Mémoire de M. Jacobi sur l'élimination

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 287-294

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__287_1>

MÉMOIRE DE M. JACOBI

sur l'élimination. (Suite) (*Voir* p. 17.)

—

X.

Pour les diverses valeurs de r, il existe entre les fonctions multiplicatrices M_r, N_r diverses relations que nous allons examiner.

Considérons d'abord les fonctions multiplicatrices M_r, N_r dans lesquelles $r \leqq n-2$; il suit des équations (20), en omettant les termes qui se détruisent :

$$-(xM_r - M_{r+1}) = A_r(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x) -$$
$$-(A_{r+1}b_1 + A_{r+2}b_2 + \ldots + A_{r+n}b_n).$$

Mais les équations (19) donnent :

$$A_r b_0 + A_{r+1}b_1 + A_{r+2}b_2 + \ldots + A_{r+n}b_n = 0.$$

Donc

$$-(xM_r - M_{r+1}) = A_r(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots b_1 x + b_0) = A_r \varphi x,$$

on trouve de la même manière :

$$xN_r - N_{r-1} = A_r f(x).$$

Soit maintenant $r \leqq n$; si, dans les équations (23), à la place de $2n - r - 1$, on met successivement r et $r+1$, il vient, toute réduction faite :

$$-(xM_r - M_{r+1}) = A_r(b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}) -$$
$$-(A_{r-1}b_{n-1} + A_{r-2}b_{n-2} + A_{r-n}b_0)x.$$

Or les équations (19) donnent :

$$A_{r-n}b_0+A_{r-n+1}b_1+A_{r-n+2}b_2+\ldots.+A_{r-1}b_{n-1}+A_rb_n=0\,;$$

d'où, comme ci-dessus,

$$-(xM_r-M_{r+1})=A_r\varphi(x)\,;$$

et de même,

$$xN_r-N_{r+1}=A_rf(x).$$

Posons enfin $r=n-1$ dans (20) et $r=n$ dans (23), on trouve :

$$\begin{aligned}
-(xM_{n-1}-M_n)=b_0A_{n-1}+&\\
&+x(b_1A_{n-1}+b_0A_{n-2}+b_1A_{n-1}+b_2A_n+\ldots.+b_nA_{2n-2}),\\
&+x^2(b_2A_{n-1}+b_1A_{n-2}+b_0A_{n-3}+b_2A_{n-1}+b_3A_n+\ldots.+b_nA_{2n-3}),\\
&\quad x^3(b_3A_{n-1}+\ldots.+b_0A_{n-4}+b_3A_{n-1}+\ldots.+b_nA_{2n-4}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad x^{n-1}(b_{n-1}A_{n-1}+\ldots.+b_0A_0+b_{n-1}A_{n-1}+b_nA_n),\\
&+x^nb_nA_{n-1}\,;
\end{aligned}$$

et à l'aide des équations (9),

$$-(xM_{n-1}-M_n)=A_{n-1}\varphi(x)\,;$$

et de la même manière,

$$xN_{n-1}-N_n=A_{n-1}f(x)\,;$$

d'où il résulte que r *désignant un des nombres* 0, 1, 2, 3.... $2n-3$, on a :

$$-(xM_r-M_{r+1})=A_r\varphi x\,;\quad xN_r-N_{r+1}=A_rf(x).\quad(27)$$

Des équations (27) on déduit :

$$\begin{aligned}
&-(x^mM_r-x^{m-1}M_{n+1})=A_rx^{m-1}\varphi(x),\\
&-(x^{m-1}M_{r+1}-x^{m-2}M_{r+2})=A_{r+1}x^{m-2}\varphi(x),\\
&-(x^{m-}M^2{}_{r+2}-x^{m-3}M_{r+3})=A_{r+2}x^{m-3}\varphi(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&-(xM_{r+m-1}-M_{r+m})=A_{r+m-1}\varphi(x).
\end{aligned}$$

On tire de (27) des équations analogues en N.

Effectuant l'addition, il vient :

$$\left.\begin{aligned}-(x^m M_r - M_{r+m}) &= (A_r x^{m-1} + A_{r+1} x^{m-2} + \ldots + A_{r+m-1})\varphi(x) \\ x^m N_r - N_{r+m} &= (A_r x^{m-1} + A_{r+1} x^{m-2} + \ldots + A_{r+m-1}\end{aligned}\right\}(28)$$

Soit, par exemple, $r = 0$; $m = 2n - 1$, on aura :

$$\left.\begin{aligned}(x^{2n-1}M_0 - M_{2n-1}) &= (A_0 x^{2n-2} + A_1 x^{2n-3} + A_2 x^{2n-4} + \ldots + A_{2n-2})\varphi(x) \\ x^{2n-1}N_0 - N_{2n-1} &= (A_0 x^{2n-2} + A_1 x^{2n-3} + A_2 x^{2n-4} + \ldots + A_{2n-2}) f(x)\end{aligned}\right\}(29)$$

Ensuite, les équations (27) donnent :

$$-(xM_r - M_{r+1}) = A_r\varphi(x) \; ; \; -(xM_{r+1} - M_{r+2}) = A_{r+1}\varphi(x) \; ;$$

et de même pour N_r; l'on en tire :

$$\left.\begin{aligned}A_{r+1}xM_r - (A_{r+1} + A_r x)M_{r+1} + A_r M_{r+2} &= 0, \\ A_{r+1}xN_r - (A_{r+1} + A_r x)N_{r+1} + A_r N_{r+2} &= 0.\end{aligned}\right\}(30)$$

Enfin, comme $M_r f(x) + N_r\varphi(x) = Lx^r$; $M_s f(x) + N_s\varphi(x) = = Lx^s$, on a :

$$M_r N_s - M_s N_r = \frac{L}{f(x)}(x^r N_s - x^s N_r) = \frac{L}{\varphi(x)}(x^r M_s - x^s M_r) \; ; \quad (31)$$

d'où, de (27), (28), (29), l'on déduit :

$$M_{r+1}N_s - M_r N_{s+1} = LA_r x_r \; ; \quad (32)$$

$$\left.\begin{aligned}M_{r+m}N_r - M_r N_{r+m} = L(A_r x^{r+m-1} + A_{r+1} x^{r+m-2} + \ldots \\ \ldots + A_{r+m-1} x^r) \; ;\end{aligned}\right\}(33)$$

$$M_{2n-1}N_0 - M_0 N_{2n-1} = L(A_0 x^{2n-2} + A_1 x^{2n-3} + \ldots + A_{2n-2}). \quad (34)$$

XI.

Ayant calculé les expressions de la forme $a_r b_s - a_s b_r$, il est facile de trouver par des additions successives les expressions m_r ou les coefficients $\sigma_{r,s}$; les expressions $a_r b_s - a_s b_r$, s et r étant des nombres de la suite $0, 1, 2 \ldots n$, sont au nombre de $\frac{n(n+1)}{2}$.

En effet, on tire des équations (1) :

$$m_{r-1} - xm_r = a_r\varphi(x) - b_r f(x) \; ; \quad (35)$$

faisant $r = 0$ et $r = n$, et rejetant les expressions m_{-1}, m_n, il vient :

$$-xm_0 = a_0\varphi(x) - b_0 f(x) \; ; \quad (36)$$

Posons pour abréger $(a_r b_s) = a_r b_s - a_s b_r$, et soit :

$$(a_{n-1}b_0) + (a_{n-1}b_1)x + (a_{n-1}b_2)x^2 \ldots + (a_{n-1}b_{n-2})x^{n-2} = u_{n-2}$$
$$(a_{n-2}b_0) + (a_{n-2}b_1)x + (a_{n-2}b_2)x^2 \ldots + (a_{n-2}b_{n-3})x^{n-3} = u_{n-3}$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$(a_2b_0) + (a_2b_1)x = u_1$$
$$(a_1b_0) = u_0;$$

soit ensuite

$$\mu_r = \alpha_{0,r} + \alpha_{1,r}x + \alpha_{2,r}x^2 \ldots + \alpha_{r,r}x^r,$$

et désignons par $[x\mu_r]$ le produit $x\mu_r$, les deux derniers termes étant omis, on aura, d'après (1) :

$$\mu_{n-1} = m_{n-1} = (a_nb_0) + (a_nb_1)x + (a_nb_2)x^2 + \ldots + (a_nb_{n-1})x^{n-1}$$
$$\mu_{n-2} = [x\mu_{n-1}] + u_{n-2}$$
$$\mu_{n-3} = [x\mu_{n-2}] + u_{n-3}$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\mu = [x\mu_n] + u_1$$
$$\mu_0 = u_0;$$

ayant trouvé de cette manière μ_{n-1}, μ_{n-2}, on aura de suite les expressions mêmes m_{n-1}, $m_{n-2} \ldots m$; les termes manquants étant suppléés par la formule $\alpha_{r,s} = \alpha_{s,r}$.

En substituant dans la formule (35) les expressions m_r, m_{r-1}, $f(x)$ et $\varphi(x)$, et comparant les puissances de x, il vient :

$$\alpha_{r-1,s} - \alpha_{r,s-1} = (a_r b_s)\,; \tag{37}$$

dans cette formule, si l'on fait $r = n$ ou $r = 0$, le terme $\alpha_{r,s-1}$ ou $\alpha_{r-1,s}$ doit être omis.

Combinant avec la formule (35) les deux autres où r est augmenté d'une unité et ensuite de deux unités, et éliminant $f(x)$ et $\varphi(x)$ entre les trois équations, il vient :

$$\left.\begin{aligned} 0 = (a_{r+1}b_{r+2})(m_{r-1} - xm_r) + (a_{r+2}b_r)(m_r - xm_{r+1}) + \\ + (a_r b_{r+1})(m_{r+1} - xm_{r+2}) \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

dans cette formule, si $r=0$, $r=n-2$, les termes multipliés par m_{-1}, m_n doivent être rejetés.

XII.

Outre la relation $\alpha_{r,s}=\alpha_{s,r}$, il doit y avoir encore d'autres relations entre ces quantités, car ces quantités $\alpha_{r,s}$ sont au nombre de n^2 ou au nombre de $\frac{n(n+1)}{2}$ si nous considérons $\alpha_{r,s}$ et $\alpha_{s,r}$ comme les mêmes, et toutes dépendent seulement des $2n+2$ quantités a_r, b_r. Les nombres de ces quantités doivent ainsi être diminués de *trois*; car les binomes $a_r b_s - a_s b_r$, et aussi les quantités $\alpha_{r,s}$ qui en dépendent, ne changent pas en remplaçant a_r, b_r par $\gamma a_r + \varepsilon b_r$, $\gamma' a_r + \varepsilon' b_r$; γ, ε, γ', ε' désignant des quantités arbitraires entre lesquelles existe la relation $\gamma\varepsilon' - \gamma'\varepsilon = 1$. On voit que trois des quantités a_r, b_r peuvent être prises arbitrairement; aussi les coefficients $\alpha_{r,s}=\alpha_{s,r}$ au nombre de $\frac{n^2+n}{2}$ dépendent seulement $2n-1$ quantités; ainsi il y a entre les quantités $\alpha_{r,s}=\alpha_{s,r}$ des relations au nombre de :

$$\frac{n^2+n}{2}-2n+1=\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Un théorème trouvé ci-dessus tient en quelque sorte lieu de ces relations, savoir que $A_{r,s}=A_{r+s}$, et les termes en $A_{r,s}$ sont formés, d'une certaine manière, des quantités $\alpha_{r,s}$; car toutes ces quantités sont en même nombre que les quantités $\alpha_{r,s}$ et dépendent aussi de $2n-1$ quantités; mais on peut établir des relations encore plus simples entre les quantités $\alpha_{r,s}$ que celles qui sont données par ce théorème.

Omettant certains théorèmes ou connus ou que nous avons démontrés ailleurs (voir *Mémoire sur deux fonctions homogènes quelconques*, t. XII), désignons par le type

$$\alpha \left\{ \begin{matrix} r_0 r_1 r_2 \dots r_m \\ s_0 s_1 s_2 \dots s_m \end{matrix} \right\}$$

l'agrégation de $1.2.3...m$ termes, que nous avons désignée ci-dessus § III, par le type

$$\Sigma \pm \alpha_{r_0, s_0} \alpha_{r_1, s_1} \alpha_{r_2, s_2} \dots \alpha_{r_m, s_m};$$

ainsi, d'après le § IV, on a :

$$L = \alpha \left\{ \begin{matrix} 0\,1\,2 \dots n-1 \\ 0\,1\,2 \dots n-1 \end{matrix} \right\}.$$

Si dans cette expression de L on rejette dans les indices supérieurs $0, 1, 2 \dots n$, et s dans les indices inférieurs, on obtient l'expression $A_{r,s}$ (*voir* équations 6).

Le signe de cette expression est déterminé en ce que $\alpha_{r,s} A_{r,s}$ doit faire partie de L; on aura réciproquement (*voir* les équations 12 et 13) :

$$L^{n-1} = A \left\{ \begin{matrix} 0\,1\,2 \dots n-1 \\ 0\,1\,2 \dots n-1 \end{matrix} \right\};$$

dans cette expression, si on rejette r dans les indices supérieurs, et s dans les indices inférieurs, il vient :

$$L^{n-2} \alpha_{r,s};$$

mais si on rejette r, r' dans les indices supérieurs, et s, s' dans les indices inférieurs, on obtient :

$$L^{n-3} \alpha \left\{ \begin{matrix} rr' \\ ss' \end{matrix} \right\},$$

et généralement si dans l'expression

$$A \left\{ \begin{matrix} 0\,1\,2 \dots n-1 \\ 0\,1\,2 \dots n-1 \end{matrix} \right\}$$

on omet $r, r' \dots r^{(m-1)}$ dans les indices supérieurs, et $s, s' \dots s^{(m-1)}$ dans les indices inférieurs, on obtient :

$$L^{n-(m+1)} \alpha \left\{ \begin{matrix} rr' \dots r^{m-1} \\ ss' \dots s^{m-1} \end{matrix} \right\}.$$

Soient donc $r, r' \ldots r^{n-1}$ et $s, s' \ldots s^{(n-1)}$, tous les nombres 0, 1, 2... $n-1$, écrits dans un ordre quelconque, on aura :

$$A\left\{\begin{matrix} r^{(m)}, r^{(m+1)} \ldots r^{(n-1)} \\ s^{(m)}, s^{(m+1)} \ldots s^{(n-1)} \end{matrix}\right\} = L^{n-(m+1)}\alpha \left\{\begin{matrix} r, r' \ldots r^{(m-1)} \\ s, s' \ldots s^{(m-1)} \end{matrix}\right\}; \quad (39)$$

les expressions de cette forme

$$\alpha \left\{\begin{matrix} r, r' \ldots r^{(m)} \\ s, s' \ldots s^{(m)} \end{matrix}\right\}, \quad A \left\{\begin{matrix} r, r' \ldots r^{(m)} \\ s, s' \ldots s^{(m)} \end{matrix}\right\}$$

restent les mêmes; les deux systèmes d'indices, supérieur et inférieur, s'échangent entre eux, car $\alpha_{r,s} = \alpha_{s,r}$ et $A_{r,s} = A_{s,r}$. Ensuite comme $A_{r,s}$ ne change pas, un indice étant augmenté et l'autre diminué d'une unité, il s'ensuit que l'expression

$$A \left\{\begin{matrix} r^{(m)}, r^{(m+1)} \ldots r^{(m-1)} \\ s^{(m)}, s^{(m+1)} \ldots s^{(m-1)} \end{matrix}\right\}$$

ne changera pas si tous les indices d'un système étant augmentés d'une unité, ceux de l'autre système sont chacun diminués d'une unité; et pour que cette propriété puisse subsister, il faut que l'indice le plus élevé soit au-dessous de $n-1$, et l'indice le moins élevé au-dessus de 0; d'où *vice versa*, dans l'expression

$$\alpha \left\{\begin{matrix} rr' \ldots r^{(m-1)} \\ ss' \ldots s^{(m-1)} \end{matrix}\right\},$$

dans un des systèmes, doit se trouver l'indice $n-1$, et dans l'autre 0.

On conclut donc de (39) : si l'expression

$$\alpha \left\{\begin{matrix} rr' \ldots r^{(m-1)} \\ ss' \ldots s^{(m-1)} \end{matrix}\right\}$$

renferme dans l'un des systèmes l'indice $n-1$ et dans l'autre 0, elle ne change pas en augmentant d'une unité tous les indices d'un système, et diminuant d'une unité les indices de l'autre système; dans ce cas, $n-1$ augmenté devient 0, et 0 diminué devient $n-1$; on peut représenter cette propriété des coefficients $\alpha_{r,s}$ par cette équation :

$$\pm\alpha\begin{Bmatrix} r', r'' \ldots r^{(m-1)}, n-1 \\ s', s'' \ldots s^{(m-1)}, 0 \end{Bmatrix} = \alpha\begin{Bmatrix} r'+1, r''+1, r^{(m-1)}, 0 \\ s'+1, s''+1, s^{(m-1)}, n-1 \end{Bmatrix}. \quad (40)$$

Pour déterminer le signe, il faut observer que l'équation (40) doit devenir identique entre les quantités $a_r b_s$ au moyen de la formule (37); ainsi, si les termes de l'expression (40) sont :

$$+\alpha_{r',s'}\alpha_{r'',s''}\ldots\alpha_{r^{(m-1)},s^{(m-1)}}\alpha_{n-1,0},$$

$$+\alpha_{r'+1,s'-1}\alpha_{r''+1,s''-1}\ldots\alpha_{r^{(m-1)}+1,s^{(m-1)}+1}\alpha_{0,n-1},$$

on en conjecture facilement qu'il faut prendre le signe $+$ si $m-1$ est pair, et le signe $-$ lorsque $m-1$ est impair.

Si $m=2$, il suit de la formule générale (40) :

$$\alpha_{n-1,0}\alpha_{r,s}-\alpha_{n-1,s}\alpha_{r,0}=\alpha_0\alpha_{r+1,s-1}-\alpha_{0,s-1}\alpha_{r+1,n-1}; \quad (41)$$

ce qu'on vérifie facilement par la substitution des valeurs :

$$\alpha_{n-1,r}=\alpha_{r,n-1}=(a_n b_r)$$
$$\alpha_{0,r}=\alpha_{r,0}=-(a_0 b_{r+1})$$
$$\alpha_{r,s}=\alpha_{r+1,s-1}=(a_{r+1}b_s);$$

ces substitutions faites, l'équation (41) devient :

$$(a_n b_0)(a_{r+1}b_s)+(a_n b_s)(a_0 b_{r+1})=(a_0 b_s)(a_n b_{r+1}). \quad (42)$$

Ces trois produits étant développés, donnent une identité.

(*La suite prochainement.*)