NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LOUIS AOUST

Des courbes sur lesquelles un point pesant, sans vitesse initiale, emploie pour descendre jusqu'au point le plus bas un temps donné par une fonction algébrique de la hauteur

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 137-143

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__137_2>

DES COURBES

sur lesquelles un point pesant, sans vitesse initiale, emploie pour descendre jusqu'au point le plus bas un temps donné par une fonction algébrique de la hauteur.

PAR M. LOUIS AOUST,
docteur ès-sciences, professeur au lycée de Strasbourg.

Ce problème est susceptible d'une solution complète dans le cas le plus général, c'est-à-dire lorsque le temps de la chute du mobile est une fonction quelconque de la hauteur. L'emploi des fonctions eulériennes ou bien des intégrales à indices fractionnaires, permet de trouver l'équation différentielle du premier ordre des courbes jouissant de la propriété énoncée, et dans laquelle les variables sont séparées. Cette équation s'intègre dans le cas où le temps est une fonction algébrique de la hauteur.

Mais, dans ce même cas, la question peut être traitée très-simplement, en s'appuyant seulement sur les principes les plus élémentaires du calcul différentiel et intégral.

I.

Soit t le temps de la chute du point pesant jusqu'au point le plus bas de la courbe; quelle que soit la courbe sur laquelle le point est assujetti à glisser, on aura :

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{ds}{\sqrt{h-x}}. \qquad (1)$$

L'axe des x est placé verticalement et dans une direction contraire à la pesanteur; l'origine des coordonnées est placée au point le plus bas; h représente la hauteur de la chute, g la pesanteur, ds l'élément de l'arc.

Si nous transformons l'équation (1) en posant $\frac{ds}{dx} = \varphi(x)$ et $x = hz$, nous obtiendrons :

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z}} \varphi(hz)\sqrt{h};$$

or t est une fonction algébrique de la hauteur. Nous poserons :

$$t = \mathrm{A}h^{\alpha} + \mathrm{B}h^{\beta} + \mathrm{C}h^{\gamma} + \ldots + \mathrm{M}h^{\mu}.$$

A, B, ... M étant des constantes au nombre de n ; α, β, γ .

μ étant des exposants quelconques positifs, négatifs, fractionnaires, nous aurons donc :

$$Ah^{\alpha} + Bh^{\beta} + \ldots + Mh^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z}} \varphi(hz)\sqrt{h}. \qquad (2)$$

Pour obtenir l'équation différentielle de la courbe cherchée, il suffit de différentier n fois successives l'équation précédente, et d'éliminer les n coefficients A, B, C, ... M entre ces $n+1$ équations (ce qui donne une équation unique sans coefficients constants), et d'égaler à 0 l'expression qui se trouve sous le signe d'intégration. Ce sera l'équation différentielle entre s et x; elle sera de l'ordre n, à coefficients fonctions de x et d'une forme qui en permettra l'intégration. Mais son intégration dépendra de la résolution d'une équation algébrique du degré n, d'une forme particulière et dont on pourra déterminer les racines; le problème sera donc résolu.

On évite les difficultés inhérentes à l'élimination des constantes A, B, ... M et à la résolution de l'équation du degré n, en procédant de la manière suivante.

Posons dans l'équation (2) $\varphi(hz).\sqrt{hz} = V$; différentions par rapport à h, et éliminons une constante A entre la proposée et sa dérivée. Si nous posons :

$$V\alpha - h\frac{dV}{dh} = V_1,$$

nous obtiendrons

$$B(\alpha-\beta)h^{\beta} + C(\alpha-\gamma)h^{\gamma} + \ldots + M(\alpha-\mu)h^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z}\sqrt{1-z}} . V_1.$$

Différentions cette dernière équation, éliminons la constante B entre cette équation et sa dérivée, et posons

$$V_1\beta - h\frac{dV_1}{dh} = V_2,$$

nous aurons :

$$\begin{aligned} &C(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)h^{\gamma}+D(\alpha-\delta)(\beta-\delta)h^{\delta} \\ &+\ldots+M(\alpha-\mu)(\beta-\mu)=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z}\sqrt{1-z}}.V_2. \end{aligned}$$

En continuant toujours de la même manière, on tombera sur une équation débarrassée de toute constante, cette équation est

$$\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z}\sqrt{1-z}}V_n=0, \tag{3}$$

dans laquelle on a posé

$$V_n=V_{n-1}.\mu-h\frac{dV_{n-1}}{dh};$$

or, pour que l'équation (3) soit satisfaite, il faut que V_n soit nul; on a donc l'équation différentielle

$$V_{n-1}.\mu-h\frac{dV_{n-1}}{dh}=0.$$

Si l'on remarque que l'on a posé $x=hz$, et que par conséquent $\frac{dV_{n-1}}{dh}=\frac{dV_{n-1}}{dx}.\frac{dx}{dh}=\frac{dV_{n-1}}{dx}z$, on aura l'équation différentielle de la courbe

$$x\frac{dV_{n-1}}{dx}-\mu V_{n-1}=0. \tag{4}$$

II.

L'équation différentielle (4) que nous venons de trouver est de l'ordre n; nous allons nous occuper de l'intégration de cette équation.

Cette équation étant linéaire, on trouvera pour son intégrale

$$V_{n-1}=M_1x^{\mu},$$

M_1 étant une constante arbitraire.

La fonction V_{n-1} étant déterminée, il est facile de déterminer V_{n-2} ; en effet, on a la relation

$$\frac{dV_{n-2}}{dh}h - \lambda V_{n-2} = V_{n-1},$$

ou bien

$$x\frac{dV_{n-2}}{dx} - \lambda V_{n-2} = M_1 x^{\mu} ;$$

l'intégrale de cette équation est

$$V_{n-2} = L_1 x^{\lambda} + M_1 x^{\mu},$$

L_1 étant une constante introduite par l'intégration.

En continuant de la même manière, on trouverait

$$V_{n-3} = I_1 x^{\iota} + L_1 x^{\lambda} + M_1 x^{\mu},$$

I étant la constante arbitraire ; donc finalement on trouvera

$$V = A_1 x^{\alpha} + B_1 x^{\beta} + \ldots + M_1 x^{\mu},$$

A_1, B_1, ... étant des quantités constantes introduites par l'intégration des équations différentielles successives.

Si l'on remplace V par sa valeur $\sqrt{hz}.\varphi(hz)$ ou bien par $\sqrt{x}\varphi(x)$, on trouve

$$\varphi(x) = \frac{ds}{dx} = A_1 x^{\alpha-\frac{1}{2}} + B_1 x^{\beta-\frac{1}{2}} + C_1 x^{\gamma-\frac{1}{2}} + \ldots + M_1 x^{\mu-\frac{1}{2}};$$

de là

$$s = \frac{A_1}{\alpha+\frac{1}{2}}x^{\alpha+\frac{1}{2}} + \frac{B_1}{\beta+\frac{1}{2}}x^{\beta+\frac{1}{2}} + \ldots + \frac{M_1}{\mu\ \frac{1}{2}}x^{\mu+\frac{1}{2}} + K, \qquad (5)$$

qui est l'équation de la courbe en termes finis entre l'arc et l'abscisse.

III.

Occupons-nous maintenant de la détermination des constantes arbitraires

L'équation (1), dans laquelle on remplace t et ds par leurs valeurs, devient

$$Ah^{\alpha}+Bh^{\beta}+\ldots+Mh^{\mu}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{0}^{h}\left[\frac{A_{1}x^{\alpha-\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{h-x}}+\frac{B_{1}x^{\beta-\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{h-1}}+\ldots+\frac{M_{1}x^{\mu-\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{h-x}}\right];$$

or il est facile de voir que

$$\int_{0}^{h}\frac{A_{1}x^{\alpha-\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{h-1}}=K.A_{1}h^{\alpha},$$

$$\int_{0}^{h}\frac{B_{1}x^{\beta-\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{h-x}}=K_{1}B_{1}h^{\beta},$$

et ainsi de suite; K. K_1 ... étant des quantités connues, on aura donc identiquement :

$$Ah^{\alpha}+Bh^{\beta}+\ldots+Mh^{\mu}=\frac{1}{\sqrt{2g}}[KA_{1}h^{\alpha}+K_{1}B_{1}h^{\beta}+.\text{—}.+K_{1}M_{1}h^{\mu}],$$

et par suite

$$A_{1}=\frac{\sqrt{2g}}{K}.A;\quad B_{1}=\frac{\sqrt{2g}}{K_{1}}B\ldots\quad M_{1}=\frac{\sqrt{2g}}{K_{\mu}}M;$$

ainsi les constantes arbitraires A_1, B_1 ... M_1 seront tout à fait déterminées.

Il sera donc facile de calculer ces constantes dans chaque cas particulier.

IV.

Si tous les exposants α, β, γ... μ étaient entiers et positifs, on arriverait encore plus simplement à l'équation différentielle cherchée. Soit μ le plus grand exposant, il suffira de différentier μ fois successives l'équation (2) par rapport à h, et l'on trouvera :

$$\frac{d^\mu t}{dh}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^1\frac{z^{\mu-\frac{1}{2}}dz}{\sqrt{1-z}}.\frac{d^\mu.[\varphi(x).\sqrt{x}]}{dx^\mu}=0;$$

or, pour que cette équation soit satisfaite, il suffit que l'on ait

$$d^{\mu}.\frac{\sqrt{x}.\varphi(x)}{dx^\mu}=0;$$

de là on trouve par l'intégration, les constantes étant convenablement déterminées :

$$\varphi(x)=\frac{ds}{dx}=\mathrm{A}_1 x^{\alpha-\frac{1}{2}}+\mathrm{B}_1 x^{\beta-\frac{1}{2}}+\ldots+\mathrm{M}' x^{\mu-\frac{1}{2}}.$$

V.

Comme vérification de la formule (5), cherchons la courbe tautochrone, c'est-à-dire la courbe sur laquelle un point pesant glissant emploie, pour arriver au point le plus bas, un temps indépendant de la hauteur de la chute; alors il suffit de supposer dans l'expression du temps tous les coefficients nuls, excepté le cofficient A, et la puissance α de h, dans ce terme, égale à 0. La formule (5), dans laquelle on introduirait ces hypothèses, donnerait :

$$s=2\mathrm{A}_1 x^{\frac{1}{2}},$$

ce qui est l'équation de la cycloïde.

Si l'on cherchait la courbe telle que le temps de la chute fût proportielle à la hauteur, on trouverait :

$$s^2=\frac{4}{9}\mathrm{B}_1 x^3.$$

Note. Voir un mémoire de M. Puiseux sur les tautochrones. (Journal de mathématiques, t. IX, p. 409, 1844)

Tm