Nouvelles annales de mathématiques

Guilmin

Solutions arithmétiques des principales questions relatives aux logarithmes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 429-445

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__429_1>

SOLUTIONS ARITHMÉTIQUES

des principales questions relatives aux logarithmes (*).

PAR M. GUILMIN,
Ancien élève de l'École normale.

1. Lemme. *Les puissances successives d'un nombre* A, *plus*

(*) Quoique ces solutions soient connues, j'ai pensé qu'il ne serait pas inutile aux élèves des Cours d'élémentaires, de les trouver réunies dans ce recueil.

grand que 1, *vont en augmentant avec l'exposant*, *et on peut toujours trouver une puissance de* A *plus grande qu'un nombre donné* H, *si grand que soit* H.

Supposons $A = 1 + \alpha$. Les puissances de A forment une progression géométrique,

$$(1+\alpha),\ (1+\alpha)^2,\ (1+\alpha)^3 \ldots\ldots (1+\alpha)^m.$$

Désignons par t, l'un quelconque des termes de cette progression; le terme qui suivra t, sera $t(1+\alpha) = t + t\alpha$; je conclus de là que les termes de la progression, ou bien les puissances de H, vont en croissant. Le premier terme étant plus grand que 1, tous les autres le sont; t étant plus grand que 1, $t\alpha$ est plus grand que α; l'accroissement d'un terme à l'autre est donc plus grand que α. Le premier terme étant $1+\alpha$, le deuxième est plus grand que $(1+\alpha)+\alpha$, ou $1+2\alpha$; le troisième plus grand que $(1+2\alpha)+\alpha$; ou $1+3\alpha$; le quatrième plus grand que $1+4\alpha$; ... le m^{ieme}, c'est-à-dire $(1+\alpha)^m = A^m$ est plus grand que $1+m\alpha$. Si donc on veut avoir A^m ou $(1+\alpha)^m > H$, il suffira de choisir m, tel que l'on ait :

$$1 + m\alpha > H, \text{ ou } m\alpha > H - 1,$$

c'est-à-dire $m > \dfrac{H-1}{\alpha}$; ce qui est toujours possible, puisqu'il y a des nombres entiers plus grands que tout nombre donné.

2. Lemme. *Les puissances d'un nombre* a, *moindre que* 1, *diminuent quand l'exposant augmente*, *et on peut toujours concevoir une puissance* a^m *de* a, *moindre qu'un nombre donné* h, *si petit que soit* h.

Ce nombre h doit être moindre que 1, sans quoi on aurait immédiatement $a < h$. Considérons le nombre A tel que $a \times A = 1$. Ce nombre A est plus grand que 1; car si A était égal à 1, on aurait aussi $a = 1$, ce qui n'est pas. Si A était moindre que 1, c'est-à-dire si on avait $A = 1 - \alpha$, on aurait $a \times A$ ou $1 = a(1 - \alpha) = a - a\alpha$, égalité contradictoire avec l'hypothèse $a < 1$. L'égalité $a \times A$ conduit à celle-ci :

$$a^m \times A^m = 1.$$

En vertu de notre première proposition A^m croît avec m, donc alors a^m doit décroître. Nous voulons trouver une puissance a^m moindre que h. Considérons un nombre H, tel que $h \times H = 1$; le nombre H est plus grand que 1. Nous avons simultanément $a^m = \frac{1}{A^m}$, et $h = \frac{1}{H}$; donc, l'inégalité $a^m < h$, équivaut à celle-ci, $\frac{1}{A^m} < \frac{1}{H}$; on vérifiera cette inégalité en choisissant m, tel que l'on ait $A^m > H$, ce qui est toujours possible, en vertu de notre première proposition, puisque A est un nombre plus grand que 1.

Arrivons maintenant aux logarithmes.

3. *Dans le système des logarithmes vulgaires, il n'y a que les puissances de* 10 *qui aient des logarithmes commensurables.*

Supposons, en effet, qu'un nombre donné A ait un logarithme commensurable $\frac{m}{n}$. Posons l'égalité, $\log A = \frac{m}{n}$; nous en déduisons $n \log A = m$. Mais n et m étant entiers, nous avons $n \log A = \log A^n$; $m = \log 10^m$; notre dernière égalité revient donc à celle-ci $\log A^n = \log 10^m$. Mais d'après la définition même des logarithmes, deux nombres différents ne sauraient avoir le même logarithme dans un système donné ; donc $A^n = 10^m$. D'après cette égalité, A doit avoir les mêmes facteurs premiers 2, 5, que 10. Soit $A = 2^\alpha 5^\beta$; alors $A^m = 2^{\alpha n} 5^{\beta n}$; mais $10^m = 2^m . 5^m$. L'égalité, $A^n = 10^m$, se remplaçant par celle-ci : $2^{\alpha n} 5^{\beta n} = 2^m . 5^m$, on en conclut $\alpha n = m$ et $\beta n = m$, ou $\alpha = \beta$. Par conséquent $A = 2^\alpha 5^\alpha = 10^\alpha$. A

étant une puissance de 10, notre proposition est démontrée.

4. Le même raisonnement s'appliquera pour *trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un nombre donné* A *ait un logarithme commensurable dans un système dont la base est un nombre donné* b.

Posons toujours $\log A = \frac{m}{n}$; d'où $n \log A = m$. Nous avons $n \log A = \log A^n$, et $m = \log b^m$, puisque $\log b = 1$. L'égalité $n \log A = m$ équivaut donc toujours à celle-ci $\log A^n = \log b^m$, d'où l'on conclut $A^n = b^m$. D'après cette dernière égalité, on voit que chaque facteur premier de A doit exister dans b, et réciproquement. Si donc $b = a^\alpha c^\gamma d^\delta$, on doit avoir $A = a^{\alpha'} c^{\gamma'} d^{\delta'}$. De plus à cause de l'égalité $A^n = b^m$, on doit avoir $a^{\alpha' n} c^{\gamma' n} d^{\delta' n} = a^{\alpha m} c^{\gamma m} d^{\delta n}$. Ces deux produits de facteurs premiers ayant même valeur, on doit avoir :

$$\alpha' n = \alpha m, \text{ d'où } \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{m}{n}, \; \gamma' n = \gamma m, \text{ d'où } \frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{m}{n},$$

$$\delta' n = \delta m, \text{ d'où } \frac{\delta'}{\delta} = \frac{m}{n}.$$

On conclut de ces égalités : $\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{\delta'}{\delta}$.

Ainsi donc, pour qu'un nombre donné A *ait un logarithme commensurable dans un système donné, dont la base est un nombre entier* b, *il faut*, 1° *que* A *renferme les mêmes facteurs premiers que* b, *et pas d'autres*; 2° *que les exposants respectifs de ces facteurs premiers dans* A *et dans* b *soient proportionnels entre eux*.

Ces conditions *nécessaires* sont *suffisantes*. En effet, si nous avons simultanément $b = a^\alpha c^\gamma d^\delta$ et $A = a^{\alpha'} c^{\gamma'} d^{\delta'}$, puis $\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{\delta'}{\delta}$, le nombre A aura un logarithme commensu-

rable dans un système ayant pour base b. En effet, élevons b à la puissance α' et A à la puissance α, nous aurons :

$$b^{\alpha'} = a^{\alpha\alpha'} c^{\gamma\alpha'} d^{\delta\alpha'} \quad \text{et} \quad A^{\alpha} = a^{\alpha'\alpha} c^{\gamma'\alpha} d^{\delta'\alpha}.$$

On voit facilement que $b^{\alpha'} = A^{\alpha}$. En effet $\gamma\alpha' = \gamma'\alpha$, en vertu de l'égalité $\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\gamma'}{\gamma}$; puis $\delta\alpha' = \delta'\alpha$, en vertu de l'égalité $\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\delta'}{\delta}$. Puisque $A^{\alpha} = b^{\alpha'}$, $\log A^{\alpha} = \log b^{\alpha'}$, d'où

$$\alpha \log A = \alpha' \log b = \alpha', \text{ et } \log A = \frac{\alpha'}{\alpha};$$

justement le rapport entre l'exposant d'un facteur premier de A, et l'exposant du même facteur premier dans b.

On ferait une démonstration analogue pour le cas où b serait un nombre fractionnaire.

5. Puisque dans notre système, tout nombre qui n'est pas une puissance de 10, n'a pas pour logarithme un nombre commensurable, qu'entend-on par logarithme d'un pareil nombre, *qu'est-ce que le logarithme de* 367 par exemple? C'est ce que je vais essayer d'expliquer.

Considérons la progression géométrique formée par les puissances de la base 10 de notre système de numération, savoir :

(1) $\qquad \dot{\dot{\div}}\ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 \ldots\ldots$

Quel que soit le nombre m *de moyens géométriques que l'on insère entre les termes de cette progression, pris* 2 *à* 2, *il n'arrivera jamais que* 367 *fasse partie de la progression obtenue;* en effet si on insérait le même nombre de moyens entre les termes d'une progression arithmétique, telle que celle-ci :

$$\div\ 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ \ldots\ldots$$

les deux nouvelles progressions obtenues formeraient un système de logarithmes de base 10, dans lequel 367 aurait un logarithme commensurable, s'il était un des termes de la

progression géométrique. D'ailleurs rien de plus simple que de démontrer directement cette proposition (*).

On peut insérer entre les termes de la progression (1), *des moyens géométriques en nombre tel, qu'un nombre donné quelconque* 367 *par exemple, puisse être, sans erreur appréciable, considéré comme égal à un des termes de la nouvelle progression.*

Appelons q la raison de la nouvelle progression, et m le nombre des moyens à insérer. Nous devons avoir $q=\sqrt[m+1]{10}$.

La nouvelle progression sera ainsi composée :

(2) $$1:q:q^2:q^3:q^4\ldots\, q^m\ldots$$

q est plus grand que 1, puisque q^{m+1} doit être égal à 10.

Les termes de la progression (2) croissant indéfiniment à partir de 1 (lemme 1er), nous pouvons regarder 367 comme compris entre deux termes consécutifs de cette progression, que nous désignerons par t et tq. Nous avons $t<367<tq$. Dès lors si nous prouvons qu'on peut insérer des moyens en nombre tel, que la différence entre t et tq soit moindre qu'un nombre donné δ, aussi petit que l'on voudra, nous aurons démontré notre proposition. Car l'erreur commise en regardant 367 comme égal à t, c'est-à-dire la différence $367-t$, sera moindre que δ Or, $tq-t=t(q-1)$. Nous voulons avoir $tq-t$, ou $t(q-1)<\delta$. Si nous déterminons q par la condition que l'on ait $367(q-1)<\delta$, *à fortiori* aura-t-on, $t(q-1)<\delta$, puisque t est moindre que 367; mais on aura $367(q-1)<\delta$, si on a $q-1<\frac{\delta}{367}$, ou bien $q<1+\frac{\delta}{367}$. Mettons, au lieu de q, la valeur égale $\sqrt[m+1]{10}$, nous devons avoir $\sqrt[m+1]{10}<1+\frac{\delta}{367}$.

(*) La raison q de la nouvelle progression est une certaine racine de 10, $q=\sqrt[m+1]{10}$. Supposons $367=q^n$, alors $367=\sqrt[m+1]{10^n}$; d'où $367^{m+1}=10^n$, ce qui exigerait que 367 fût une puissance de 10.

Élevons les deux membres de cette inégalité à la puissance m; il faut et il suffit que m soit tel que l'on ait $10 < \left(1+\frac{\delta}{367}\right)^{m+1}$.

Or on peut toujours choisir m, tel que $\left(1+\frac{\delta}{367}\right)^{m+1}$ soit plus grand que 10 (lemme 1[er]). La dernière inégalité étant vérifiée, toutes les autres le sont.

Le raisonnement précédent peut se faire pour un nombre donné quelconque A, δ étant aussi petit que l'on voudra. Toute la différence consistera dans le plus ou moins grand nombre de moyens à insérer, suivant les grandeurs de A et de δ.

Comme il ne peut être question d'appliquer la théorie des logarithmes qu'à des nombres de grandeurs finies, on peut, *à la limite*, en supposant le nombre m des moyens, extrêmement grand, regarder comme remplies toutes les conditions semblables à la précédente, et tous les nombres plus grands que 1, comme faisant partie d'une progression telle que (2), dépendant d'une progression telle que (1). Il ne saurait résulter de cette supposition aucune erreur appréciable.

6. Si maintenant nous regardons la progression (1), comme faisant partie d'un système de logarithmes, de celui-ci, par exemple,

$$(\alpha) \qquad \begin{array}{l} \because 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 \ldots, \\ \div 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots \end{array}$$

nous pouvons concevoir qu'en même temps qu'on insère entre les termes de la progression géométrique, pris 2 à 2, le nombre m de moyens géométriques, indiqué plus haut, on insère le même nombre de moyens arithmétiques entre les termes de la progression arithmétique. Cela fait, on aura un système de logarithmes plus étendu, dans lequel tous les nombres plus grands que 1 pourront être considérés comme ayant des logarithmes, puisque nous les regarderons comme égaux respectivement aux différents termes de la progression géométrique. *Log.* 367, *est le terme de la progression arithmétique correspondant au terme de la progression géométrique auquel on suppose* 367, *égal à la limite.*

Généralement, étant donné un système quelconque, tel que (α),

$$(\alpha') \qquad \div\!\!\div 1 : b : b^2 : b^3 : b^4 \ldots ,$$
$$\div 0 . 1 . 2 . \ 3 . \ 4 \ldots$$

on lui substitue par la pensée un système plus complet, tel que celui que nous venons d'indiquer. C'est dans ce système complet, dépendant du système donné (α'), qu'on dit que tout nombre a un logarithme (*).

Tout ce que nous venons de démontrer s'étend aux nombres plus petits que 1.

En effet, si on étend le système (α), comme d'habitude, au-dessous de l'unité, on pourra répéter pour un nombre quelconque moindre que 1, pour $\frac{3}{47}$, par exemple, tout ce qui a été dit pour 367. En effet, dans la progression indéfinie

$$\frac{1}{q^n} \ldots : \frac{1}{q^5} : \frac{1}{q^4} : \frac{1}{q^3} : \frac{1}{q^2} : \frac{1}{q} : 1 : q : q^2 : q^3 \ldots$$

(*) Si on veut définir bien rigoureusement log 367, on établira la proposition suivante: supposons qu'on insère un moyen entre les termes, pris 2 à 2, dans les deux progressions (α), puis une autre fois (2^2-1) moyens, puis (2^3-1) moyens, puis (2^4-1) moyens, etc. . . . qu'on prenne chaque fois le terme de la progression géométrique immédiatement inférieur à 367, et le terme correspondant de la progression arithmétique, pour former deux suites. Les nombres de la première qui ne peuvent diminuer, ont pour limite 367, et les nombres de la deuxième qui sont les logarithmes des premiers, sont dans le même cas, et ont une limite qui est le log de 367. Nous laissons à faire la démonstration, aussi simple que tout ce qui précède. Il y a une infinité de manière d'arriver à ces limites. La précédente n'est qu'un cas particulier de celle-ci; au lieu d'insérer 1, 2^2-1, 2^3-1, 2^k-1 moyens, on peut en insérer m, $m\ (2^2-1)$, $m\ (2^3-1)$, ... $m\ (2^k-1)$, m étant un nombre arbitraire fixe, et k croissant indéfiniment; le reste comme précédemment.

$\frac{3}{47}$ est compris entre deux termes consécutifs t et tq, dont la différence $tq - t = t(q - 1)$ peut être rendue moindre que tout nombre donné δ. En effet t étant moindre que 1, il suffira de remplir la condition $q - 1 < \delta$; ce qui est facile, car on a toujours $q = \sqrt[m+1]{10}$.

Ainsi, dans un système quelconque dont la base est un nombre plus grand que 1, tout nombre plus petit ou plus grand que 1 a un logarithme.

On voit facilement que, parmi les nombres moindres que 1, il n'y a que les nombres de la forme $\frac{1}{10^n}$ qui aient les logarithmes commensurables. Supposons en effet qu'un nombre a moindre que 1 ait un logarithme commensurable; ce logarithme ne peut être qu'un nombre négatif $-\frac{m}{n}$. Soit donc posé $\log a = -\frac{m}{n}$; on déduit de là $\log a = -m$; d'où $\log a^n = \log \frac{1}{10^m}$. Par suite $a^n = \frac{1}{10^m}$; donc a doit être une fraction qui, réduite à sa plus simple expression, aura le numérateur 1, soit donc $a = \frac{1}{A}$, A étant entier. L'égalité précédente équivaut à celle-ci : $\frac{1}{A^m} = \frac{1}{10^n}$; qui conduit à $A^m = 10^n$. On a vu qu'alors A devait être une puissance de 10. Soit $A = 10^\alpha$; $a = \frac{1}{10^\alpha}$; ce qu'il fallait prouver.

Pour un autre système de base entière b, on trouverait des conditions analogues à celles que nous avons trouvées.

7. Le logarithme d'un nombre quelconque, 367, qui n'est pas une puissance de 10, est donc une limite dont nous pouvons approcher autant que nous voudrons sans pouvoir l'at-

teindre. Nous ne chercherons donc à obtenir un tel logarithme que par approximation.

Soit donc proposé de trouver, dans notre système, log 367 à $\frac{1}{40}$ près, par exemple. Cela veut dire qu'il faut trouver le plus grand nombre de 40$^{\text{èmes}}$ contenus dans log 367. Soit $\frac{m}{40}$ le nombre cherché ; m est un nombre entier. Nous avons, d'après notre hypothèse,

$$\frac{m}{40} < \log 367 < \frac{m+1}{40};$$

d'où on déduit :

$$m < 40 \log 367 < m + 1.$$

m et $m+1$ étant entiers, nous avons :

$$m = \log 10^m, \qquad m + 1 = \log 10^{m+1}.$$

Nous avons aussi, $40 \log 367 = 367^{40}$. Substituant ces valeurs dans notre inégalité, il vient :

$$\log 10^m < \log 367^{40} < \log 10^{m+1};$$

d'où on conclut :

$$10^m < 367^{40} < 10^{m+1};$$

car les progressions de notre système étant croissantes, les nombres 10^m, 367^{40}, 10^{m+1} ont le même ordre de grandeurs que leurs logarithmes.

On aura donc m en cherchant quelles sont les puissances de 10 qui comprennent entre elles le nombre 367^{40}; il suffit pour cela de former cette puissance, et de compter les chiffres du résultat. Soit k le nombre des chiffres, alors 367^{40} est compris entre 10^{k-1}, le plus petit nombre de k chiffres, et 10^k le plus petit nombre de $k+1$ chiffres. Par suite $m = k - 1$, et le log 367 est $\frac{k-1}{40}$ à $\frac{1}{40}$ près, par défaut, ou $\frac{k}{40}$ à $\frac{1}{40}$ près, par excès.

Remarque. Concevons qu'on insère (40 — 1), moyens entre les termes des progressions (α), pris 2 à 2, $\frac{k-1}{40}$ et $\frac{k}{40}$ seront 2 termes de la nouvelle progression arithmétique correspondant aux termes de la nouvelle progression géométrique qui comprennent entre eux le nombre 367.

Ce raisonnement s'applique évidemment à tout nombre A, quel qu'il soit, entier ou fractionnaire, quelle que soit la fraction $\frac{1}{\delta}$ qui marque l'approximation.

Désignons toujours par k le nombre des chiffres de la partie entière de A^δ. Nous aurons cette proposition

Pour connaître le logarithme d'un nombre quelconque A, *à* $\frac{1}{\delta}$ *près, dans le système vulgaire, il suffit d'élever ce nombre* A *à la puissance* δ, *on compte le nombre* k *des chiffres de la partie entière de* A^δ; *on divise* $k-1$ *et* k *par* δ, *les deux nombres* $\frac{k-1}{\delta}$ *et* $\frac{k}{\delta}$ *comprennent entre eux le logarithme de* A, *et expriment chacun ce logarithme à* $\frac{1}{\delta}$ *près, l'un par défaut, l'autre par excès.*

Ce raisonnement s'applique dans le cas d'une base quelconque, seulement il pourra ne pas être aussi facile de voir entre quelles puissances de la base b sera compris A^δ; il n'y aura similitude complète que dans le cas où la base du système de numération dans lequel serait écrit A coïnciderait avec la base du système de logarithmes.

Nous avons voulu seulement faire concevoir la possibilité d'avoir, par un moyen arithmétique, le logarithme d'un nombre donné, avec une approximation donnée, et non indiquer une méthode véritablement pratique pour résoudre cette question dans tous les cas.

En mettant en usage l'insertion de moyens en nombre $2^k - 1$, comme nous l'avons indiqué en note, précédemment, ce qui revient pour la progression géométrique à des extractions de racines carrées successives, on aura la méthode ordinairement indiquée pour résoudre le problème. Au reste vérifier si un nombre A est compris entre $\sqrt[2k]{B}$ et $\sqrt[2k]{C}$, cela revient à vérifier si A^{2k} est compris entre B et C.

8. Problème. *Passer d'un système à un autre.*

C'est-à-dire, *connaissant les logarithmes de tous les nombres dans un certain système, trouver le logarithme d'un nombre donné quelconque, dans un autre système dont la base* b *est seule donnée.*

Pour qu'un nombre donné ait un logarithme dans chaque système, il faut qu'il fasse partie de la progression géométrique de chacun; nous devons donc regarder à la limite les deux progressions géométriques comme identiques; les deux progressions arithmétiques seules seront différentes.

1^er^ *système* (*donné*)

$$\div\!\div 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 \ldots\ldots \qquad b$$
$$\div\ 0.\ d.\ 2d.\ 3d.\ 4d.\ldots\ldots \qquad \log b.$$

Soit d' la raison de la progression arithmétique de l'autre système; désignons par k le rapport de d' à d; puisque $\frac{d'}{d} = k$, nous avons $d' = dk$, et le 2^e^ système peut s'écrire ainsi :

2^e^ *système* (*base seule connue*)

$$1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : \ldots\ldots \qquad b$$
$$0.kd.2kd.3kd.4kd.\ldots\ldots \qquad 1.$$

Entre les 2 logarithmes d'un même nombre quelconque pris dans les 2 systèmes, il y a un rapport fixe k; le 2^e^ logarithme, le nouveau, est égal au 1er multiplié par k. Nous connaissons $\log b$ dans l'ancien système (le 1er) ; dans le nouveau système, $\log' b = 1$; on doit donc avoir $1 = k \log b$, d'où $k = \dfrac{1}{\log b}$.

On passera donc du logarithme ancien au logarithme nouveau pour un nombre quelconque, en multipliant l'ancien logarithme par le quotient, $\dfrac{1}{\log b}$, de l'unité divisée par le logarithme de la base du nouveau système, étant pris dans l'ancien système.

Propositions accessoires.

9. 1 *et* 0 *sont des termes nécessaires dans les* 2 *progressions de tout système de logarithmes;* 1 *dans la progression géométrique,* 0 *dans l'autre : ces deux termes doivent se correspondre.*

L'utilité des logarithmes réside dans l'application du théorème fondamental et de ses conséquences immédiates; or ce théorème ne peut être vrai, en général, sans que 1 et 0 fassent partie des 2 progressions du système, et s'y correspondent.

En effet pour que ce problème fondamental soit vrai, il est nécessaire, 1° que le produit de deux termes quelconques de la progression géométrique soit un terme de cette progression. 2° Que la somme de deux termes quelconques de la progression arithmétique, soit un terme de cette progression. 3° Que le produit de deux termes quelconques de la première progression et la somme des termes correspondants de la seconde soient deux termes correspondants.

1° Soit a un terme de la progression géométrique et q la raison de cette progression ; les termes qui suivent a sont des termes de la forme aq^n, et ceux qui le précèdent sont des termes de la forme $\dfrac{a}{q^n}$. Multiplions a par le terme suivant aq ;

le produit a^2q devant être un terme de la progression, nous devons avoir $a^2q = aq^n$ ou $a^2q = \frac{a}{q^n}$; dans le premier cas on est conduit à $a^2 = aq^{n-1}$ ou $a = q^{n-1}$, alors en remontant la progression à gauche de $a = q^{n-1}$, on trouvera 1 pour le $(n-1)^{ème}$ terme à gauche. Dans le second cas, on est conduit à cette égalité $a^2 = \frac{a}{q^{n+1}}$. D'où $a = \frac{1}{q^{n+1}}$, alors en avançant à droite de ce terme $\frac{1}{q^{n+1}}$, on trouve que le $(n+1)^{ème}$ terme à droite est l'unité. Dans tous les cas 1 fait partie de la progression géométrique.

2° Soit b un terme de la progression arithmétique, et d la raison; les termes qui suivent b, sont de la forme $b+md$ et les termes qui précèdent sont de la forme $b-md$. Considérons les termes b et $b+d$; leur somme est $2b+d$, on doit avoir $2b+d=b+md$, ou $2b+d=b-md$. Dans le premier cas on est conduit à $2b=b+(m-1)d$, d'où $b=(m-1)d$ alors, en remontant la progression à gauche de d, on trouvera évidemment que le $(m-1)^{ème}$ terme à gauche est d. Dans le deuxième cas, on est conduit à $2b=b-(m+1)d$, d'où $b=-(m+1)d$; alors, en continuant la progression, on trouvera évidemment 0 pour le $(m+1)^{ème}$ terme à droite.

3° En vertu des deux conditions établies comme nécessaires, tous les termes de la progression géométrique sont de la forme q^n et tous ceux de la progression arithmétique ont la forme md. Considérons donc deux termes q et q^2 de la première et soient nd et $(n+1)d$ les termes correspondants de la deuxième. Le produit $q \times q^2 = q^3$ et la somme $nd+(n+1)d=(n+n+1)d$. Ce produit et cette somme doivent se correspondre. Or q^3 suit immédiatement q^2; de $(n+1)d$ à $(n+n+1)d$, il y a n termes, donc n doit être égal à 1. Puisque $nd = d$, q et d se correspondent ; donc 1 et 0 termes placés immédiatement avant q et d se correspondent nécessairement. Nous avons donc établi les trois parties de notre proposition. Il semble que nous ayions choisi des termes particuliers dans les deux progressions. Mais nous n'avions qu'à prouver la nécessité de nos conditions ; le théorème général doit être vrai pour des termes pris à volonté. Nous les avons pris de manière à simplifier le plus possible.

10. Pour terminer, je vais encore traiter une question qui sort des bornes de l'arithmétique, mais dont la démonstration ne m'a pas paru trop difficile pour être mise ici.

Cette question a été traitée par M. Vincent ; je suis arrivé au même résultat que lui, sans avoir connu son travail que je n'ai lu qu'ensuite. Si je laisse néanmoins ma démonstration, c'est qu'elle diffère un peu dans la première partie de celle de M. Vincent.

Lorsqu'on emploie les tables de Callet pour trouver le logarithme d'un nombre donné, ayant plus de 5 chiffres, l'erreur qui résulte de l'emploi de la proportion connue, en supposant exacts les trois premiers termes de cette proportion, est moindre que $\frac{1}{16}$ de l'unité décimale du huitième ordre.

Désignons par N le nombre que forment les cinq premiers chiffres du nombre donné ; on cherche le logarithme de $N+d$, d étant une partie décimale moindre que 1. Désignons encore par δ la différence tabulaire des logarithmes de N et $N+1$. Soit x la différence entre $\log(N+d)$ et $\log N$. La proportion que l'on établit est celle-ci :

$$1 : d :: \delta : x, \quad \text{d'où} \quad x = d\delta.$$

Nous cherchons une limite de l'erreur commise en prenant pour x cette valeur $d\delta$. Pour cela observons que

$$\delta = \log(N+1) - \log N = \log\left(\frac{N+1}{N}\right) = \log\left(1+\frac{1}{N}\right).$$

$$x = \log(N+d) - \log N = \log\left(\frac{N+d}{N}\right) = \log\left(1+\frac{d}{N}\right).$$

L'erreur en question est donc $\log\left(1+\frac{d}{N}\right) - d\delta$.

Mais $d\delta = d\log\left(1+\frac{1}{N}\right) = \log\left(1+\frac{1}{N}\right)^d$. Il faut trouver une limite de $\log\left(1+\frac{d}{N}\right) - \log\left(1+\frac{1}{N}\right)^d$.

En considérant les deux progressions de notre système écrites sous cette forme

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & : & (1+\alpha) & : & (1+\alpha)^2 & : & (1+\alpha)^3 & : & (1+\alpha)^4 \ldots \\ 0 & : & M\alpha & : & 2M\alpha & : & 3M\alpha & : & 4M\alpha. \end{array}$$

On voit que la différence entre deux termes quelconques consécutifs de la première progression est plus grande que α, (lemme 1[er]), tandis que la différence entre deux termes consécutifs de la seconde est $M\alpha$.

Si donc on considère deux nombres quelconques A et B, tels qu'il y ait n termes de A à B, on aura $B - A > n\alpha$, et $\log B - \log A = nM\alpha$; d'où $M(B-A) > \log B - \log A$.

J'aurai donc une limite supérieure de la différence

$$\log\left(1+\frac{d}{N}\right) - \log\left(1+\frac{1}{N}\right)^d,$$

en cherchant une limite de la différence

$$\left(1+\frac{d}{N}\right) - \left(1+\frac{1}{N}\right)^d,$$

et multipliant celle-ci par M. Mais on a :

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^d = 1 + \frac{d}{N} + \frac{d(d-1)}{1.2.N^2} + \ldots.$$

d étant moindre que 1, $d-1$, $d-2$, $d-3$, etc., sont des nombres négatifs; on conclut de là facilement que la différence entre $\left(1+\frac{1}{N}\right)^d$, et $1+\frac{d}{N}$ a pour limite $\frac{d(d-1)}{2N^2}$. Mais d étant moindre que 1, la valeur absolue du numérateur est $d(1-d)$; la somme des valeurs absolues des deux facteurs de ce produit étant 1, ce produit est égal au plus à $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$, donc la limite $\frac{d(1-d)}{2N^2}$ peut être remplacée par celle-ci $\frac{1}{8N^2}$. Si maintenant nous la multiplions par M, nous aurons pour limite supérieure de

$$\log\left(1+\frac{d}{N}\right)-\log\left(1+\frac{1}{N}\right)^d \text{ la quantité } \frac{M}{8N^2}.$$

Mais M est moindre que $\frac{1}{2}$; $\left(\text{car } M=\frac{1}{\text{log. népérien de } 10}\right)$. On aura donc *à fortiori* pour limite $\frac{1}{16N^2}$. Mais N^2 est au moins 10000, donc cette limite peut être remplacée par celle-ci $\frac{1}{16\times10^8}$. Ce qui démontre notre proposition.

La limite $\frac{1}{16N^2}$ décroît indéfiniment quand N augmente.