

Formules de Delambre et analogies de Néper, déduites immédiatement des formules fondamentales de la trigonométrie sphérique, d'après M. Crelle

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 7 (1848), p. 232-233

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__232_2

© Nouvelles annales de mathématiques, 1848, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FORMULES DE DELAMBRE

et analogies de Néper, déduites immédiatement des formules fondamentales de la trigonométrie sphérique, d'après M. Crelle. (Crelle, XII, 348, 1834, en français.)

$$\begin{array}{l}
 1. \cos B \cos C = \cos a \sin B \sin C - \cos A \quad (1) \\
 \cos b \cos c = \cos a - \cos A \sin b \sin c \quad (2) \\
 \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \quad (3)
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Équations fonda-} \\ \text{mentales.} \end{array}$$

L'équation (3) donne :

$$\sin B \sin C (1 + \cos a)(1 - \cos a) = \sin b \sin c (1 + \cos A)(1 - \cos A) \dots (4)$$

de là, on déduit :

$$\begin{aligned} & [1 - \cos A + \sin B \sin C (1 + \cos a)] (1 - \cos a) = \\ & = [1 - \cos a + \sin b \sin c (1 + \cos A)] (1 - \cos A), \end{aligned}$$

ou bien, en vertu de l'équation (1),

$$\begin{aligned} & [1 + \cos(B - C)] (1 - \cos a) = [1 - \cos(b + c)] (1 - \cos a) \\ & 4 \cos^2 \frac{1}{2} (B - C) \sin^2 \frac{1}{2} a = 4 \sin^2 \frac{1}{2} (b + c) \sin^2 \frac{1}{2} A \\ & \pm \cos \frac{1}{2} (B - C) \sin \frac{1}{2} a = \sin \frac{1}{2} (b + c) \sin \frac{1}{2} A. \quad (5) \end{aligned}$$

C'est la première équation de Delambre.

L'équation (4) donne encore

$$\begin{aligned} & [1 + \cos A + \sin B \sin C (1 - \cos a)] (1 + \cos a) = \\ & = [1 + \cos a + \sin b \sin c (1 - \cos A)] (1 + \cos A); \end{aligned}$$

on en déduit, combinée avec l'équation (1),

$$\pm \sin \frac{1}{2} (B + C) \cos \frac{1}{2} a = \cos \frac{1}{2} (b - c) \cos \frac{1}{2} A, \quad (6)$$

seconde équation de Delambre, et les deux autres sont

$$\pm \sin \frac{1}{2} (B - C) \sin \frac{1}{2} a = \sin \frac{1}{2} (b - c) \cos \frac{1}{2} A \quad (7)$$

$$\pm \cos \frac{1}{2} (B + C) \cos \frac{1}{2} a = \cos \frac{1}{2} (b + c) \sin \frac{1}{2} A. \quad (8)$$

(7) et (8) se déduisent de

$$\begin{aligned} & [1 + \cos A - \sin B \sin C (1 + \cos a)] (1 - \cos a) = \\ & = [1 - \cos a - \sin b \sin c (1 - \cos A)] (1 + \cos A) \\ & [1 - \cos A - \sin B \sin C (1 - \cos a)] (1 + \cos a) = \\ & = [1 + \cos a - \sin b \sin c (1 + \cos A)] (1 - \cos A). \end{aligned}$$

En divisant (7) par (5), (5) par (8), (7) par (8) et (6) par (8), on obtient les analogies de Néper.

Observation. Les formules 5, 6, 7, 8 portent le nom de Gauss en Allemagne, mais elles ont été données par Delambre, dans la *Connaissance des temps*, 1809, publiée en 1807.