

HENRI D'ANDRÉ

**Quelques observations relatives à la
figure du carré de l'hypoténuse**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 5
(1846), p. 324-331

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__324_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1846, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

QUELQUES OBSERVATIONS

Relatives à la figure du carré de l'hypoténuse ()*.

PAR M. HENRI D'ANDRÉ,

élève de l'institution Laville.

Si sur les côtés d'un triangle rectangle BIB' (fig. 39) dont l'hypoténuse est égale à $2a$, on construit des carrés, et qu'on vienne à supposer le sommet I mobile sur la circonférence BRB' .

1° Les sommets D et D' sont toujours à égale distance de l'axe Yy élevé sur le milieu de AA' , et les sommets G et G' à même distance de la droite Zz .

Il résulte en effet de l'égalité des trois triangles $B'D'E'$, $B'KI$, $G'IN'$ d'une part, de l'égalité des triangles BDE , BKI , GIN d'une autre part, qu'on a $BE = B'E' = G'N' = GN = IK$.

2° La diagonale commune DD' tourne autour d'un point fixe R , qu'on obtient en prenant sur Yy à partir du point O , une distance égale à $3a$.

Pour le démontrer j'observe que

$$CR = \frac{D'E' + DE}{2} = \frac{B'K + BK}{2} = a.$$

On en déduit comme corollaires immédiats que les points G et G' restent constamment sur une circonférence ayant son centre en R et pour rayon $a\sqrt{2}$, et par suite que les points S

(*) Il y a dans ce travail intéressant des longueurs que nous n'avons pas eu le temps de faire disparaître. Nous y reviendrons. Tm.

et S' parcourent respectivement les deux circonférences décrites sur BR et B'R comme diamètres.

3° Les points D et D' décrivent deux circonférences de rayon a , tangentes en R à l'axe des $Y\gamma$.

Car les lignes AB et DG prolongées déterminent le troisième sommet d'un triangle rectangle égal à BIB'.

4° Si l'on joint DA et D'A', ces lignes se coupent en un point M dont la distance à l'axe $Y\gamma$ est toujours le tiers de la distance du point mobile I à ce même axe : la même propriété a lieu si l'on joint DA' et D'A.

La comparaison successive des triangles semblables A'D'F' et PMA', PMA et ADF donne les deux proportions :

$$\begin{aligned} D'F' : MP &:: A'F' : PA', \\ PM : DF &:: PA : AF; \end{aligned}$$

d'où en les multipliant par ordre et supprimant les facteurs égaux communs aux deux termes de chaque rapport,

$$D'F' : DF :: PA : PA';$$

on en tire

$$D'F' + DF : PA + PA' :: DF - DF : PA - PA';$$

or

$$\begin{aligned} D'F' + DF &= 2OR = 6a, \quad PA + PA' = 2a, \\ D'F' - DF &= B'K - BK = 2CK, \\ PA - PA' &= 2PO. \end{aligned}$$

Donc

$$3a : a :: CK : OP \quad C. Q. F. D$$

S'il s'agissait du point M', on comparerait les triangles semblables

$$A'D'F' \text{ et } AM'P', \quad A'P'M' \text{ et } DA'F'.$$

Remarque. Lorsque le point I parcourt la demi-circonférence inférieure, on reconnaît des propriétés analogues, mais

dont l'énoncé reçoit certaines modifications ; ainsi on peut voir qu'alors la diagonale DD' tourne autour du centre du carré, et que les distances des points M , M' et I à l'axe Yy sont égales entre elles.

5° Trouver 1° le lieu des points M ; 2° des points M' .

Supposons que le point I parcourt la demi-circonférence BRB' ; nous allons tâcher d'abord de découvrir par des considérations *à priori* la forme du lieu cherché.

La courbe est symétrique par rapport à l'axe des Y ; lorsque le point I est en R que l'on peut regarder comme son point de départ, le point M est situé sur la partie négative de l'axe des Y à une distance égale à $3a$; le point I se meut en parcourant le quart de circonférence BR , le point M s'éloigne de l'axe des X , son abscisse étant toujours le tiers de l'abscisse du point I ; enfin lorsque ce dernier point a atteint l'autre extrémité du quadrant, le point M est situé à une distance infinie de l'axe des X ; quant à son abscisse elle est égale à $\frac{a}{3}$; donc si l'on mène une parallèle à l'axe des Y , à cette distance, cette ligne sera asymptote de la courbe ; en répétant la même figure à gauche et observant que la tangente au point où la courbe coupe l'axe des Y est horizontale (car c'est la limite des positions successives d'une corde parallèle à l'axe des X , lorsque ses deux points d'intersection sont venus se réunir en un seul), on aura ébauché suffisamment la forme de la courbe.

Cherchons son équation ; pour cela, soient x' , y' les coordonnées du point I , x et y les coordonnées variables du point M , on aura :

$$(1) \quad (y' - 2a)^2 + x'^2 - a^2 = 0, \quad x' = -3x. \quad (2)$$

Maintenant reportons-nous à l'une des proportions, dont nous nous sommes servis plus haut,

$$AF : AP :: DF : MP,$$

et remplaçons-y ces côtés par leurs valeurs. On a :

$$y' - 2a : a + x :: 3a - x' : y = \frac{(a+x)(3a-x')}{y' - 2a} \quad (3).$$

Éliminant x' et y' entre ces trois équations, on trouvera :

$$y^3(9x^2 - a^2) - 9(x^2 - a^2)^2 = 0,$$

équation du quatrième degré qu'il s'agit de discuter. Cette équation ne renfermant que des puissances paires d' x et d' y , la courbe qu'elle représente est rapportée à son centre comme origine ; par conséquent il suffit de faire croître x et y positivement. Résolvons-là par rapport à y , on trouve :

$$y = \pm \frac{3(a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - 9x^2}},$$

$$x = 0 \dots\dots y = 3a.$$

$$x \text{ augmente} < \frac{a}{3} \dots\dots y \text{ augmente.}$$

$$x = \frac{a}{3} \dots\dots y = \infty.$$

Ce tableau nous montre que la courbe est comprise entre deux parallèles menées à des distances de Yy égales à $\frac{a}{3}$, et qu'elle a ses droites pour asymptotes. Le coefficient angulaire de sa tangente

$$-\frac{9xy^2 + 18x(a^2 - x^2)}{(9x^2 - a^2)y}$$

devient nul pour $x=0$; donc aux points s et s' la tangente est horizontale ; d'ailleurs chacune des branches est constamment convexe vers l'axe des X ; car à cause de la symétrie du lieu , si l'une d'elles était sinueuse , la courbe pourrait être coupée par une ligne droite en plus de quatre points.

En résumant cette discussion , on voit que l'équation nous donne deux branches indéfinies tandis que nous n'a-

vions trouvé dans notre premier aperçu que la branche inférieure. A quoi tient cette anomalie? On peut l'expliquer en remontant aux équations du problème; car la circonférence BRB' et sa symétrique par rapport à l'axe des X ont la même équation; d'un autre côté en vertu de la relation (3), lorsque y change de signe, la quantité $y' - 2a$ change aussi de signe; mais comme elle entre au carré dans l'équation du cercle, l'équation du lieu ne change pas; ainsi par suite de cette particularité de calcul elle se trouve convenir aux points qu'on obtiendrait en effectuant au-dessous de l'axe des X les mêmes constructions qu'au-dessus, quoiqu'elle n'ait pas été formée pour ce cas-là.

La discussion du lieu va confirmer l'exactitude de cette interprétation en nous conduisant à une équation qui dans les mêmes circonstances représentera une courbe non rapportée à son centre.

Nous allons chercher, comme ci-dessus, la forme du lieu en considérant le mouvement du point. Lorsque le point I est en R les droites DA' et D'A' se confondent avec les diagonales du carré, par conséquent la courbe part du centre de ce carré; le point I parcourt le quadrant BR. Le point M' s'élève; mais son abscisse est toujours le tiers de l'abscisse du point I; enfin lorsque ce point est venu en B, l'un des carrés s'est réduit à zéro, l'autre est égal au carré ABA'B'; donc pour avoir le point correspondant il faut mener A'B, prolonger A'B' d'une quantité égale à elle-même, joindre son extrémité avec le point A, et les lignes se couperont au point cherché; son abscisse est égale à $\frac{a}{3}$; il est facile de reconnaître sur la figure que son ordonnée est quadruple de l'abscisse; ce point là est un point limite; par conséquent la parallèle à l'axe des Y menée à une distance $\frac{a}{3}$ sera tangente

à la courbe; j'aurai à gauche une partie parfaitement symétrique; d'ailleurs la tangente au point initial est horizontale, donc elle présente sa convexité aux points L et L'.

Pour déterminer l'équation du lieu nous aurons les relations :

$$(y' - 2a)^2 + x'^2 - a^2 = 0, \quad (1) \quad x' = 3x \quad (2).$$

Et à cause de la similitude des triangles DA'F, M'A'P',

$$y : 3a - x' :: a + x : y',$$

$$y' = \frac{(3a - x')(a + x)}{y}.$$

Et en éliminant x' et y' il viendra :

$$\frac{\{9(a^2 - x^2)^2 - 2ay\}^2}{y^2} + 9x^2 - a^2 = 0,$$

ou bien, en réduisant et ordonnant par rapport à y ,

$$(3x^2 + a^2)y^2 - 4a(a^2 - x^2)y + 3(a^2 - x^2)^2 = 0,$$

$$y = \frac{a^2 - x^2}{3x^2 + a^2} (2a \pm \sqrt{a^2 - 9x^2}).$$

La courbe étant symétrique par rapport à l'axe des X nous ferons croître x positivement depuis zéro jusqu'à $\frac{a}{3}$.

$$x = 0 \dots\dots y_1 = 3a.$$

$$y_2 = a.$$

$$x \text{ augmente } < \frac{a}{3} \dots\dots y, \text{ diminue.}$$

$$y, \text{ incertain.}$$

$$x = \frac{a}{3} \dots\dots y_3 = y_4 = \frac{4a}{3}.$$

La courbe coupe l'axe des Y en deux points à des distances de l'origine égales l'une à a , l'autre à $3a$; de ces points partent deux arcs de courbe qui viennent se réunir en un point L dont l'abscisse est égale à $\frac{a}{3}$, et l'ordonnée à $\frac{4a}{3}$. Même figure à gauche de l'axe des Y.

Le coefficient angulaire de sa tangente est

$$\text{tang } \alpha = - \frac{6xy^2 + 8axy - 12x(a^2 - x^2)}{2(3x^2 + a^2)y - 4a(a^2 - x^2)};$$

pour $x=0$ elle est parallèle à l'axe des X, et pour $x = \frac{a}{3}$ elle lui est perpendiculaire, comme nous l'avions prévu.

Ainsi la courbe de l'équation, si elle n'offre pas d'inflexions, que semble exclure l'uniformité de la courbe génératrice, a la forme d'une ovale inscrite dans un rectangle dont les dimensions seraient $2a$ et $\frac{2a}{3}$.

On peut remarquer qu'ici le lieu différent du premier n'est plus rapporté à son centre comme origine, et cela ne doit pas étonner, puisque la cause de ce phénomène géométrique a disparu avec la nature des calculs; mais ce deuxième exemple offre une particularité aussi remarquable que le premier; car la discussion de l'équation, nous a donné une ovale entière pour la courbe qu'elle représente, tandis que le point ne décrit effectivement que la partie inférieure terminée brusquement aux points L et L'.

Pourquoi le lieu n'est-il pas fidèlement représenté par l'équation émanée de sa génération?

C'est que lorsqu'on met en équation le lieu d'un point assujéti à un mouvement mécanique, il peut se faire que la relation constante établie entre les coordonnées de chacun des points de ce lieu, ne soit pas exclusive à ces points; ainsi par exemple le lieu du sommet d'un angle, dont les côtés passent par deux points fixes, est un segment de cercle. L'équation à laquelle on est conduit représente le cercle entier. Il serait superflu de multiplier les exemples de ce genre; cette observation suffit pour expliquer le défaut d'harmonie qui existe entre la courbe cherchée et son équation. Il y a plus, on peut même dire qu'il eût été impossible

de trouver une équation *algébrique* qui représentât exactement la forme du lieu ; car de pareilles équations n'ont pas de points d'arrêt.