NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Note sur la convergence des séries

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 5 (1846), p. 101-111

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1846_1_5__101_0>

NOTE

sur la convergence des séries.

I. La convergence des séries présente beaucoup d'analogie avec l'asymptotisme des courbes. En effet, lorsqu'une courbe a une asymptote, soit rectiligne, soit parabolique ou hyperbolique, cela signifie que les parties très-éloignées de l'origine se confondent sensiblement avec une droite, une parabole ou hyperbole de divers degrés, et peuvent être calculées comme telles. Il en est de même des séries. Lorsque des termes très-éloignés du premier se déduisent les uns des autres d'après une loi sensiblement la même qu'on observe dans une seconde série connue, on peut dire que la première série s'approche asymptotiquement de la seconde et en partage les caractères ; si donc celle-ci est convergente ou divergente pour certaines valeurs de la variable, la première série sera aussi convergente ou divergente pour ces mêmes valeurs.

II. Il s'agit donc de trouver des séries types bien connues qui puissent servir, par moyen de comparaison, à établir les caracteres de convergence des autres séries. Le premier type qui s'offre naturellement, c'est la progression géométrique, convergente ou divergente, selon que le rapport est inferieur ou superieur à l'unité. Si donc une série a chacun de ses termes respectivement moindre ou plus grand que le terme de même quantième d'une progression géométrique convergente ou divergente, il est evident que la série elle-même sera aussi convergente ou divergente.

Soit u_0, u_1, u_2 .... u_n + etc., la forme générale d'une série numérique, si l'on a, pour terme général, $u_n = \frac{a}{r^n \varphi(n)}$; a étant un nombre constant et r un nombre inférieur à l'unité; $\varphi(n)$ une fonction essentiellement croissante avec n; une telle série est convergente.

Exemple :

$$u_n = \frac{1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots. n} = \frac{1}{\varphi(n)};$$

de là

$$u_{n+m} = \frac{1}{(n+1)(u+2)\ldots.(n+m)\,\varphi(n)};$$

or

$$\frac{1}{n+1 \ldots. n+m} < \frac{1}{n^m};$$

donc les termes de cette série :

$$\frac{1}{\varphi(n)}, \quad \frac{1}{(n+1)\varphi(n)}, \quad \frac{1}{(n+1)(n+2)\varphi n}, \quad \text{etc.}$$

sont tous inférieurs aux termes correspondants de la progression géométrique convergente,

$$\frac{1}{\varphi n}, \quad \frac{1}{n\varphi(n)}, \quad \frac{1}{n^2\varphi(n)} + \text{etc.} \qquad \text{(A)}$$

Donc, la série qui a pour terme général $\frac{1}{\varphi(n)}$ est convergente; il est de plus évident que chacun de ses termes est moindre que la somme entière de la série (A), somme qui est égale à

$$\frac{1}{\varphi(n)} \cdot \frac{n}{n-1} = \frac{1}{1.2.3 \ldots. n-1} \cdot \frac{1}{n-1} = u_{n-1} \cdot \frac{1}{n-1}.$$

Ainsi, en ajoutant les n premiers termes, le reste sera moindre que le produit du $n^{ème}$ terme par $\frac{1}{n-1}$: si l'on suppose $n = 11$, on aura $e = 2{,}7182818$, et l'erreur commise est moindre que

$$\frac{1}{1.2.3\ldots.10.10} = \frac{1}{36288000} = 0{,}00000002\ ;$$

de sorte qu'elle n'altère pas la septième décimale (*).

III. 1° Théorème. Lorsque dans la série numérique

$$u_0,\ u_1\ \ldots u_n + \text{etc.} \qquad \text{(A)}$$

chaque terme est inférieur à celui qui le précède, cette série (A) et la suivante

$$u_0,\ 2u_1,\ 4u_3,\ 8u_7,\ 16u_{15},\ 32u_{31} + \text{etc.} \qquad \text{(B)}$$

sont en même temps convergentes et divergentes (**); les indices sont une série récurrente ayant pour échelle de relation, 2, + 1.

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
&u_0 = u_0,\\
&2u_1 = 2u_1,\\
&4u_3 < 2u_3 + 2u_2,\\
&8u_7 < 2u_7 + 2u_6 + 2u_5 + 2u_4,\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Donc

$$u_0 + 2u_1 + 4u_3 + \text{etc.} < u_0 + 2(u_1 + u_2 + \ldots. + \text{etc.})$$

Ainsi, si la série (A) est convergente, la série (B) l'est aussi.

On a encore :

$$\begin{aligned}
&u_0 = u_0,\\
&2u_1 > u_1 + u_2,\\
&4u_3 > u_3 + u_4 + u_5 + u_6,\\
&8u_7 > u_7 + u_8 + u_9 + \ldots.\ u_{14}.
\end{aligned}$$

(*) Cauchy, Cours d'analyse, 1821, p. 129.
(**) *Ibid.*, p. 135.

Donc

$$u_0 + 2u_1 + 4u_3 + \text{etc.} > u_0 + u_1 + u_2 + \ldots.$$

Si donc la série (A) est divergente, la série (B) est diver geute à fortiori ; donc aussi réciproquement.

IV. Exemple :

$$1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{4^\mu} + \text{etc.} \qquad (A)$$

On aura pour (B) :

$$1 + 2^{1-\mu} + 4^{1-\mu} + 8^{1-\mu} + \text{etc.}$$

Cette série (B) est une progression géométrique convergente pour $\mu > 1$, et divergente dans le cas contraire. Ainsi (A) est convergente si $\mu > 1$, et divergente si $\mu = 1$ ou est < 1.

V. La progression $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{etc.}$ a été nommée *harmonique*, parce que les rapports entre deux termes consécutifs représentent des intervalles musicaux. Ainsi une corde de longueur 1 rendant un son,

celle de longueur $\frac{1}{2}$ rend l'octave de ce son.

$\frac{2}{3}$ la quinte.

$\frac{3}{4}$ la quarte juste.

$\frac{4}{5}$ la tierce majeure. (*V.* p. 12.)

$\frac{5}{6}$ la tierce mineure.

$\frac{8}{9}$ la seconde majeure.

On suppose, d'ailleurs, que les cordes ont même tension et même diamètre.

VI. Cette progression harmonique jouit de la propriété que trois termes consécutifs forment une *proportion harmonique*, qui s'énonce ainsi : La différence des deux premiers termes est à la différence des deux derniers, comme le premier est au dernier.

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}:\frac{1}{4}-\frac{1}{5}::\frac{1}{3}:\frac{1}{5}.$$

Quatre points A, B, C, D se succédant en ligne droite, si l'on a, entre les trois distances AB, AC, AD, la proportion

$$AC - AB : AD - AC :: AB : AD,$$

les quatre points sont situés *harmoniquement*.

VII. Quoique la série harmonique soit divergente, la somme augmente très-lentement ; ainsi Euler trouve que la somme des 1000 premiers termes est 7,4849708605503, et en prenant le premier million de termes ; 14,3927262228657 (*) ; Euler parvient à ces résultats par des considérations fondées sur le calcul différentiel ; mais on peut arriver, sans sortir des éléments, à une limite. En effet, la somme des termes, depuis $\frac{1}{a+1}$ jusqu'à $\frac{1}{na}$ compris, est renfermée entre $n-1$ et $\frac{n-1}{n}$; ainsi la somme de $\frac{1}{200}$ jusqu'à $\frac{1}{1000}$ est <4 ; en raisonnant de la même manière, on trouve que de 1 à $\frac{1}{200}$, la formule est aussi inférieure à 4 : donc de 1 à $\frac{1}{1000}$ la somme est moindre que 8.

VIII. Lorsque r est un nombre entier pair, Euler a démontré que la limite de la série A, divisée par π^r, donne toujours un quotient rationnel ; par exemple :

(*) *Institutiones calculi different.*, t. I, p. 446, édit. de Pétersbourg.

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{etc.}, = \frac{1}{1.2.3}\cdot\pi^2$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\text{etc.}, = \frac{2^2}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\pi^4$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}\text{ etc.}, = \frac{2^4}{1.2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{1}{3}\,\pi^6.$$

Les puissances de π sont multipliées par deux facteurs ; la formation du premier est évidente ; le second facteur se forme à l'aide de certains nombres, dits Bernoulliens, du nom de leur auteur, Jacques Bernoulli ; la loi de ces nombres a été trouvée, la première fois, je crois, par Laplace. Ainsi, si l'on pouvait démontrer l'irrationalité de la limite de la somme des puissances réciproques paires des nombres naturels, l'irrationalité de π^u serait aussi démontrée.

IX. Lorsque μ est un nombre entier impair, la limite est encore inconnue ; on ne sait de quelle transcendante elle est dépendante. Il est probable qu'elle dépend d'une transcendante hyperbolique ou elliptique. En effet, soit la courbe hyperbolique (*fig.* 14) donnée par l'équation $y=\frac{1}{x^{1+q}}$; q étant positif ; O est l'origine ; OX, OY les axes des coordonnées, asymptotes. Soit $OO'=1$, et $OM=1$; on démontre facilement que l'aire asymptotique renfermée entre la courbe MM'M''... (*fig.* 14), l'ordonnée OM et l'axe O'ABC..., a pour limite $\frac{1}{q}$; prenons les distances OO', O'A, AB, BC, etc., égales chacune à l'unité, et menons les ordonnées AM', BM'', CM''', et achevons les rectangles O'AM'D, ABM''D', BCM'''D'', etc. ; on aura :

$$AM'=\frac{1}{2^{1+q}}\,;\ BN''=\frac{1}{3^{1+q}};\ CM'''=\frac{1}{4^{1+q}}\,;$$

les aires des rectangles seront exprimées par ces mêmes fractions; or l'aire asymptotique étant limitée, il s'ensuit que la somme des aires rectangulaires est aussi limitée; mais lorsque q est négatif, l'espace asymptotique a pour limite $+\infty$, et alors on démontre aisément que l'aire du rectangle est plus grande que la moitié du trapèze rectiligne O'AM'M; or la somme de ces trapèzes est évidemment infinie; donc la somme des rectangles est aussi infinie. Je dois cette seconde partie de la démonstration à l'obligeance de M. le professeur Bourdonnay-Duclésio, auteur d'une savante thèse mathématique sur la distribution de l'électricité sur la surface des corps conducteurs. Le théorème général est dû à M. Cauchy (*). Cela suffit pour faire voir la connexion entre la somme des puissances réciproques et les aires hyperboliques.

X. A l'aide du théorème que nous venons de citer, M. Bertrand prouve facilement (**) que les séries :

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots\frac{1}{n^\alpha}+\ldots \tag{1}$$

$$1+\frac{1}{2\,(l2)^\alpha}+\frac{1}{3\,(l3)^\alpha}+\ldots\frac{1}{n(ln)^\alpha}+\ldots \tag{2}$$

$$\text{(A)}\quad 1+\frac{1}{2l2\,(ll2)^\alpha}+\frac{1}{3\log 3\,(ll3)^\alpha}+\frac{1}{nln.(lln)^\alpha}+\ldots \tag{3}$$

$$1+\frac{1}{2l2ll2\,(lll2)^\alpha}+\ldots\frac{1}{nlnlln\,(llln)^\alpha}+\ldots \tag{4}$$

sont toutes convergentes si α est >1, et divergentes si α est égal à 1 ou plus petit que 1; nous avons déjà considéré la première série; pour la seconde, il faut recourir à la courbe hyperbolique donnée par l'équation

$$y=\frac{1}{x\,(\log x)^\alpha};$$

(*) Exercices de mathématiques, seconde année, 1827, p. 221.
(**) Journal des Mathématiques, fév. 1842, p. 38.

et dont l'aire asymptotique est exprimée par $\frac{(lx)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, et ainsi des autres.

XI. Ces séries servent au même géomètre à établir des règles de convergence. Avant de les donner, nous rappellerons deux théorèmes de M. Cauchy (*) qui servent de point de départ

Théorème I. Si dans une série

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \dots u_n + u_{n+1} + \text{etc.}, \qquad (1)$$

tous les termes, à partir d'un certain rang, sont positifs ; et si de très-grandes valeurs de n font converger le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ vers une limite R ; la série sera convergente lorsqu'on aura $R < 1$, et divergente lorsqu'on aura $R > 1$ (Algèb. Fourcy, p. 522, 3e édit.). En effet, le rapport ayant une tendance à devenir constant, la série s'approche asymptotiquement d'une progression géométrique et en prend le caractère.

Théorème II. Si dans la même supposition, pour de très-grandes valeurs de n, $\sqrt[n]{u_n}$ converge vers une limite R ; la série est convergente ou divergente, suivant qu'on aura $R < 1$ ou $R > 1$ (Algèb. de Fourcy, p. 524). Lorsqu'on a constamment $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt[n]{u_n}$, la série est une progression géométrique ; car on aura ainsi $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \sqrt[n+1]{u_{n+1}}$, remplaçant dans le second nombre u_{n+1} par sa valeur tirée de la première équation, il vient : $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \sqrt[n]{u_n}$; on voit donc que lorsque $\sqrt[n]{u_n}$ s'approche d'une valeur fixe, la série

(*) Cours d'analyse, p. 132, 134.

converge encore vers une progression géométrique; et cette limite est identique à celle qui est donnée par le théorème précédent (*Cours d'analyse*, p. 134). Ainsi les deux théorèmes ne diffèrent que pour l'énoncé.

XII. Ce théorème est en défaut : 1° lorsque $R=1$; 2° lorsque R est tantôt au-dessus tantôt au-dessous de 1 ; ce qui arrive pour certaines séries que Legendre a désignées sous le nom de *séries semi-convergentes*.

Pour trouver les caractères à employer lorsque $R=1$, examinons (*a*) la série qui a pour terme général $\frac{\log u_n}{n} = \log \alpha$, α étant une constante ; on en déduit $u_n = \alpha^n$; ainsi toute série qui pour de grandes valeurs de n, satisfait à cette équation, s'approche d'une progression géométrique et participe aux caractères de cette progression, comme il a déjà été dit ci-dessus; il n'y a du doute que lorsque $\log \alpha = 0$, et remarquons que
$$\frac{\log u_n}{n} = -\frac{\log \frac{1}{u_n}}{n}.$$

(*b*) La série qui a pour terme général $\frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n} = \alpha$; on en tire $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$, ce qui est la première des séries (A) ; donc dans toute série où le rapport $\frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n}$ s'approche d'un nombre constant pour u très-grand, tend à s'identifier avec la première de (A) ; ainsi si $\alpha > 1$, il y a convergence; et si $\alpha < 1$, il y a divergence ; il y a doute si $\alpha = 1$ (*Cours d'analyse*, p. 137). On a : $\frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n} = \frac{n}{\log n} \cdot \frac{\log \frac{1}{u_n}}{n} = \alpha$; or, pour n infini $\frac{n}{\log n}$ est infini.

Donc, pour que α soit une quantité finie, il faut que $\frac{\log \frac{1}{u_n}}{n}$ soit nul. Par conséquent, le second caractère ne peut avoir lieu que lorsque le premier est en défaut.

Exemple. Soit la série

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots$$

Le rapport de deux termes consécutifs est $\frac{n+2}{n+3}$; la limite de ce rapport est $=1$, ainsi la première règle est insuffisante; la deuxième règle donne:

$$\frac{\log (n+1)(n+2)}{\log n}=\frac{\log n+1}{\log n}+\frac{\log n+2}{\log n}$$

pour $n=\infty$, la limite $=2$; donc $\alpha>1$, et la série est convergente.

En effet, elle est égale à 1, car on peut la mettre sous cette forme

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots=1.$$

(*c*) La série qui a pour terme général $\frac{\log \frac{1}{nu_n}}{\log ln}=\alpha$; on en tire $\log \frac{1}{nu_n}=\log (ln)^\alpha$; d'où $\frac{1}{nu_n}=(ln)^\alpha$; $u_n=\frac{1}{n(ln)^\alpha}$.

Ainsi lorsque le rapport $\frac{\log \frac{1}{nu_n}}{\log ln}$ tend à devenir constant, la série s'approche de la seconde des séries (A).

Or

$$\frac{\log \frac{1}{nu}}{lln}=\frac{ln}{\log ln}\;\frac{\log \frac{1}{nu_n}}{ln}=\frac{ln}{\log ln}\left[-1+\frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n}\right]$$

Lorsque n est infini le premier facteur est infini ; il faut donc que le second facteur s'approche de zéro; ou que $\dfrac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n}$ devienne égal à l'unité ; ainsi lorsque la troisième règle a lieu la seconde est nécessairement en défaut. Soit la série

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{3}} + \ldots \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} + \ldots$$

1re *Règle.* Rapport de deux termes consécutifs

$$\frac{n\sqrt[n]{n}}{(n+1)\sqrt[n]{n+1}}, \text{ fesant } n = \infty,$$

ce rapport devient égal à 1 ; ainsi cette règle n'est pas applicable.

2me *Règle.* $\dfrac{\log n\sqrt[n]{n}}{\log n} = \dfrac{n+1}{n}$; fesant $n = \infty$, ce rapport $= 1$; donc la deuxième règle n'est pas applicable.

3me *Règle.* $\log \dfrac{n\sqrt[n]{n}}{n \log n} = \dfrac{1}{n}$; fesant $n = \infty$, le rapport $= 0$, par conséquent $\alpha < 1$, et la série est divergente et à fortiori la série suivante

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{4}} + \ldots \frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

(d) Si le rapport précédent est égal à l'unité, il faut prendre le rapport $\dfrac{\log \frac{1}{nu_n ln}}{\log lln}$, et ainsi de suite.

(*Voir* Lebesgue, t. IV, p. 66.)