Nouvelles annales de mathématiques

Ch. Lombard

Note sur une formule relative aux volumes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 16 (1857), p. 131-135

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__131_1>

NOTE SUR UNE FORMULE RELATIVE AUX VOLUMES;

Par M. Ch. LOMBARD,
Ancien élève de l'École Polytechnique,
Licencié ès Sciences physiques et mathématiques.

Considérons un solide compris entre deux plans parallèles au plan des yz; appelons H la distance de ces deux plans; B, B' et b, respectivement, les surfaces des sections extrêmes et celle de la section parallèle et équidistante. Le volume de ce solide aura pour expression

$$V = \frac{H}{6}(B + B' + 4b),$$

pourvu que la surface S d'une section quelconque parallèle au plan des yz soit une fonction rationnelle de l'abscisse de cette section, fonction de la forme

$$S = a + bx + cx^2 + ex^3 \ (*).$$

(*) Voir *Nouvelles Annales*, t. VII, p. 241.

(Le théorème ne serait plus vrai, si la fonction était d'un degré supérieur au troisième.)

Nous pouvons, sans changer cette condition, supposer l'origine au milieu de la distance H, puisque les formules de transformation des coordonnées étant entières, rationnelles et du premier degré, S ne cessera pas d'être rationnelle et son degré ne sera pas élevé. En posant $H = 2h$, on aura pour l'expression du volume

$$V = \int_{-h}^{+h} (a + ba + cx^2 + ex^3)\,dx = 2xh + \frac{2ch^3}{3}.$$

D'un autre côté, on obtiendra les sections B, B' et b en faisant dans l'expression de S successivement

$$x = -h, \quad x = +h, \quad x = 0.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} B &= a - bh + ch^2 - eh, \\ B' &= a + bh + ch^2 + eh, \\ b &= a. \end{aligned}$$

En éliminant a, b, c, e entre ces trois équations et l'expression de V, on obtient la formule énoncée plus haut.

Cette élimination se fait facilement en ajoutant quatre fois la dernière équation aux deux précédentes; on a ainsi

$$B + B' + 4b = 6a + 2ch^2 = \left(2ah + \frac{2ch^3}{3}\right)\frac{3}{h} = \frac{3V}{h},$$

d'où on tire

$$V = \frac{h}{3}(B + B' + 4b):$$

et comme $h = \frac{H}{2}$, on a, en substituant,

$$V = \frac{H}{6}(B + B' + 4b).$$

Cette formule, due à M. Sarrus, s'applique aux prismes et cylindres, aux cônes, pyramides et aux troncs de cônes et de pyramides, à la sphère, aux ellipsoïdes, ainsi qu'aux segments de sphères ou d'ellipsoïdes, etc.

Si l'on suppose, en effet, les bases du cylindre ou prisme parallèles au plan des yz, la section S sera, dans ce cas, une constante, et la condition analytique nécessaire et suffisante pour l'application de la formule se trouve remplie : il est clair, en effet, que pour les prismes et cylindres, les trois sections B, B′ et b sont égales et l'expression de V devient $\frac{H}{6} \times 6B$ ou $H \times B$.

Il en est de même pour les cônes et les pyramides. Si l'on suppose l'origine au sommet et le plan de la base parallèle au plan des yz, l'expression de S sera $\frac{Bx^2}{H^2}$, qui est encore une fonction rationnelle. La formule est donc applicable aux cônes, aux pyramides et à leurs troncs.

On le vérifie aisément en remarquant que dans le premier cas $B' = 0$. B est la base de la pyramide, b est le quart de B. L'expression de V devient donc $\frac{H}{6} \cdot 2B$ ou $\frac{B \times H}{3}$.

Si l'on voulait la vérifier pour le tronc, il faudrait évaluer b en fonction de B et de B′ et substituer cette valeur dans l'expression de V : on retomberait ainsi sur la formule connue du tronc de pyramide.

Pour cela, appelons x, y, z les côtés homologues des trois sections semblables B, B′, b ; on aura

$$\frac{B}{x^2} = \frac{B'}{y^2} = \frac{b}{z^2}$$

ou

$$\frac{\sqrt{B}}{x} = \frac{\sqrt{B'}}{y} = \frac{\sqrt{b}}{z}.$$

Or

$$z = \frac{x + y}{2};$$

donc

$$\sqrt{b} = \frac{\sqrt{B} + \sqrt{B'}}{2}:$$

d'où l'on tire

$$4b = B + B' + 2\sqrt{BB'}.$$

En substituant dans l'expression de V, on trouve

$$V = \frac{H}{6}\left(2B + 2B' + 2\sqrt{BB'}\right) = \frac{H}{3}\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right),$$

ce qui est la formule connue.

Enfin le théorème s'applique encore à la sphère, aux ellipsoïdes et à leurs segments. En effet, l'équation de l'ellipsoïde étant

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1,$$

l'expression de S sera

$$\pi\beta\gamma\left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right),$$

expression rationnelle.

On peut le vérifier, en remarquant que, dans ce cas,

$$B = 0, \quad B' = 0, \quad b = \pi\beta\gamma \quad \text{et} \quad H = 2\alpha,$$

par suite, V devient

$$\frac{2\alpha}{6}\, 4\pi\beta\gamma \quad \text{ou} \quad \frac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma;$$

de même pour la sphère.

On déduit aisément de ce théorème une démonstration d'une formule de Simpson fréquemment employée pour le cubage des travaux de terrassement.

On partage le volume à mesurer en un nombre pair $2n$ de tranches au moyen de $2n+1$ plans parallèles et équidistants. Représentons par

$$S_1, \ S_2, \ S_3, \ldots, \ S_{2n+1}$$

les surfaces des sections ainsi obtenues. Appelons h la distance constante de l'une d'elles à la suivante. Regardons comme des troncs de pyramides les volumes compris entre S_1 et S_3, entre S_3 et S_5, entre S_5 et S_7, etc., entre S_{2n-1} et S_{2n+1}. En appliquant à ces troncs successifs la formule que nous venons de démontrer, et remarquant que h n'est que la moitié de la hauteur de chacun de ces troncs, on aura

$$\text{Volume entre } S_1 \text{ et } S_3 = \frac{h}{3}(S_1 + S_3 + 4S_2),$$

$$\text{Volume entre } S_3 \text{ et } S_5 = \frac{h}{3}(S_3 + S_5 + 4S_4),$$

$$\text{Volume entre } S_5 \text{ et } S_7 = \frac{h}{3}(S_5 + S_7 + 4S_6),$$

. . . .

$$\text{Volume entre } S_{2n-1} \text{ et } S_{2n+1} = \frac{h}{3}(S_{2n-1} + S_{2n+1} + 4S_{2n}),$$

et, en ajoutant, on trouve, pour le volume total,

$$V = \frac{h}{3}\begin{pmatrix} S_1 + 4S_2 + 2S_3 + 4S_4 + 2S_5 + 4S_6 + \ldots \\ + 2S_{2n-1} + 4S_{2n} + S_{2n+1} \end{pmatrix}.$$

En d'autres termes, le volume total est égal au tiers de l'équidistance multiplié par la somme des sections extrêmes, augmentée de deux fois la somme des autres sections de rang impair et de quatre fois la somme des sections de rang pair.