Théorème arithmologique de M. Steiner, démontré par M. Jacobi

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 268-269
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__268_0>

THÉORÈME ARITHMOLOGIQUE DE M. STEINER,
démontré par M. Jacobi (Crelle, t. XIV, p. 64, 1835).

—

Théorème. p est un nombre premier ; a_1, $a_2 \ldots a_4$ sont n nombres non divisibles par p et laissant n résidus *différents* ; la somme des combinaisons avec répétition de la classe $p-r$ de ces n éléments est divisible par p lorsque $r > 1$ et $< n-1$.

Démonstration. Soit
$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\ldots(a_1 - a_n) = A_1,$$
$$(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)\ldots(a_2 - a_n) = A_2,$$
$$\vdots$$
$$(a_n - a_1)(a_n - a_2)\ldots(a_n - a_{n-1}) = A_n.$$

Ainsi A_1, $A_2 \ldots A_n$ ne sont pas divisibles par p.

Si l'on pose

$$\frac{1}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)} = \frac{P}{x^n} + \frac{P'}{x^{n-1}} + \frac{P''}{x^{n-2}} + \ldots,$$

on sait que $P^{(m)}$ est la somme des combinaisons avec répétition de la classe m des n *éléments*, a_1, $a_2 \ldots a_n$.

On a aussi l'expression connue

$$P^{(m)} = \frac{a_1^{n+m-1}}{A_1} + \frac{a_2^{n+m-1}}{A_2} + \ldots \frac{a_n^{n+m-1}}{A_n},$$

et lorsque $k = 0$ ou $< n-1$, on a :

$$\frac{a_1^k}{A_1} + \frac{a_2^k}{A_2} + \frac{a_3^k}{A_3} + \ldots \frac{a_n^k}{A_n} = 0.$$

Faisons $n+m-1 = k+\beta(p-1)$, ou $m = k+\beta(p-1)-(n-1)$, ou $m < \beta(p-1)$; alors, d'après le théorème de Fermat,

$$a_1^{n+m-1},\ a_2^{n+m-2} \ldots a_n^{n+m-1},$$

divisés par p, laissent les mêmes résidus que

$$a_1^k,\ a_2^k \ldots\ldots a_n^k\,;$$

donc le produit $A_1A_2 \ldots\ldots A_n P^{(m)}$ laisse le même résidu que

$$A_1A_2 \ldots\ldots A_n\left(\frac{a_1^k}{A_1}+\frac{a_2^k}{A_2}+\ldots\ldots+\frac{a_n^k}{A_n}\right).$$

Or ce produit est nul ; donc $P^{(m)}$ est divisible par p. Posons $\beta=1$, et faisant k successivement égal à $0, 1, 2, 3 \ldots\ldots n-2$, on a le théorème énoncé ; en prenant pour β un nombre entier positif quelconque, on a un énoncé plus général.