NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

V. PRÉVOTEL

Concours de 1847. Solution analytique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 86-91

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__86_1>

CONCOURS DE 1847 (t. VI, p. 377, fig. 56) (*).

Solution analytique.

PAR V. PRÉVOTEL,
Élève du lycée Descartes.

I. La solution de la question paraît devoir être simplifiée en prenant pour axes des coordonnées deux des côtés du triangle PQR. Soient donc QR l'axe des x, et PR l'axe des y.

Représentons les longueurs des côtés QR et PR par $2p$ et $2q$, et les distances de l'origine R aux points de contact de la ligne du second ordre et des axes, par α et β.

Ceci posé, l'équation générale d'une ligne du deuxième ordre tangente aux axes, est

$$(1)\qquad \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 + 2Bxy + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{\beta}\right) - 2\left(\frac{x}{\alpha}\right) + 1 = 0.$$

II. Pour exprimer toutes les conditions de l'énoncé, il faut indiquer que le côté PQ est tangent à la courbe (1).

(*) Dans la figure 56 remplacez C par c et c par C.

La condition nécessaire et suffisante pour que la ligne $y = mx + n$ soit tangente à cette courbe, est

$$\left[B - \frac{1}{\alpha\beta}\right]\left[\frac{1}{2}\left(B + \frac{1}{\alpha\beta}\right)n^2 + \left(\frac{m}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)n - m\right] = 0.$$

Cette égalité peut être satisfaite de deux manières, soit en annulant le premier facteur, soit en annulant le second. Dans le premier cas, la courbe est remplacée par deux droites; nous laisserons donc ce cas à part, et annulant le second facteur, nous aurons la relation

$$(2) \qquad \frac{1}{2}\left(B + \frac{1}{\alpha\beta}\right)n^2 + \left(\frac{m}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)n - m = 0.$$

III. La droite PQ a pour équation

$$\frac{x}{2p} + \frac{y}{2q} = 1.$$

Servons-nous de la relation (2) pour exprimer que cette droite est tangente à la courbe proposée, et remplaçons m par $-\frac{q}{p}$ et n par $2q$: on trouve alors :

$$(3) \qquad 2pq\left(B + \frac{1}{\alpha\beta}\right) - 2\left(\frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta}\right) + 1 = 0.$$

ou

$$p\left[\left(B + \frac{1}{\alpha\beta}\right)q - \frac{2}{\alpha}\right] + q\left[\left(B + \frac{1}{\alpha\beta}\right)p - \frac{2}{\beta}\right] + 1 = 0.$$

Posons, pour simplifier :

$$\left(B + \frac{1}{\alpha\beta}\right)q - \frac{2}{\alpha} = Q$$

et

$$\left(B + \frac{1}{\alpha\beta}\right)p - \frac{2}{\beta} = P,$$

et la relation précédente devient :

$$(4) \qquad pQ + qP + 1 = 0.$$

IV. Les coordonnées des points A. B, C sont

$$\begin{array}{lll} \text{A} & x=p\,; & y=o, \\ \text{B} & x=o\,; & y=q, \\ \text{C} & x=p\,; & y=q, \end{array}$$

et les équations des droites AB, AC, BC

$$(5)\left\{\begin{array}{ll} \text{AB} & \frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1, \\ \text{AC} & x=p, \\ \text{BC} & y=q. \end{array}\right.$$

V. Désignons par M, M′, M″ les coefficients angulaires des droites Aa, Bb, Cc ; comme ces droites passent par les points A, B, C, leurs équations seront

$$(6)\left\{\begin{array}{ll} \text{A}a & y=\text{M}(x-p), \\ \text{B}b & y-q=\text{M}'x, \\ \text{C}c & y-q=\text{M}''(x-p). \end{array}\right.$$

Ces droites sont tangentes à la ligne du deuxième ordre, donc leurs coefficients doivent satisfaire à la relation (2) : on trouvera ainsi pour déterminer chacun de ces coefficients une équation du deuxième degré ; l'une des racines est la valeur cherchée, et l'autre est le coefficient angulaire de l'un des côtés du triangle PQR ; ces coefficients sont connus. On peut donc supprimer les racines correspondantes, et en définitive, on trouve :

$$(7)\left\{\begin{array}{ll} \text{pour A}a & p\text{PM}+2\left(\frac{p}{\alpha}-1\right)=0, \\ \text{pour B}b & 2\text{M}'\left(\frac{q}{\beta}-1\right)+q\text{Q}=0, \\ \text{pour C}c & \text{PM}''+\text{Q}=0. \end{array}\right.$$

IV. La recherche des deux premières relations n'offre aucune difficulté ; on remplace dans l'expression (2) m par M ou M' et n par $-Mp$ ou par q : on supprime dans le premier cas le facteur M.

Pour la troisième relation, on remplace m par M'' et n par $q-M''p$, et on trouve :

$$\frac{1}{2}\left(B+\frac{1}{\alpha\beta}\right)\left(M''p-q\right)^2-\left(\frac{M''}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)\left(M''p-q\right)-M''=0.$$

Posons $M''p+q=N$, et mettons à la place de M'' la valeur en fonction de N, on aura :

$$\left[\frac{1}{2}\left(B+\frac{1}{\alpha\beta}\right)-\frac{1}{p\beta}\right]N^2-\left[2q\left(B+\frac{1}{\alpha\beta}\right)-\left(\frac{q}{p\beta}+\frac{1}{\alpha}\right)-\frac{2q}{p\beta}+\frac{1}{p}\right]N$$
$$+2\left(B+\frac{1}{\alpha\beta}\right)q^2-2q\left(\frac{q}{p\beta}+\frac{1}{\alpha}\right)+\frac{q}{p}=0.$$

Multiplions par $2p$, nous aurons :

$$\left[\left(B+\frac{1}{\alpha\beta}\right)p-\frac{2}{\beta}\right]N^2-2\left[2pq\left(B+\frac{1}{\alpha\beta}\right)-\left(\frac{q}{\beta}+\frac{p}{\alpha}\right)-\frac{2q}{\beta}+1\right]N$$
$$+q\left[2\left(B+\frac{1}{\alpha\beta}\right)pq-2\left(\frac{q}{\beta}+\frac{p}{\alpha}\right)+1\right]=0.$$

Mais l'équation (3) prouve que le terme indépendant de N est nul ; le premier membre est ainsi divisible par N ou par $M''p+q$; si on égale ce facteur à 0, on trouve $M''=-\frac{q}{p}$, ce qui vérifie le résultat que nous avions annoncé. Le coefficient de N^2 est évidemment égal à P, donc l'équation devient :

$$PN-2\left[2pq\left(B+\frac{1}{\alpha\beta}\right)-\left(\frac{q}{\beta}+\frac{p}{\alpha}\right)-\frac{2q}{\beta}+1\right]=0.$$

Or l'équation (3) nous donne encore :

$$2pq\left(B+\frac{1}{\alpha\beta}\right)-\left(\frac{q}{\beta}+\frac{p}{\alpha}\right)+1=\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}.$$

Donc le terme indépendant de N est égal à $-2\left(\frac{p}{\alpha}-\frac{q}{\beta}\right)$.

Remplaçons N par $M''p+q$, nous aurons :

$$M''pP=2\left(\frac{p}{\alpha}-\frac{q}{\beta}\right)-qP=-Qp,$$

et enfin

$$M''P+Q=0.$$

VII. Cherchons maintenant les coordonnées des points a, b, c : en se servant des équations (5) et (6), on obtient :

Pour a $\quad x_1=p+\frac{q}{M} \qquad y_1=q.$

Pour b $\quad x_2=p \qquad y_2=M'p+q,$

Pour c $\quad x_3=\frac{p^2M''}{pM''+q}$ et $y_3=\frac{q^2}{pM''+q}.$

Ces trois points seront en ligne droite, si leurs coordonnées rendent identique l'expression

$$\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}=\frac{x_2-x_3}{y_2-y_3},$$

on trouve :

$$\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}=-\frac{q}{pMM'}$$

et

$$\frac{x_2-x_3}{y_2-y_3}=\frac{q}{pM'M''+q(M'+M'')}.$$

A l'aide des équations (7), on déduit :

$$qM''=\frac{2M'\left(\frac{q}{\beta}-1\right)}{P};$$

donc

$$\frac{x_2-x_3}{y_2-y_3}=\frac{q}{M'\left[pM''+q+\frac{2\left(\frac{q}{\beta}-1\right)}{P}\right]}$$

$$=\frac{q}{M'\left[-\frac{pQ}{P}+q+\frac{2\left(\frac{q}{\beta}-1\right)}{P}\right]}=\frac{q}{M'\left[\frac{Pq-pQ+2\left(\frac{q}{\beta}-1\right)}{P}\right]}$$

$$=\frac{q}{pM'\left[\frac{2\left(\frac{p}{\alpha}-1\right)}{pP}\right]}=\frac{q}{-pMM'};$$

donc $\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}=\frac{x_2-x_3}{y_2-y_3}$. C. Q. F. D.