

DROT

Question du concours d'admission à l'École normale, en 1845

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 358-361

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5_358_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUESTION

du concours d'admission à l'école normale, en 1845.

PAR M. DROT,
bachelier ès sciences.

Problème. Étant donné un cercle O (*fig. 36*) et une droite PP' perpendiculaire au diamètre OH , trouver un point K tel qu'en menant par ce point une sécante quelconque MKM' , et qu'en abaissant des points M et M' , où elle rencontre la circonférence, des perpendiculaires MP et $M'P'$ sur la droite PP' , on ait la relation $\frac{1}{MP} + \frac{1}{M'P'} = \text{constante } k$.

Solution. I. Prenons la droite PP' pour axe des y et la droite OH pour axe des x , H pour origine, et les axes rectangulaires. En posant $OH = d$, et appelant r le rayon du cercle, son équation sera :

$$y^2 + x^2 - 2dx + d^2 - r^2 = 0.$$

Posons la distance inconnue $HK = x'$; la droite MM' sera représentée par l'équation

$$y = m(x - x').$$

Cherchons les abscisses des points où cette droite rencontre le cercle : pour cela, remplaçons y par $mx - mx'$ dans l'équation du cercle ; on aura alors, après avoir ordonné :

$$(1) \quad (m^2 + 1)x^2 - 2(m^2x' + d)x + m^2x'^2 + d^2 - r^2 = 0.$$

Remarquons que les valeurs de x données par cette équation ne sont autres que MP et $M'P'$. Or on doit avoir :

$$\frac{1}{MP} + \frac{1}{M'P'} = k,$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$(2) \quad \frac{MP + M'P'}{MP \times M'P'} = k.$$

$MP + M'P'$ est la somme des racines de l'équation (1), et $MP \times M'P'$ en est le produit ; donc on a :

$$MP + M'P' = \frac{2(m^2x' + d)}{m^2 + 1},$$

$$MP \times M'P' = \frac{m^2x'^2 + d^2 - r^2}{m^2 + 1},$$

et, par suite, l'équation (2) devient :

$$\frac{2(m^2x' + d)}{m^2x'^2 + d^2 - r^2} = k,$$

ou, en chassant le dénominateur et ordonnant par rapport à m ,

$$(3) \quad x'(2 - kx')m^2 + 2d - (d^2 - r^2)k = 0.$$

Cette relation doit avoir lieu quel que soit m ; donc on doit avoir séparément :

$$(4) \quad x'(2 - kx') = 0,$$

$$(5) \quad 2d - (d^2 - r^2)k = 0.$$

L'équation (4) donne pour seule solution convenable :

$$x' = \frac{2}{k};$$

l'équation (5) donne :

$$k = \frac{2d}{d^2 - r^2};$$

donc on a :

$$x' = \frac{d^2 - r^2}{d} = d - \frac{r^2}{d},$$

ce qui montre que le point k est le pôle de la droite PP' .

II. La discussion de la valeur de $OK = d - x' = \frac{r^2}{d}$ montre que : 1° quand la droite PP' est extérieure au cercle, le point K lui est intérieur ; 2° quand la droite PP' est tangente au cercle, le point K devient le point de tangence ; 3° quand la droite PP' coupe le cercle, le point K lui est extérieur.

Note. Soit $Ay^2 + Cx^2 + Ex + F = 0$ l'équation d'une conique rapportée à des axes conjugués quelconques, l'axe des x étant un diamètre ; soient x', y' les coordonnées du pôle de l'axe des y ; on a $x' = -\frac{2F}{E}$; $y' = 0$; l'équation d'une droite passant par ce point est $y = m\left(x + \frac{2F}{E}\right)$; les abscisses x des intersections de cette droite avec la conique sont données par l'équation :

$$E^2x'(Am^2 + C) + Ex(4AFm^2 + E^2) + F(4AFm^2 + E^2) = 0.$$

La somme des racines inverses de cette équation est $-\frac{E}{F}$
quantité constante.

Donc le théorème subsiste pour une conique quelconque.

En prolongeant la droite MM' jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite PP' en N , les quatre points M, K, M', N sont situés harmoniquement, d'après une propriété connue des pôles et polaires; d'où il suit directement que KH est une moyenne harmonique entre PM et $P'M'$. Les quatre points P, H, P', N sont aussi situés harmoniquement. Donc HN est une moyenne harmonique entre PN et $P'N$. Tm.