Mention

Solution du problème 101

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 13-16

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__13_1>

SOLUTION DU PROBLÈME 101.

(T. IV, p. 370.)

PAR M. MENTION,
Élève en spéciales.

Quatre droites dans un même plan forment quatre triangles; dans chaque triangle existe un point de rencontre des trois hauteurs; les quatre points de rencontre sont sur une même droite.

LEMME I. Le point F (*fig.* 1) est un point quelconque du prolongement de BC; je mène les trois hauteurs du triangle, je marque le pied G de celle qui correspond à la base BC; si l'on prolonge la hauteur CO jusqu'à la rencontre avec la perpendiculaire abaissée du point F sur AC, on a la relation (N étant le point de rencontre de la perpendiculaire TF avec AG):

$$\frac{NT}{FT} = \frac{BF.CG}{CF.BG}.$$

Démonstration. Je mène par le point C une parallèle à NT, ce qui me donne :

$$\frac{NT}{CK} = \frac{OT}{OC}.$$

Mais les triangles semblables BOC et CFT donnent :

$$\frac{BO}{FT}=\frac{CO}{CT}.$$

Multipliant ces deux égalités termes à termes, nous avons :

$$\frac{NT\,.\,BO}{FT\,.\,CK}=\frac{OT}{CT},\quad \text{d'où}\quad \frac{NT}{FT}=\frac{OT}{CT}\cdot\frac{CK}{BO}.$$

Or nous avons aussi :

$$\frac{CK}{BO}=\frac{CG}{BG}\quad \text{et}\quad \frac{OC}{CT}=\frac{BC}{CF};$$

d'où, *componendo :*

$$\frac{OT}{CT}=\frac{BF}{CF};$$

donc enfin :

$$\frac{NT}{FT}=\frac{BF\,.\,CG}{CF\,.\,BG}.$$

C. Q. F. D.

Lemme II. Si de deux points D et E (*fig.* 2) des côtés d'un triangle, on abaisse des perpendiculaires sur le troisième côté, on a (G étant le pied de la hauteur correspondante à ce côté, D′ et H les pieds des perpendiculaires abaissées des points D et E)

$$\frac{GH}{D'G}=\frac{AE\,.\,BD\,.\,CG\,.\,FE}{FD\,.\,BG\,.\,CE\,.\,AD}.$$

Le point F est le point où la droite qui joint les deux points rencontre le troisième côté.

Nous avons d'abord successivement, à cause des perpendiculaires :

$$\frac{GH}{CH}=\frac{AE}{CE},\quad \frac{BD'}{D'G}=\frac{BD}{AD};$$

d'où, faisant le produit :

$$\frac{GH}{D'G}\cdot\frac{BD'}{CH}=\frac{AE\,.\,BD}{CE\,.\,AD}\quad \text{ou}\quad \frac{GH}{D'G}=\frac{AE\,.\,BD}{CE\,.\,AD}\cdot\frac{CH}{BD'}.$$

Nous avons aussi, à cause des perpendiculaires :

$$\frac{CH}{CG} = \frac{EH}{AG}, \quad \frac{BG}{BD'} = \frac{AG}{DD'};$$

et, *multiplicando :*

$$\frac{CH}{BD'} = \frac{EH}{DD'} \cdot \frac{CG}{BG}, \quad \text{or} \quad \frac{EH}{DD'} = \frac{FE}{FD},$$

donc :

$$\frac{CH}{BD'} = \frac{FE \,.\, CG}{FD \,.\, BG};$$

et par suite ·

$$\frac{GH}{D'G} = \frac{AE \,.\, BD \,.\, CG \,.\, FE}{CE \,.\, AD \,.\, BG \,.\, FD}.$$

III. Je viens à la démonstration du théorème,

Soit BCDE (*fig.* 3) le quadrilatère donné. Je prends, par exemple, les triangles ABC, BDF, ECF. Dans le premier, le point de rencontre est O; dans le second, il est O″; dans le troisième, il est O′.

Je prolonge AG jusqu'à la rencontre N avec la hauteur FO′ du triangle ECF, et jusqu'à la rencontre M avec la hauteur FO″ du triangle BDF. Alors j'obtiens un triangle dont les côtés sont coupés aux points O, O′, O″; ce triangle est MNF. Donc, si je prouve qu'on a l'égalité suivante :

$$MO'' \,.\, NG \,.\, FO' = FO'' \,.\, MO \,.\, NO',$$

les trois points O, O′, O″ seront en ligne droite. Or dans le triangle FGN, O′H étant parallèle à GN, nous aurons :

$$FO' : NO' :: FH : HG;$$

et, par la même raison, on a aussi :

$$MO'' : FO'' :: D'G : FD'.$$

Enfin, prolongeant CO jusqu'en T, nous avons :

$$NO : MO :: NT : FT.$$

Et, multipliant ces trois proportions termes à termes, tout revient donc à prouver que

$$\frac{FH . D'G . NT}{FD' . GH . FT} = 1.$$

Or $\frac{FH}{FD'} = \frac{FE}{FD}$, et d'après le second lemme, j'ai :

$$\frac{D'G}{GH} = \frac{CE . AD . BG . FD}{AE . BD . CG . FE};$$

enfin, le premier lemme me donne :

$$\frac{NT}{FT} = \frac{BF . CG}{GF . BG}.$$

Remplaçant par ces différentes valeurs, j'aurai :

$$\frac{FH.D'G.NT}{FD'.GH.FT} = \frac{FE.CE.AD.BG.FD.BF.CG}{FD.AE.BD.CG.FE.CF.BG} = \frac{CE.AD.BF}{AE.BD.CF} = 1.$$

Or, il suffit évidemment de démontrer que trois des points de rencontre sont en ligne droite. Donc, etc. C. Q. F. D.

Note. Le lemme I peut se démontrer directement. Supposons que FTN soit une droite quelconque coupant OB en Q; on a la relation connue :

$$\frac{GC . BF}{BG . CF} = \frac{TN . FQ}{TF . NQ};$$

or FTN étaut parallèle à OB, on a :

$$\frac{FQ}{NQ} = 1.$$

Donc, etc. Tm.