

GERONO

Question d'examen d'admission à l'École polytechnique (1856)

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 16
(1857), p. 100-102

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1857_1_16__100_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1857, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTION D'EXAMEN D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(1856).

Reconnaitre à PRIORI que l'équation

$$xy + yz + xz = 0$$

représente un cône droit à base circulaire (les coordonnées étant supposées rectangulaires).

Lorsque les axes des coordonnées sont rectangulaires, toute équation du second degré

$$f(x, y, z) = 0,$$

symétrique par rapport aux trois coordonnées x, y, z , représente une surface de révolution autour de la droite $x = z, y = z$; en supposant toutefois que cette équation représente une surface. C'est ce que nous allons démontrer.

Remarquons d'abord que l'équation proposée

$$f(x, y, z) = 0,$$

étant, d'après l'hypothèse, symétrique par rapport aux deux coordonnées x, y , le plan qui divise en deux parties égales le dièdre que forment les deux plans coordonnés ZX, ZY est nécessairement un plan *principal*. En effet, nommons M un point quelconque de la surface et a, b, c les coordonnées x, y, z de ce point; l'équation

$$f(a, b, c) = 0$$

admettra la solution

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c.$$

Désignons par M' le point symétrique de M par rapport au plan bissecteur considéré; les coordonnées x, y, z de M' auront pour valeurs b, a, c . Or il est supposé que l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

conserve les mêmes solutions lorsqu'on y change x en y et y en x ; donc on peut conclure de ce que cette équation admet la solution

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c,$$

qu'elle admet aussi la solution

$$x = b, \quad y = a, \quad z = c$$

Ainsi le point M' appartient à la surface, et, par conséquent, le plan bissecteur $x = y$ est un plan principal de la surface.

On démontrera de même que les deux plans bissecteurs $x = z, y = z$ sont des plans principaux.

Cela posé, menons un plan perpendiculaire à l'intersection $[x = z, y = z]$ des trois plans principaux en un point quelconque C de cette droite. Ce nouveau plan coupera les trois premiers suivant trois droites passant par le point C et qui seront des axes de la courbe déterminée par son intersection avec la surface. Cette courbe du *second degré* ayant trois axes est nécessairement une circonférence dont le centre se trouve au point C sur la droite $x = z, y = z$. Il en résulte que l'équation proposée

$$f(x, y, z) = 0$$

représente une surface de révolution autour de la droite $x = z, y = z$

(102)

De ce principe, on conclut immédiatement que le cône représenté par l'équation homogène

$$xy + yz + xz = 0$$

est un cône de révolution dont l'axe a pour équations

$$x = z, \quad y = z. \quad \mathbf{G.}$$