

P. DE LAFITTE

Neuf théorèmes de géométrie segmentaire

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16
(1857), p. 202-207

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__202_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NEUF THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE SEGMENTAIRE (*) ;
PAR M. P. DE LAFITTE.

I.

Dans deux figures homographiques , les trois points de

(*) A démontrer.

l'une (réels ou imaginaires) qui coïncident avec leurs homologues déterminent un cercle.

On joint les différents points de ce cercle considérés comme appartenant à la première figure avec leurs homologues dans la seconde; toutes les droites de jonction concourent en un même point S .

Ce point S est sur le cercle lui-même. Considéré comme appartenant à la seconde figure, il a son homologue S' dans la première, et considéré comme appartenant à la première figure, il a son homologue S'' dans la seconde: le cercle des trois points passe par le point S' et est tangent à la droite SS'' .

II.

Dans deux figures homographiques, les trois droites de l'une qui coïncident avec leurs homologues déterminent un cercle inscrit au triangle formé par ces droites.

Les tangentes à ce cercle, considérées comme appartenant à la première figure, coupent leurs homologues sur une droite fixe L .

La droite L est tangente au même cercle. Considérée comme appartenant à la seconde figure, elle a son homologue L' dans la première; considérée comme appartenant à la première, elle a son homologue L'' dans la seconde; le cercle est tangent à la droite L' et passe au point d'intersection des droites L et L'' .

(C'est le point de contact de L et du cercle.)

III.

Étant données deux figures homographiques sur un même plan, soient m, m', m'' les trois points qui coïncident avec leurs homologues.

1°. Si une conique est circonscrite au triangle m, m', m'' , il existe sur la courbe deux points, et deux seule-

ment, tels, que deux droites tournant autour de ces points et se coupant sur la conique sont toujours homologues dans les deux figures.

2°. Si une conique est inscrite au même triangle, il existe deux tangentes à la conique, et deux seulement, telles, qu'une droite roulant sur la conique les rencontre en deux points toujours homologues dans les deux figures.

3°. Les deux propositions précédentes s'appliquent sans modifications à des coniques d'ailleurs quelconques.

IV.

On donne dans un même plan deux figures homographiques.

1°. Par un point m de la première qui coïncide avec son homologue, on mène une droite fixe A . Sur cette droite A on prend un point a . Les différentes droites de la première figure qui se coupent au point a rencontrent leurs homologues respectives en des points situés sur une conique, et à chaque point a de A correspond une telle conique.

Toutes ces coniques se touchent en un même point. Ce point de contact est le point m .

2°. Sur une droite M de la première figure qui coïncide avec son homologue, on prend un point fixe a . Par ce point on mène une droite A . Les droites menées des différents points de A à leurs homologues respectifs enveloppent une conique, et à chaque droite menée par le point fixe correspond une telle conique.

Toutes ces coniques se touchent en un même point. La tangente commune est la droite M .

Réciproquement, si les coniques relatives à deux points a, b se touchent, les points a, b sont en ligne droite avec un point double réel et le contact a lieu en ce point.

Si les coniques relatives à deux droites A, B se touchent, les droites A, B se coupent sur une droite double réelle et le contact a lieu sur cette droite.

IV (*bis*).

Dans deux figures homographiques quelconques situées dans un même plan, il existe toujours deux systèmes de deux droites homologues divisées en parties égales par leurs points homologues, et il n'en existe que *deux*.

Les deux droites de chaque figure sont parallèles à la droite de cette figure qui a pour homologue dans l'autre l'infini, et si deux points décrivent les deux droites d'une des figures *dans le même sens*, leurs homologues décriront les droites homologues en sens contraire (*).

V.

On suppose un triangle tel, que chaque sommet soit le pôle de la droite qui joint les deux autres relativement à un cercle (réel ou imaginaire).

Soient r^2 le carré du rayon; a^2, a'^2, a''^2 les carrés des cordes d'intersection des côtés du triangle et du cercle; t^2, t'^2, t''^2 les carrés des tangentes issues des trois sommets: on a, quel que soit le triangle, les deux relations

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a'^2} + \frac{1}{a''^2} = \frac{1}{2r^2},$$

$$\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t'^2} + \frac{1}{t''^2} = -\frac{1}{r^2}.$$

(*) Ce second système peut être utilisé pour représenter analytiquement deux figures *homologiques*, lorsque le centre d'homologie est sur l'axe d'homologie, cas auquel l'équation du n° 320 de la *Géométrie supérieure* devient illusoire. On peut substituer à cette équation une quelconque de celles du § III, chapitre VIII, a et a' étant les points où un rayon tournant autour du centre d'homologie rencontre les deux droites du second système, les deux droites du premier étant coïncidentes suivant l'axe d'homologie.

VI.

Par deux points donnés A, B, on peut faire passer une infinité de cercles. Deux droites quelconques issues du point A ou du point B, ou bien l'une du point A l'autre du point B, sont divisées par ces cercles en parties proportionnelles (*).

VII.

Étant donné un quadrilatère ABCD inscrit au cercle, du milieu du côté AB on abaisse une perpendiculaire sur le côté opposé CD; on fait la même chose pour les trois autres côtés. Du milieu de la diagonale AC, on abaisse une perpendiculaire sur l'autre diagonale; on fait la même chose pour cette seconde diagonale. Du point de concours des côtés AB et CD, on abaisse une perpendiculaire sur la droite qui joint leurs milieux; on fait la même chose pour les deux autres côtés opposés et pour les deux diagonales. Les neuf droites ainsi construites concourent en un même point.

VIII.

Soit un triangle ABC. Par le sommet A on mène une droite parallèle à la droite menée du centre G du cercle inscrit au triangle au milieu M de BC; on prend sur cette parallèle

$$AI = 2GM,$$

les points I et G étant situés de part et d'autre de AM. La plus courte distance du point I au cercle circonscrit au triangle est double du rayon du cercle inscrit.

(*) Ce théorème donne le moyen de diviser deux droites en parties proportionnelles connaissant deux points conjugués ou homologues. Ce mode de division qui donne deux points conjugués *simultanément*, et non l'un au moyen de l'autre, donne une solution très-élémentaire, très-simple et très-générale du problème célèbre de la section de raison.

(207)

Les cercles exinscrits donnent des propositions analogues.
