NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL SERRET

Démonstration d'un théorème de M. Gauss sur le pentagone

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 28-29

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__28_1>

DÉMONSTRATION

d'un théorème de M. Gauss sur le pentagone
(Question 162, VI, p. 276).

PAR M. PAUL SERRET.

Théorème I. ABCDE étant un pentagone plan quelconque, représentons par α, β, γ, δ, ε les aires des triangles ABC, BCD, CDE, DEA, EAB, et par S la surface du pentagone, on aura :

$$S^2 - S(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\varepsilon+\varepsilon\alpha=0. \quad (1)$$

Démonstration. Nous nous appuierons sur le théorème connu de Fontaine sur le quadrilatère (VI, 71). Considérons en effet le quadrilatère BCDE et le point A sur son plan, on aura, d'après le théorème cité :

$$S.\,\mathrm{ACD}+\alpha\delta=\mathrm{ABD}.\,\mathrm{ACE}. \quad (A)$$

Or l'on a :

$$\mathrm{ACD}=S-(\alpha+\delta)\,;\ \mathrm{ABD}=S-(\beta+\delta)\,;\ \mathrm{ACE}=S-(\alpha+\gamma)\,;$$

remplaçant dans (A), l'on aura :

$$\varepsilon\,[S-\alpha-\delta]+\alpha\delta=[S-(\beta+\delta)]\,[S-(\alpha+\gamma)],$$

d'où :

$$S^2-S(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)+(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)-\alpha\delta+\delta\varepsilon+\varepsilon\alpha,$$

ou simplifiant :

$$S^2-S(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\varepsilon+\varepsilon\alpha=0. \quad \text{c. q. f. d.}$$

Théorème II. ABCDE étant un pentagone plan, si l'on appelle α', β', γ', δ', ε', les surfaces des quadrilatères ABCD, BCDE, CDEA, DEAB, EABC, et S la surface du pentagone, on aura encore :

$$S^2-S(\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta'+\varepsilon')+\alpha'\beta'+\beta'\gamma'+\gamma'\delta'+\delta'\varepsilon'+\varepsilon'\alpha'=0. \quad (2)$$

Démonstration. On le démontre facilement en remplaçant, dans la relation (1), chacune des quantités α, β, γ, δ, ε par la différence entre S surface du pentagone et l'une des aires α', β', γ', δ', ε' convenablement choisie ; ce qui donne une relation entre S et α', β', γ', δ', ε' qui, simplifiée, est précisément la relation (2).

Remarque. Si le pentagone devient quadrilatère ABCD, en nommant α, β, γ les aires des triangles ABC, BCD, CDA, et S la surface du quadrilatère, la relation (1) est remplacée par celle-ci :

$$(3) \qquad S^2-S(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha\beta+\beta\gamma=0,$$

relation que l'on peut d'ailleurs vérifier directement en résolvant la relation (3) par rapport à S.