JULES LESEURRE

Seconde solution de la question 179

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 177-178

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__177_1>

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 179

(V. p. 75 et 106) (*).

PAR M. JULES LESEURRE,
élève de l'institution Barbet.

Un point est situé à l'extérieur, sur le contour ou à l'intérieur d'une parabole, suivant que les coordonnées satisfont aux relations

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F > 0; \quad A > 0$$
$$= 0$$
$$< 0.$$

(*Fig.* 27.) Cela posé, prenons pour axes deux côtés opposés AB, CD du quadrilatère en question, soit $OA = \alpha$; $OB = \alpha'$;

(*) Voir le lemme, p. 106. Tm.

$OC = \beta$; $OD = \beta'$; $y^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$, l'équation de la parabole passant par ABCD, on a :

$$D = -(\alpha+\alpha') ; \quad F = \alpha\alpha' ; \quad \frac{F}{C} = \beta\beta' ; \quad C = \frac{\alpha\alpha'}{\beta\beta'} ; \quad E = \frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'}(\beta+\beta') ;$$

$$B = \pm 2\sqrt{\frac{\alpha\alpha'}{\beta\beta'}}.$$

Pour la conique passant par le cinquième point $E(\gamma,\delta)$, on a :

$$B'^2 = \left(\frac{\delta^2 + C\gamma^2 + D\delta + E\gamma + F}{\gamma\delta}\right)^2 ;$$

donc les inégalités se réduisent à

$$\left(\frac{\delta^2+C\gamma^2+D\delta+E\gamma+F}{\gamma\delta}\right)^2 - B^2 > 0. \quad \text{On a une hyperbole.}$$

$$= 0. \qquad \text{parabole.}$$

$$< 0. \qquad \text{ellipse.}$$

ou bien

$$(\delta^2 - B\gamma\delta + C\gamma^2 + D\delta + E\gamma + F)\ (\delta^2 + B\gamma\delta + C\gamma^2 + D\delta + E\gamma + F) > 0.$$

$$= 0.$$

$$< 0.$$

Or les deux facteurs du premier membre ne sont autre chose que les polynômes obtenus en substituant à la place de x et y dans les équations des deux paraboles passant par A B C D les coordonnées du point E.

Or, suivant que ces deux facteurs seront, 1° tous deux positifs ou négatifs, 2° l'un nul et l'autre quelconque, 3° l'un positif et l'autre négatif, on aura pour la conique une hyperbole, une parabole ou une ellipse. D'après le principe rappelé ci-dessus, le cinquième point est dans le premier cas à l'intérieur ou à l'extérieur des deux paraboles; dans le deuxième, sur l'une des deux paraboles; dans le troisième, à l'extérieur de l'une et à l'intérieur de l'autre : ce qui démontre le théorème énoncé.