Nouvelles annales de mathématiques

Terquem

Sur une conique circonscrite à cinq points ou inscrite à un pentagone

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 106-109

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__106_0>

SUR UNE CONIQUE CIRCONSCRITE

à cinq points ou inscrite à un pentagone.

—

I. *Lemme.* Cinq points étant dans un même plan, dont trois points quelconques non en ligne droite, il y en a au moins quatre, sommets d'un quadrilatère convexe.

Démonstration. Prenons quatre points, sommets d'un quadrilatère à angle rentrant; prolongeant dans les deux sens les six droites qui passent par ces points pris deux à deux, l'espace du plan sera partagé : 1° en six régions fermées trilatères; 2° en six régions ouvertes bilatères; 3° en six régions ouvertes trilatères. Faisant la figure, il est facile de se convaincre par intuition que, dans quelqu'une de ces dix-huit régions qu'on place un cinquième point, il formera, avec trois des quatre points donnés, au moins un quadrilatère convexe.

II. *Théorème de Mœbius.* Cinq points étant situés dans un plan dont trois points quelconques sont en ligne droite, il y a au moins quatre points, sommets d'un quadrilatère convexe (lemme I); par ces quatre points passent deux paraboles. Si le cinquième point est situé 1° sur l'une des paraboles, elle est évidemment la conique qui passe par les cinq points; 2° dans l'intérieur ou hors des deux paraboles, la conique passant par les cinq points est une hyperbole; 3° dans l'intérieur d'une parabole et hors de l'autre, la conique est une ellipse.

Demonstration. Soient A, B, C, D, E les cinq points, et A, B, C, D quatre d'entre eux, sommets d'un quadrilatère convexe; prenant O intersection des côtés opposés

AB, CD pour origine des coordonnées, BAO pour axe des x, et DCO pour axe des y, on aura pour équation d'une conique passant par les quatre points :

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0. \qquad (1)$$

Dans cette équation, à l'exception de B, tous les coefficients sont connus. Le quadrilatère étant convexe, A et C sont de même signe ; les deux paraboles qui passent par ces quatre points sont données par la double équation

$$Ay^2 \pm 2\sqrt{AC}\,xy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0. \quad (2)$$

Soient x', y' les coordonnées du cinquième point E et le produit $x'y'$ positif, alors on peut le supprimer comme facteur dans les inégalités. Supposons ce point 1° dans l'intérieur des deux paraboles (2), et sur la conique (1) ; remplaçant x et y par x', y', l'équation (1) s'annule, et l'équation double (2) donne deux résultats *négatifs* (II, p. 112). On a donc par soustraction, les deux inégalités $+2\sqrt{AC} - B < 0$, $-2\sqrt{AC} - B < 0$; la première inégalité donne $B > 2\sqrt{AC}$; donc la conique (1) est une hyperbole. 2° Le point est hors des deux paraboles. Le même raisonnement conduit aux inégalités $+2\sqrt{AC} - B > 0$, $-2\sqrt{AC} - B > 0$; or la seconde inégalité est impossible, à moins que B ne soit négatif ; alors les deux inégalités deviennent $2\sqrt{AC} + B > 0$, $-2\sqrt{AC} + B > 0$; d'où $B > 2\sqrt{AC}$; ce qui donne encore une hyperbole. 3° Le point est hors de la parabole $(+2\sqrt{AC})$ et dans l'intérieur de la parabole $(-2\sqrt{AC})$; on a donc $+2\sqrt{AC} - B > 0$, $-2\sqrt{AC} - B < 0$; donc $2\sqrt{AC} > B$, et la conique (1) est une ellipse. 4° Le point E est dans la parabole $(+2\sqrt{AC})$ et hors de la parabole $(-2\sqrt{AC})$; on a donc $+2\sqrt{AC} - B < 0$, $-2\sqrt{AC} - B > 0$; cette dernière inégalité ne peut subsister qu'avec B négatif ;

mais alors la première inégalité est impossible ; donc ce cas ne peut exister pour $x'y'$ positif. Supposons maintenant le produit $x'y'$ négatif, et repassons par les mêmes hypothèses. En supprimant le facteur $x'y'$, on devra changer le signe de l'inégalité ; ainsi, pour la première hypothèse, on aura $2\sqrt{AC}-B>0$, $-2\sqrt{AC}-B>0$. Cette dernière inégalité est impossible, à moins que B ne soit négatif et que l'on n'ait $B>2\sqrt{AC}$; ce qui caractérise l'hyperbole. La deuxième hypothèse donne $2\sqrt{AC}-B<0$, $-2\sqrt{AC}-B<0$; donc encore $B>2\sqrt{AC}$. L'hypothèse (3) donne $2\sqrt{AC}-B<0$, $-2\sqrt{AC}-B>0$; cas impossible. Enfin l'hypothèse (4) donne $2\sqrt{AC}-B>0$, $-2\sqrt{AC}-B<0$; d'où $2\sqrt{AC}>B$; caractère de l'ellipse. Ainsi le théorème énoncé par M. Moebius (Calcul Barycentrique, p. 382) est démontré.

Remarque. Ce théorème est démontré par une méthode bien plus compliquée, par M. Bruun d'Odessa. (Crelle, XVI, 215. 1835.)

III. On peut aussi trouver l'espèce de la conique par des constructions géométriques. En effet, au moyen de l'hexagramme de Pascal, on peut mener par les cinq points donnés A, B, C, D, E, des tangentes à la courbe non décrite, en se servant de la règle comme instrument. Ayant un pentagone circonscrit, par les *diagonales* de Newton, on obtient cinq diamètres ; mais deux suffisent. Si ces deux diamètres sont parallèles, la conique est une parabole ; s'ils ne sont pas parallèles, leur intersection O est le centre. Joignant le point O au point de rencontre T de deux tangentes passant par A et B et soit I l'intersection de OT et AB ; si I est entre T et O, la conique est une ellipse. Dans toute autre position, la conique est une hyperbole. Si O est entre T et I, les points A et B appartiennent à deux branches différentes, et si T est entre O et I, les deux points A et B sont sur la même branche.

IV. Pour connaître l'espèce de la conique inscrite à un pentagone, il suffit, par les *diagonales* de *Brianchon*, de déterminer les cinq points de contact, et le problème est ramené au précédent.

V. Il suit du théorème de M. Moebius, que si cinq sphères de même diamètre sont posées au hasard sur un plan horizontal, il y a infiniment plus de probabilité que les cinq centres sont sur une même hyperbole que sur une ellipse, et infiniment plus de probabilité pour une ellipse que pour une parabole.

VI. *Problème.* Cinq points matériels parcourent d'un mouvement uniforme donné, différent pour chaque mobile, cinq droites données dans un plan. Quelle est l'espèce de la conique passant par les cinq points au bout d'un temps assigné?

M. Paul Serret nous a adressé une démonstration du même théorème, très-exacte, mais moins directe et plus compliquée. La marche est inverse. On suppose que la conique est une ellipse, et on prouve qu'elle a tous ses points dans l'intérieur d'une parabole et hors de l'autre. Les discussions, d'ailleurs bien faites, sur les positions respectives de diamètres conjugués dans les trois coniques, amènent des longueurs que l'on évite dans la méthode que nous avons suivie (*). Tm.