

TERQUEM

**Note sur les équations du premier degré en
nombre plus grand que celui des inconnues
; applications géométriques**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 551-556

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5_551_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE

Sur les équations du premier degré en nombre plus grand que celui des inconnues ; applications géométriques.

PROBLÈME I. Soient n équations entre n inconnues x_1, x_2, \dots, x_n ; représentons par $a_p^{(q)}$ le coefficient de l'inconnue x_p dans l'équation de quantité q ; de sorte que (q) n'est pas ici un indice exponentiel, mais un indice local, désignant le nombre d'accents à mettre sur la lettre ; $c^{(q)}$ est la quantité toute connue placée dans le second membre de l'équation de quantité q . Toutes ces inconnues ont un dénominateur commun que nous désignerons par $[a_1 a_2 \dots a_n]$; cette fonction remarquable, dont nous devons la connaissance à Cramer, nommée *résultante* par Laplace, a reçu, dans ces derniers temps, le nom plus expressif de *déterminante* ou simplement le *déterminant*, parce que dans une foule de circonstances, analytiques et géométriques, cette fonction détermine certaines conditions. Aucun de nos traités classiques n'indique la formation *a priori* de cette fonction qu'on rencontre à chaque instant ; négligence absurde. Aussi aucun de nos élèves ne sait développer ni combinaison ni permutation. Nous avons indiqué cette règle de formation (t. I, p. 127).

PROBLÈME II. On a, comme l'on sait :

$$x_n = \frac{[a_1^{(1)} \dots a_{n-1}^{(n-1)} c^{(n)}]}{[a_1^{(1)} \dots a_n^{(n)}]} ;$$

si x_n doit être nul, il faut que l'on ait $[a_1 \dots a_{n-1} c^{(n)}] = 0$; telle est donc aussi l'équation de condition pour que n équations

tions entre $n-1$ inconnues puissent subsister simultanément.

Si l'on doit avoir à la fois $x_n = x_{n-1} = 0$, il faut qu'on ait :

$$[a_1^{(1)} a_2^{(2)} \dots a_{n-1}^{(n-1)} c_n] = 0 ;$$

$$[a_1^{(1)} a_2^{(2)} \dots a_{n-3}^{(n-3)} \dots a_{n-1}^{(n-1)} c_{n-2}] = 0 ;$$

telles sont donc les deux équations de condition pour que n équations entre $n-2$ inconnues puissent être satisfaites par les mêmes valeurs, et ainsi de suite.

PROBLÈME III. Quelles sont les conditions pour que n droites situées dans un plan, passent par le même point ?

Solution. Soient :

$$a'_1 x_1 + a'_2 x_2 = c' ; \quad a''_1 x_1 + a''_2 x_2 = c_2 ; \dots \quad a^{(n)}_1 x_1 + a^{(n)}_2 x_2 = c_n$$

les n équations des droites ; x_1, x_2 étant les coordonnées courantes, on a n équations entre deux inconnues ; il faut donc $n-2$ équations de condition ; savoir :

$$[a_1^{(1)} \dots a_{n-1}^{(n-1)} c_n] = 0 ; \text{ etc. ;}$$

et dans ces équations les coefficients

$$a_3^{(1)}, a_4^{(1)} \dots a_3^{(2)}, a_4^{(2)}, \text{ etc. ,}$$

étant arbitraires, mais pas nuls, après la formation de la déterminante, on égalera ces coefficients à l'unité.

Exemple : $n = 3$; on a :

$$a'_1 a_2'' c_3 - a'_1 c_2 a_2''' - a_2' a_1'' c_3 + a_2' c_2 a_1''' + c_1 a_1' a_2''' - c_1 a_2'' a_1''' = 0.$$

Lorsque les équations ont cette forme :

$$y = ax + b ; \quad y = a'x + b' ; \quad y = a''x + b'' ,$$

il faut faire $a'_1 = a_1'' = a_1''' = 1$,

$$a_2' = -a ; \quad a_2'' = -a' ; \quad a_2''' = -a'' ; \quad c_1 = b ; \quad c_2 = b' ; \quad c_3 = b'' ,$$

et l'on a pour équation de condition :

$$[ab'] + [a'b''] + [a''b] = 0 \quad \text{ou} \quad [ab'] = ab' - a'b'' , \text{ etc.}$$

PROBLÈME IV. Quelles sont les conditions pour que n droites situées dans l'espace passent par le même point ?

Solution. Soient :

$$a_1'x_1 + a_2'x_2 + a_3'x_3 = c_1; \quad a_1''x_1 + a_2''x_2 + a_3''x_3 = c_1',$$

les équations de la première droite, où x_1, x_2, x_3 , sont les coordonnées courantes, et l'on a encore $2n - 2$ équations analogues pour les $n - 1$ autres droites; ainsi en tout $2n$ équations entre 3 inconnues; ce qui exige $2n - 3$ équations de conditions.

Exemple : $n=2$; on forme la déterminante $[a_1'a_2''a_3'''a_4^{IV}]$, dans laquelle on remplace a_4' par c_1 , a_4'' par c_2 , a_4''' par c_3 , et a_4^{IV} par c_4 , et on égale le résultat, contenant vingt-quatre termes, à zéro.

Ou :

$c_4[a_1'a_2''a_3'''] - c_2[a_1'a_2''a_3^{IV}] + c_3[a_1'a_2'''a_3^{IV}] - c_1[a_1''a_2'''a_3^{IV}] = 0$;
 $[a_1'a_2'a_3''']$ désigne une déterminante, où la première lettre de chaque terme porte un accent, la seconde deux accents, la troisième trois accents, et ainsi des autres.

Observation. Cette équation de condition est aussi celle qui existe lorsque quatre plans passent par le même point.

Observation. On a donné ici l'équation d'une droite dans l'espace, par l'intersection de deux plans rencontrant chacun les axes coordonnés; mais ordinairement chacun de ces plans est parallèle à un des axes; alors plusieurs coefficients deviennent nuls; ainsi l'on a :

$$a_3' = 0; \quad a_3'' = 0, \quad a_2'' = 0; \quad a_2^{IV} = 0;$$

les vingt-quatre termes se réduisant à huit termes, il vient :

$$c_4[-a_1'a_2''a_3'''] + a_2'a_3''a_1'''] - c_3[a_2'a_3''a_1^{IV} - a_2'a_1''a_3^{IV}] + c_2[a_1'a_2'''a_3^{IV} - a_2'a_1'''a_3^{IV}] - c_1[a_1''a_2'''a_3^{IV} - a_3''a_2'''a_1^{IV}] = 0.$$

Si l'on fait $a_1' = a_1'' = a_1''' = a_1^{IV}$, ce qui est permis, alors l'équation de condition devient :

$$c_1[a_1'a_2'' - a_1''a_2'''] + c_2[a_1'a_2^{IV} - a_1''a_2^I] + c_3[a_1'''a_2^{IV} - a_1^{IV}a_2^I] + c_4[a_1'''a_2'' - a_1^{IV}a_2'''] = 0.$$

Exemple : $n=3$; il y a trois équations de condition.

Remarque. Les premiers travaux sur les *déterminants* sont de Vandermonde, et après lui presque tous les grands analystes s'en sont occupés, et M. Cauchy considérablement et à diverses reprises, de nos jours. Il serait instructif de réunir tous les théorèmes *réellement* différents de l'illustre académicien. On lira aussi avec fruit ce que M. Catalan a récemment publié dans les mémoires de l'Académie de Bruxelles. aux propriétés analytiques des déterminants correspondent des théorèmes géométriques de *collinéation*, de droites qui passent par le même point, de plans qui passent par la même droite, et aussi par le même point. En général la géométrie est dans l'analyse et *vice versa*, et c'est dans la science du *nombre* qu'on peut dire avec Jacotot : *Tout est dans tout.*

PROBLÈME V. Si l'on a $n + m$ équations du premier degré entre n inconnues, il faut m équations de condition entre les coefficients, et si elles ne subsistent pas, on ne pourra par aucun système de valeurs des inconnues satisfaire aux équations. Supposons que dans chacune de ces équations on ait fait passer la quantité connue dans le premier membre, prenons n quelconques de ces équations ; elles suffisent, généralement parlant, pour déterminer les n inconnues ; en substituant ces valeurs dans les m équations restantes, on n'obtiendra pas de résultats nuls, résultats qu'on nomme les *erreurs*. Si l'on avait pris un autre système de n équations, on aurait eu d'autres *erreurs*. La question est donc de trouver pour les n inconnues des valeurs telles que la somme des erreurs soit la moindre possible ; et comme l'erreur $-e$ doit être réputée aussi grande que l'erreur $+e$,

il faut s'attacher à ce que la somme d'une fonction symétrique paire des erreurs soit au minimum. Par le calcul des probabilités, on prouve que cette fonction est la somme des carrés; ainsi, considérant les premiers membres comme représentant l'expression analytique des erreurs, on fait la somme des carrés de ces premiers membres et d'après la théorie du maximum; on égale à zéro, les dérivées de cette somme, prises successivement par rapport aux n inconnues; ce qui fournit n équations du premier degré entre ces inconnues, qui déterminent ces inconnues; substituant ces valeurs dans les $n+m$ équations, on obtient $n+m$ résultats, dont la somme des carrés est moindre que si on avait adopté un autre système.

PROBLÈME VI. Mener une droite par trois points donnés.

Solution. Il s'agit de trouver les valeurs de a et de b qui satisfont aux trois équations :

$$ax' - b - y' = 0; \quad ax'' - b - y'' = 0, \quad ax''' - b - y''' = 0;$$

et supposons que l'équation de condition n'existe pas; alors pour avoir la valeur de a et de b , on forme la fonction :

$$(ax' - b - y')^2 + (ax'' - b - y'')^2 + (ax''' - b - y''')^2;$$

et égalant à zéro les dérivés par rapport à a et b , il vient :

$$a(x'^2 + x''^2 + x'''^2) - b(x' + x'' + x''') = x'y' + x''y'' + x'''y''';$$

$$a(x' + x'' + x''') - 3b = y' + y'' + y''';$$

les valeurs de a et b mises dans l'équation

$$y = ax + b,$$

donnent la droite de *moindre erreur*.

Il en est de même, si on voulait trouver un cercle passant par plus de trois points, mais ce problème n'est pas identique, comme on pourrait le croire, avec celui que M. Lionnet a résolu (p. 449).

7. En appliquant la méthode des *moindres carrés* à n équations à n inconnues, on doit trouver les mêmes valeurs que donne la résolution directe. Au système donné, on peut donc substituer *a priori* un autre système de n équations à n inconnues et ayant les mêmes valeurs; ce qui fournit d'intéressantes relations d'identité entre les déterminantes.

8. La méthode des *moindres carrés*, d'une si grande importance en physique expérimentale, a été découverte et publiée pour la première fois par Legendre en 1805.

M. Gauss l'avait trouvée aussi de son côté en 1795.

C'est M. Bienaymé (Jules) qui en a donné le premier une démonstration rigoureuse. (*Savants étrangers*, t. V, p. 513, 1838.)