement

$$(2)\left\{\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{(x+1)(x+2)\ldots(x+m-1)(x+m)}{1.2\ldots(m-1).m}u_0\\ &- \frac{x(x+2)\ldots(x+m-1)(x+m)}{1.1\ldots(m-2)(m-1)}u_1 + \ldots\\ &\pm \frac{x(x+1)\ldots(x+p-1)(x+p+1)\ldots(x+m-1)(x+m)}{p(p-1)\ldots1.1\ldots(m-p-1)(m-p)}u_p \mp \ldots\\ &\mp \frac{x(x+1)\ldots(x+m-2)(x+m)}{(m-1)(m-2)(m-3)\ldots1.1}u_{m-1}\\ &\pm \frac{x(x+1)\ldots(x+m-2)(x+m-1)}{m.(m-1)\ldots2.1}u_m.\end{aligned}\right.$$

Il est d'ailleurs évident que, quelles que soient les valeurs supposées à $u_0, u_1, u_2,\ldots, u_{m-1}, u_m$, la fonction précédente prend ces valeurs lorsque l'on remplace x par 0, $-1, -2,\ldots, (m-1), -m$. Or, si l'on suppose que chacun des nombres $u_0, u_1, u_2,\ldots, u_{m-1}, u_m$ est égal au produit $1.2.3\ldots(m-1)m$, l'égalité (2) deviendra

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{f(x)}{x} - m\cdot\frac{f(x)}{x+1} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{f(x)}{x+2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2\,3}\frac{f(x)}{x+3} - \ldots\\ &\pm \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}\frac{f(x)}{x+p} \mp \ldots \mp m\cdot\frac{f(x)}{x+m-1} \pm \frac{f(x)}{x+m};\end{aligned}$$

et il est facile de reconnaître que le premier membre $\varphi(x)$ est la quantité constante $1.2.3\ldots(m-1)m$. Car, s'il en était autrement, l'équation

$$\varphi(x) - 1.2.3.(m-1)m = 0,$$

qui ne peut être d'un degré supérieur à m, admettrait les $(m+1)$ racines $0, -1, -2, \ldots, (m-1), -m$, puisqu'en remplaçant x par chacune de ces dernières valeurs, $\varphi(x)$ devient égal au produit $1.2.3\ldots(m-1)m$. On voit donc que l'égalité (1) a lieu pour toute valeur de x : c'est ce qu'il fallait démontrer. G.

La fin au prochain numéro.