NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

EUZET

Sur les courbes planes à équations trinômes et les surfaces à équations tétranômes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 193-200

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__193_1>

SUR LES COURBES PLANES A ÉQUATIONS TRINOMES ET LES SURFACES A ÉQUATIONS TÉTRANOMES;

D'APRÈS M. EUZET

(Au bureau du Génie, à Toulon).

En juin 1853, M. Euzet a publié, à Toulon, une feuille lithographiée, contenant plusieurs beaux théorèmes très-généraux, énoncés sans démonstrations, attendu, dit l'auteur, qu'elles sont trop étendues pour un opuscule et trop élémentaires. Nous allons indiquer ces théorèmes, sans toutefois conserver l'ordre adopté par l'auteur, et y ajouter quelques démonstrations, qui sont, en effet, très-faciles.

1. Soit

(1) $$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1$$

l'équation d'une courbe à axes quelconques; a, b, m, n sont des nombres donnés, entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs.

Soit encore l'équation d'une droite

$$\frac{nt}{mx} + \frac{mu}{ny} = 1;$$

t et u sont des coordonnées courantes ; x et y des coordonnées d'un point situé sur la courbe (1). Pour trouver l'équation de l'enveloppe de cette droite, on pose, comme on sait, les trois équations

$$m^2 xu + n\,y\,t = mn\,xy,$$
$$m^2 a^m y^n u - n^2 b^{n-1} x^{m-1} t = mn\,(a^m y^n - b^n x^m),$$
$$b^n x^m + a^m y^n = a^m b^n.$$

C'est entre ces trois équations qu'il faut éliminer x et y; les deux premières équations linéaires en u et t donnent

$$u = \frac{n}{mb^n}\,y^{n+1}, \quad t = \frac{m}{na^m}\,x^{n+1};$$

substituant les valeurs de x, y en t et u dans la troisième équation, on obtient

$$\frac{u^{\frac{n}{n+1}}}{\left(\frac{n}{m}\,b\right)^{\frac{n}{n+1}}} + \frac{t^{\frac{m}{m+1}}}{\left(\frac{m}{n}\,a\right)^{\frac{m}{m+1}}} = 1;$$

c'est l'équation de l'enveloppe, et que l'auteur désigne sous le nom de *première conjuguée* de la courbe (1).

Cette équation a la même forme que l'équation (1); en y opérant de la même manière, on obtient la deuxième conjuguée de l'équation (1), et ainsi de suite. Pour avoir la conjuguée de l'ordre k, posons

$$b_k = \left(\frac{n}{m}\right)^k \frac{(m+1)(2m+1)}{(n+1)(2n+1)} \cdots \frac{[(k-1)m+1]}{[(k-1)n+1]} b,$$

$$a_k = \left(\frac{m}{n}\right)^k \frac{(n+1)(2n+1)}{(m+1)(2m+1)} \cdots \frac{(kn+1)}{(km+1)} a;$$

on obtient pour équation de cette conjuguée,

$$\left(\frac{u}{b_k}\right)^{\frac{n}{1+nk}} + \left(\frac{t}{a_k}\right)^{\frac{m}{1+mk}} = 1,$$

lorsque $m = n$; cette équation devient

$$\left(\frac{u}{b}\right)^{\frac{n}{1+nk}} + \left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{m}{1+mk}} = 1,$$

c'est le *premier théorème général* de M. Euzet.

Dans la supposition de $m = n$, si par un point de la courbe donnée on mène des parallèles aux axes, on obtient un parallélogramme; l'enveloppe de la diagonale qui part des axes est alors la première conjuguée.

2. Soit x_1, y_1 un point pris sur la courbe

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1,$$

et t_1, u_1 le point correspondant sur la première conjuguée; menons par ces deux points des tangentes aux courbes respectives. Soient T l'aire formée par la première tangente et les axes; T_1 l'aire formée par la seconde tangente et les axes. On a la relation

$$T.T_1^{n-1} = \left(\frac{ab}{2}\right)^n.$$

3. Lemme.

$$\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}$$

$$= \frac{\nu x^m (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{m\nu + n(\mu+\nu)} + \frac{n(\mu+\nu)a}{m\nu+n(\mu+\nu)} \int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}},$$

$$\int x^{m+n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$$

$$= \frac{\nu x^m (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{(m\nu+n\mu+n\nu)b} - \frac{m\nu a}{(m\nu+n\mu+n\nu)b} \int x^{m-1}\,dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}};$$

faisons

$$p = \left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}},$$

on a

$$\int_0^p x^{m-1}\,dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}$$

$$= \frac{n(\mu+\nu)a}{m\nu+n(\mu+\nu)} \int_0^p x^{m-1}\,dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}},$$

$$\int_0^p x^{m+n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$$

$$= -\frac{m\nu a}{(m\nu+n\mu+n\nu)b} \int_0^p x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

4. Soient

$$S = \int_0^a y\,dx, \quad S_1 = \int_0^{a_1} u\,dt,$$

$$S = \int_0^a dx\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^m\right]^{\frac{1}{n}} = a\int_0^1 dz\,(1 - z^m)^{\frac{1}{n}};$$

ou

$$x = az,$$

$$S_1 = \int_0^{a_1} dt\left[1 - \left(\frac{t}{a^1}\right)^{m_1}\right]^{\frac{1}{n_1}};$$

ou

$$m_1 = \frac{m}{1+m}, \quad n_1 = \frac{n}{1+n};$$

faisons $t = a_1 z_1$, on a

$$S_1 = a_1 \int_0^1 dz_1\left(1 - z_1^{m_1}\right)^{1+\frac{1}{n}},$$

or, d'après le lemme,

$$S_1 = \frac{a_1 m_1 (1+n)}{n + m_1(1+n)} \int_0^1 dz_1\left(1 - z_1^{m_1}\right)^{\frac{1}{n}} = p\int_0^1 dz\left(1 - z^{m_1}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Posons

$$z^{m_1} = z^{\frac{m}{1+m}} = v^m, \quad z = v^{1+m};$$

d'où

$$S_1 = p(1+m)\int_0^1 v^m\,dv\,(1 - v^m)^{\frac{1}{n}},$$

et, d'après le lemme,

$$S_1 = \frac{p(1+m)n}{n+m+mn}\int_0^1 dv\,(1 - v^m)^{\frac{1}{n}};$$

donc

$$\frac{S_1}{S} = \frac{p(1+m)n}{(m+n+mn)a} = \frac{m}{n} \cdot \frac{mn.1 + m.1 + n}{(m+n+mn)(m+n+2mn)}.$$

Faisant $m = n$, on a

$$\frac{S_1}{S} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+n}{2+n},$$

et de là

$$\frac{S_k}{S} = \frac{1}{2^k} \frac{(1+n)(1+2n)(1+3n) \quad \ldots\ldots\ldots (1+kn)}{(2+n)(2+3n). \quad \ldots\ldots\ldots [(2+(2k-1)n]};$$

S est l'aire de la courbe donnée comprise entre les axes et S_k l'aire analogue de la courbe conjuguée d'ordre k. C'est le *deuxième théorème général* de M. Euzet, en supposant $m = n$ et que les courbes rencontrent les axes.

Exemples. — Faisons $m = n = 1$; la ligne donnée est une droite; la première conjuguée est une parabole ayant pour équation

$$\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{S_1}{S} = \frac{1}{3}.$$

Si $m = n = 2$,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1;$$

on a pour équation de la première conjuguée

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \quad S_1 = \frac{3}{8}\pi ab;$$

l'équation de la développée est

$$\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{q}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \quad p = \frac{a^2 - b^2}{a}, \quad q = \frac{a^2 - b^2}{b}:$$

d'où l'on déduit, pour l'aire de la développée,

$$\frac{3}{8}\pi\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^2.$$

4. *Troisième théorème général.* Les axes étant rectangulaires et $m=n$, si l'on fait tourner autour de l'un d'eux, comme charnière, le plan qui renferme la courbe (1) ainsi que sa $k^{\text{ième}}$ conjuguée, en nommant V et V_k les volumes respectifs engendrés par ces lignes, on trouve

$$V_k=\frac{(1+n)(1+2n)\ldots(1+kn)(2+n)(2+2n)\ldots(2+2kn)}{(3+n)(3+2n)\ldots\ldots\ldots\ldots(3+3kn)}V.$$

Démonstration. Au moyen des lemmes, on suppose $m=n$; les courbes engendrent des cônes. Si $n=1$, on a

$$V_1=\frac{V}{5}.$$

5. Nous omettons le quatrième théorème, cas particulier du suivant.

Cinquième théorème général. Soit

$$(1)\qquad \left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^{n'}+\left(\frac{z}{c}\right)^{n''}=1$$

l'équation d'une surface.

Faisant

$$x^{kn+1}=a^{kn}x',\quad y^{k'n'+1}=b^{k'n'}y',\quad z^{k''n''+1}=c^{k''n''}z',$$

la surface dérivée a pour équation, ôtant les accents,

$$(1)\qquad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n}{1+nk}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{n'}{1+n'k'}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{n''}{1+n''k''}}=1;$$

et, en représentant par V_1, V_2, les volumes respectifs compris entre ces surfaces et les plans coordonnés, et posant

$$(1+n)(1+2n)\ldots(1+kn) = P_n,$$
$$(1+n')(1+2n')\ldots(1+k'n') = P_{n'}.$$
$$(1+n'')(1+2n'')\ldots(1+k''n'') = P_{n''},$$
$$nn' + n'n'' + n''n = N,$$
$$(N + nn'n'')(N + 2nn'n'')(N + 3nn'n'')\ldots[N + (k + k' + k'')nn'n''] = M,$$

on a

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(nn')^{k''}(n'n'')^{k}(n''n)^{k'}\,P_n P_{n'} P_{n''}}{M}.$$

L'auteur nous a adressé la démonstration fondée sur les formules connues pour les volumes.

Note. Lorsque $n = n' = n''$, on a les surfaces etudiées par M. Lame en 1818, alors élève ingénieur des Mines, dans l'ouvrage intitule : *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie.* Paris, in-8 de 124 pages. Ouvrage très-rare qui fait époque, étant le point de départ des methodes métamorphiques aujourd'hui si en vogue.