NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TH. LOXHAY

Solution de la question 188

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 340-341

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__340_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 188 (p. 240),

PAR M. TH. LOXHAY,
de Bruxelles.

$$(ax+by+cz)^2+(a'x+b'y+c'z)^2+(a''x+b''y+c''z)^2=d^2,$$
$$(ax+a'y+a''z)^2+(bx+b'y+b''z)^2+(cx+c'y+c''z)^2=d^2.$$

Les axes étant rectangulaires, ces deux équations sont celles de deux ellipsoïdes égaux. (Jacobi.)

Je remarque d'abord que la deuxième équation se déduit de la première, en permutant b, c, a', c', a'' et b'' respectivement en a', a'', b, b'', c et c'. Maintenant, puisque ces deux équations ne contiennent pas de termes du premier degré, les surfaces ont chacune le centre à l'origine ; or on sait (voyez Lefébure de Fourcy, *Géométrie analytique*, n° 693) que pour de telleséquations les longueurs des axes sont données par $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, λ étant déterminé par l'équation :

$$\lambda^3+L\lambda^2+M\lambda+N=0. \qquad (1)$$

En calculant les coefficients pour la première équation, il vient :

$$L=-\frac{a^2+a'^2+a''^2+b^2+b'^2+b''^2+c^2+c'^2+c''^2}{d^2}$$

$$M = 2\frac{(aa'bb'+aa''bb''+a'a''b'b''+aa'cc'+aa''cc''+a'a''c'c''+bcb'c'+bcb''c''+b'c'b''c'')}{d^4}$$

$$N = -\frac{[a(b'c''-b''c')+a'(bc''-b''c)+a''(bc'-b'c)]^2}{d^6}$$

et l'équation (α) devient :

$$\lambda^3 - \left(\frac{a^2+a'^2+a''^2+b^2+b'^2+b''^2+c^2+c'^2+c''^2}{d^2}\right)\lambda^2 +$$

$$+2\frac{(aa'bb'+aa''bb''+a'a''b'b''+aa'cc'+aa''cc''+a'a''c'c''+bcb'c'+bcb''c''+b'c'b''c'')}{d^4}\lambda -$$

$$-\frac{[a(b'c''-b''c')+a'(bc''-b''c)+a''(bc'-b'c)]^2}{d^6} = 0. \quad (\alpha')$$

En faisant les permutations annoncées pour passer à la deuxième surface, l'équation (α') ne subit aucun changement ; donc les deux surfaces ont les mêmes axes. De plus, l'équation (α') n'a que des variations, et puisqu'elle a toutes ses racines réelles, d'après la règle de Descartes, elles sont toutes les trois positives ; donc elle représente un ellipsoïde, et partant les deux surfaces sont des ellipsoïdes égaux.