Nouvelles annales de mathématiques

Strebor

Théorème de géométrique sphérique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 451-453

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__451_1>

THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE,

PAR M. STREBOR.

Il existe une seconde analogie sur la sphère avec l'hyperbole équilatère, savoir : une ellipse sphérique, dont le petit axe est $\frac{1}{2}\pi$, rapportée au centre extérieur, situé sur le prolongement de l'axe le plus grand. Voici quelques propriétés de cette conique, que nous appellerons hyperbole équilatère sphérique de seconde espèce.

I. L'hyperbole équilatère sphérique de seconde espèce a pour équation polaire centrale :

$$\operatorname{tang}^2\rho \cos 2\omega = \operatorname{tang}^2\alpha.$$

II. En désignant par ω l'arc mené du centre perpendiculairement au grand cercle, tangent à l'extrémité d'un arc vecteur quelconque (ρ) tiré du centre, on aura :

$$\operatorname{tang}\omega \operatorname{tang}\rho = \operatorname{tang}^2\alpha.$$

Dans une hyperbole équilatère plane, si l'on mène par le foyer deux cordes, mutuellement à angles droits, l'une d'elles, terminée d'un côté et de l'autre par la même branche de la courbe, sera égale à l'autre, comprise entre les deux branches opposées semblablement.

III. Dans une hyperbole équilatère sphérique de seconde espèce, si l'on mène par le foyer deux arcs de grands cercles, mutuellement à angles droits, l'un d'eux, terminé d'un côté et de l'autre par la même branche de la conique, sera égal à la partie de l'autre, comprise entre les deux branches opposées.

Ce dernier théorème admet un autre énoncé, savoir :

IV. Dans une ellipse sphérique, dont le petit axe est $\frac{1}{2}\pi$, si l'on mène par le foyer deux cordes (arcs de grands cercles), mutuellement à angles droits, leur somme sera constante et égale à π.

Considérons la courbe, lieu des points pris sur les grands cercles menés du centre de l'hyperbole équilatère sphérique de l'espèce dont il s'agit, perpendiculairement aux tangentes, de manière que leurs distances au centre soient divisées en parties égales par les tangentes. Elle peut être évidemment regardée comme fournissant une analogie avec la lemniscate de Bernoulli. En la nommant donc la sphéro-lemniscate de seconde espèce, on aura les théorèmes suivants, qui vont confirmer cette analogie.

V. La sphéro-lemniscate de seconde espèce a pour équation polaire centrale :

$$\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \rho = \operatorname{tang}^2 \alpha \cos 2\omega.$$

VI. Elle coïncide avec le lieu du sommet d'un triangle sphérique, dont la base est donnée et dont le produit des tangentes trigonométriques des demi-côtés est constant, et égal au carré de la tangente trigonométrique de la quatrième partie de la base.

VII. La base du triangle dont on vient de parler, coïncide avec la distance entre les foyers contigus des branches opposées de l'hyperbole équilatère sphérique, de laquelle la sphéro-lemniscate est dérivée.

On sait que l'arc de la lemniscate de Bernoulli s'exprime par une fonction de première espèce, à module $\sqrt{\frac{1}{2}}$ pareillement.

VIII. L'arc de la sphéro-lemniscate de l'espèce dont il s'agit, s'exprime par une fonction elliptique de troisième espèce, à module $\sqrt{\frac{1}{2}}$.