

**Théorème arithmologique de M. Steiner,  
démontré par M. Jacobi**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 7  
(1848), p. 268-269

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1848\\_1\\_7\\_\\_268\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__268_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1848, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**THÉORÈME ARITHMOLOGIQUE DE M. STEINER,**  
*démontré par M. Jacobi (Crelle, t. XIV, p. 64, 1835).*

*Théorème.*  $p$  est un nombre premier ;  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sont  $n$  nombres non divisibles par  $p$  et laissant  $n$  résidus *différents* ; la somme des combinaisons avec répétition de la classe  $p - r$  de ces  $n$  éléments est divisible par  $p$  lorsque  $r > 1$  et  $< n - 1$ .

*Démonstration.* Soit  $(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_n) = A_1,$   
 $(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \dots (a_2 - a_n) = A_2,$   
 $\vdots$   
 $(a_n - a_1)(a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1}) = A_n.$

Ainsi  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ne sont pas divisibles par  $p$ .

Si l'on pose

$$\frac{1}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)} = \frac{P}{x^n} + \frac{P'}{x^{n-1}} + \frac{P''}{x^{n-2}} + \dots,$$

on sait que  $P^{(m)}$  est la somme des combinaisons avec répétition de la classe  $m$  des  $n$  éléments,  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

On a aussi l'expression connue

$$P^{(m)} = \frac{a_1^{n+m-1}}{A_1} + \frac{a_2^{n+m-1}}{A_2} + \dots + \frac{a_n^{n+m-1}}{A_n},$$

et lorsque  $k = 0$  ou  $< n - 1$ , on a :

$$\frac{a_1^k}{A_1} + \frac{a_2^k}{A_2} + \frac{a_3^k}{A_3} + \dots + \frac{a_n^k}{A_n} = 0.$$

Faisons  $n+m-1 = k + \beta(p-1)$ , ou  $m = k + \beta(p-1) - (n-1)$ ,  
 ou  $m < \beta(p-1)$  ; alors, d'après le théorème de Fermat,

$$a_1^{n+m-1}, a_2^{n+m-1}, \dots, a_n^{n+m-1},$$

divisés par  $p$ , laissent les mêmes résidus que

$$a_1^k, a_2^k \dots a_n^k;$$

donc le produit  $A_1 A_2 \dots A_n P^{(m)}$  laisse le même résidu que

$$A_1 A_2 \dots A_n \left( \frac{a_1^k}{A_1} + \frac{a_2^k}{A_2} + \dots + \frac{a_n^k}{A_n} \right).$$

Or ce produit est nul ; donc  $P^{(m)}$  est divisible par  $p$ . Posons  $\beta = 1$ , et faisant  $k$  successivement égal à  $0, 1, 2, 3 \dots n - 2$ , on a le théorème énoncé ; en prenant pour  $\beta$  un nombre entier positif quelconque, on a un énoncé plus général.

---