

CH. MOREAU

Solution de la question 340 (voir page 29)

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16 (1857), p. 16-18

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__16_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 340

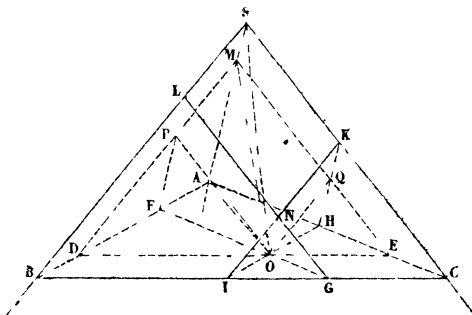
(voir page 29),

PAR M. CH. MOREAU,
 Elève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot)

Soient donnés un angle trièdre de sommet S et un point fixe O par lequel on mène un plan coupant les faces de l'angle suivant le triangle ABC ; trois parallèles aux côtés du triangle et passant par le point O partagent ce triangle en trois parallélogrammes et trois triangles; v_1, v_2, v_3 étant les valeurs de trois pyramides ayant pour bases ces parallélogrammes et S pour sommet commun, la somme

$$\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3}$$

est constante, de quelque manière qu'on mène le plan coupant par le point fixe O .



Je mène par le point O trois plans OM, OK, OL respectivement parallèles aux trois faces de l'angle trièdre,

le plan OM coupe SA en M, le plan OK coupe SC en K et le plan OL coupe SB en L: ces trois plans coupent le plan ABC suivant les trois droites DE, FG, IH menées parallèlement aux côtés du triangle ABC, savoir DE parallèle à BC, FG parallèle à AC, IH parallèle à AB, et, de plus, ils forment un parallépipède avec les trois faces de l'angle trièdre.

Considérons maintenant la pyramide ayant pour base le parallélogramme OFAH et pour sommet S; elle peut être regardée comme la somme de deux pyramides ayant pour bases le même triangle SAO et pour hauteurs les distances des points F et H à ce plan. On aura donc, en appelant f et h ces deux distances,

$$\text{SAFOH} = \frac{1}{3} \times \text{SAO} \times (h + f).$$

La pyramide SMPOQ aura de même pour mesure

$$\text{SMPOQ} = \frac{1}{3} \times \text{SOM} \times (p + q),$$

en appelant p et q les distances des points P et Q au plan SOM.

Or on a

$$f = p, \quad h = q,$$

car les lignes FP et HQ sont parallèles à SA, et, par suite, au plan SAO. On a donc

$$\frac{\text{SAFOH}}{\text{SMPOQ}} = \frac{\text{SAO}}{\text{SOM}} = \frac{\text{SA}}{\text{SM}};$$

on tire de là, en posant $\text{SAFOH} = v_1$,

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{\text{SMPOQ}} \times \frac{\text{SM}}{\text{SA}}.$$

(18)

On démontrera de même que l'on a

$$\frac{1}{\text{SBIOD}} = \frac{1}{v_2} = \frac{1}{\text{SLPON}} \times \frac{\text{SL}}{\text{SB}}$$

et

$$\frac{1}{v_3} = \frac{1}{\text{SKNOQ}} \times \frac{\text{SK}}{\text{SC}}.$$

Or

$$\text{SMPOQ} = \text{SLPON} = \text{SKNOQ},$$

car chacune de ces trois pyramides est le tiers du même parallépipède SLNKMPOQ ; on a donc, en appelant v le volume de l'une de ces pyramides,

$$\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} = \frac{1}{v} \left(\frac{\text{SM}}{\text{SA}} + \frac{\text{SL}}{\text{SB}} + \frac{\text{SK}}{\text{SC}} \right).$$

Or

$$\frac{\text{SL}}{\text{SB}} = \frac{\text{CG}}{\text{CB}}, \quad \frac{\text{SK}}{\text{SC}} = \frac{\text{BI}}{\text{BC}},$$

donc

$$\frac{\text{SL}}{\text{SB}} + \frac{\text{SK}}{\text{SC}} = \frac{\text{CG} + \text{BI}}{\text{BC}} = \frac{\text{BE}}{\text{BC}} = \frac{\text{AD}}{\text{AB}} = \frac{\text{AM}}{\text{AS}};$$

comme il faut encore y ajouter le rapport $\frac{\text{SM}}{\text{SA}}$, on a

$$\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} = \frac{1}{v} \left(\frac{\text{AM}}{\text{AS}} + \frac{\text{MS}}{\text{AS}} \right) = \frac{1}{v}.$$

Donc la somme des inverses de ces trois pyramides est constante et égale à l'inverse de l'une des pyramides SMPOQ ou à trois fois l'inverse du parallépipède OS .

Note. Prochainement une solution trigonométrique de M. Richard Oxamendy.