PAUL SERRET

Note sur un théorème de la théorie des propriétés projectives de M. Poncelet

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 196-199

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__196_1>

NOTE

sur un théorème de la théorie des propriétés projectives de M. Poncelet,

PAR M. PAUL SERRET.

—

1. Le théorème dont il s'agit est le suivant :

Théorème. Si deux des côtés AB, AC d'un triangle ABC inscrit à une conique, pivotent constamment autour des points fixes P, P′, le troisième côté BC enveloppera une conique doublement tangente à la proposée, suivant la droite PP′ des pivots.

Remarquons d'abord que ce théorème est fondamental dans l'ouvrage de M. Poncelet, en ce sens qu'il sert de base aux belles propositions de l'auteur sur l'enveloppe du côté libre d'un polygone inscrit, dont les autres côtés pivotent autour de points donnés, etc., et à son théorème si remarquable sur les polygones à la fois inscrits à une conique et circonscrits à une autre.

Cette observation montre donc qu'il n'est pas inutile de démontrer ce théorème pour tous les cas. Or, la démonstration de ce principe qui se trouve dans l'ouvrage ci-dessus ne s'applique qu'au cas où la droite PP' des pivots ne couperait pas la conique (C); car, si la droite PP' coupait la conique (C), on ne pourrait plus projetter la figure de manière que dans la projection la droite PP' fût emportée à l'infini, et la conique (C) remplacée par un cercle, car la conique de projection serait toujours une hyperbole ; mais on pourra toujours, dans ce cas, faire que la droite PP' étant emportée à l'infini dans la projection, la conique (C) soit projetée suivant une hyperbole équilatère, et l'on aura alors dans la projection un triangle *abc*, inscrit dans une hyperbole équilatère et dont les côtés *ab*, *ac* sont respectivement parallèles à des directions données. Si donc nous prouvons que l'enveloppe du troisième côté *bc* dans la projection est une hyperbole ayant les mêmes asymptotes que la première, comme deux hyperboles ayant mêmes asymptotes (et d'ailleurs conjuguées ou non conjuguées) se projettent toujours suivant deux coniques ayant un double contact réel suivant la droite projection de celle à l'infini du premier plan, le théorème actuel sur l'enveloppe du côté BC dans la figure primitive sera démontré.

Démontrons donc la proposition auxiliaire dont il s'agit :

(*Fig.* 29.) II. *Théorème.* Un triangle ABC est inscrit dans une hyperbole quelconque; les deux côtés AB, AC sont constamment parallèles à des directions données; le troisième côté BC enveloppera une seconde hyperbole ayant mêmes asymptôtes que la première.

Démonstration. Soient $xy = k^2$ l'équation de la courbe; $A(\alpha, \beta)$ un de ses points, dont l'égalité (1) $\alpha\beta = k^2$; m, n les coefficients angulaires respectifs des côtés AB, AC; x_1, y_1, x_2, y_2 les coordonnées des deux points B, C, on a :

pour l'équation de AB, $y = mx + \beta - m\alpha$;

d'où $$mx^2 + (\beta - m\alpha)x - k^2 = 0,$$

d'où

$$x = \frac{m\alpha - \beta \pm \sqrt{(m\alpha - \beta)^2 + 4m\alpha\beta}}{2m} = \frac{m\alpha - \beta \pm (m\alpha + \beta)}{2m},$$

d'où $$B\left[x_1 = -\frac{\beta}{m};\ y_1 = -m\alpha\right];$$

de même $$C\left[x_2 = -\frac{\beta}{n};\ y_2 = -n\alpha\right].$$

Soient X, Y les coordonnées du point O milieu de la corde BC, on aura :

$$O\left[X = -\frac{m+n}{2mn}\beta;\ Y = -\frac{m+n}{2}\alpha\right],$$

d'où l'on tire :

$$XY = \frac{(m+n)^2}{4mn}\alpha\beta = \frac{(m+n)^2}{4mn}k^2. \qquad (2)$$

Ce qui montre que le lieu des milieux des côtés BC du triangle ABC est une hyperbole, ayant mêmes asymptotes que la proposée; ou, ce qui revient au même, que le côté BC est constamment tangent à cette même hyperbole qui contient son milieu; d'ailleurs, sur la figure comme sur l'équation (2), on peut voir que l'hyperbole enveloppe du côté BC peut être conjuguée ou non conjuguée à l'hyperbole circonscrite au triangle ABC.

Observation I. Le point où le côté BC touche son enveloppe est constamment en son milieu O ; or ce point O s'obtient en construisant un parallélogramme sur les côtés AB, AC, et menant la diagonale du point A, diagonale qui coupe BC au point cherché. Cette remarque permettra, dans la figure primitive, de déterminer à chaque instant le point où le côté libre du triangle touche son enveloppe, et la construction sera exactement la même que celle qui est employée dans le cas où les hyperboles co-asymptotiques sont remplacées par des cercles concentriques.

Observation II. Ce dernier théorème et l'observation précédente indiquent, comme on le voit, deux nouvelles analogies assez remarquables entre le cercle et l'hyperbole équilatère.