

C. DROUETS

Question d'examen

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 65-66

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__65_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTION D'EXAMEN (Voir t. IV, p. 648).

PAR M. C. DROUETS,

Elève du collège royal militaire de La Flèche.

D'un point m de la circonférence d'une ellipse, on mène deux cordes $mF'Q$, mFP passant par les foyers; démontrer que la somme $\frac{mF}{F'P} + \frac{mF'}{F'Q}$ est constante (fig. 8).

Je rapporte l'ellipse au foyer de droite F et à l'axe focal; on a alors l'équation polaire :

$$\rho = \frac{P}{1 + e \cos \omega}.$$

Si on la rapportait à l'autre foyer comme pôle et au même axe polaire, on aurait :

$$\rho = \frac{P}{1 - e \cos \omega}.$$

Soient ρ', ω' les coordonnées du point m , et ρ''', ω''' les coordonnées du point P dans le premier système; ρ'', ω'' celles du point m ; ρ^{IV}, ω^{IV} celles du point Q dans le second, on aura :

$$\rho' = \frac{P}{1 + e \cos \omega'}, \quad \rho''' = \frac{P}{1 + e \cos \omega'''}, \quad \rho'' = \frac{P}{1 - e \cos \omega''}, \quad \rho^{IV} = \frac{P}{1 - e \cos \omega^{IV}}.$$

De plus,

$$\omega''' = \omega' + \pi, \quad \text{d'où} \quad \cos \omega''' = -\cos \omega',$$

$$\omega^{IV} = \omega'' + \pi, \quad \text{d'où} \quad \cos \omega^{IV} = -\cos \omega''.$$

On aura donc, eu égard à ces valeurs :

$$\rho' = \frac{P}{1 + e \cos \omega'}, \quad \rho''' = \frac{P}{1 - e \cos \omega'}; \quad \rho'' = \frac{P}{1 - e \cos \omega''}, \quad \rho^{IV} = \frac{P}{1 + e \cos \omega''}.$$

Il faut démontrer que $\frac{\rho'}{\rho'''} + \frac{\rho''}{\rho'''} est constant ; ce qui revient à chercher la valeur de$

$$\frac{1 - e \cos \omega'}{1 + e \cos \omega'} + \frac{1 + e \cos \omega''}{1 - e \cos \omega''}.$$

Or, la relation qui existe entre les deux systèmes est que $\omega' + \omega'' = 2\alpha$; ou bien, en mettant les angles

$$\frac{p(2 + e \cos \omega' - e \cos \omega'')}{(1 + e \cos \omega')(1 - e \cos \omega'')} = 2a,$$

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad b^2 = a^2 - c^2 \quad \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2} = 1 - e^2.$$

Donc $p = a(1 - e^2)$. L'égalité précédente donne $\cos \omega''$ en fonction de $\cos \omega'$,

$$\cos \omega'' = \frac{e^2 \cos \omega' + 2e + \cos \omega'}{e^2 + 2e \cos \omega' + 1}.$$

Puis, substituant cette valeur dans la somme à calculer, et réduisant au même dénominateur, il vient :

$$\frac{2(1 + e^2)(e^2 \cos^2 \omega' + 2e \cos \omega' + 1)}{(1 - e^2)(e^2 \cos^2 \omega' + 2e \cos \omega' + 1)} \quad \text{ou} \quad 2 \frac{1 + e^2}{1 - e^2},$$

valeur constante. On peut vérifier cette valeur pour l'extrémité du grand axe. On a, dans ce cas :

$$\frac{a - c}{a + c} + \frac{a + c}{a - c} = 2 \frac{a^2 + c^2}{a^2 - c^2} = 2 \frac{1 + e^2}{1 - e^2}.$$

On peut aussi résoudre ce problème sans se servir des coordonnées polaires, en observant que les abscisses des points P, Q peuvent se déduire des lignes de la figure et de l'abscisse du point m , au moyen des triangles $mF\mu$, FpP ; $mF'\mu$ et $qF'Q$, qui sont semblables deux à deux. Puis, substituant ces abscisses dans les expressions des rayons vecteurs, savoir :

$$d = a - \frac{cx}{a} \quad \text{pour le foyer } F, \quad d' = a + \frac{cx}{a} \quad \text{pour l'autre } F'.$$