VIDAL

Solution du problème VII

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 43-45
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__43_1>

SOLUTION DU PROBLÈME VII (page 122).

PAR M. VIDAL,
Eleve au College de Montpellier.

Construire les axes d'une hyperbole équilatère dont on donne quatre points.

Pour arriver à la solution de ce problème, je m'appuie sur un théorème qui a été démontré page 423 :

Si deux points sont les milieux de deux cordes d'une hyperbole équilatère, et si, par chacun d'eux, on mène une parallèle à l'autre corde, les deux points, le point de rencontre des deux parallèles, et le centre de la courbe sont sur une même circonférence.

Soient A, B, C, D (*fig.* 3), les quatre points donnés, je joins AB et AD, j'aurai là deux cordes de l'hyperbole ; si donc j'applique à ces deux cordes, la construction indiquée dans l'enoncé ci-dessus, je trouverai une circonférence sur laquelle devra être le centre de l'hyperbole. Je joins BC et DC, et je répète pour ces deux cordes la construction précédente, j'aurai une nouvelle circonférence sur laquelle devra se trouver le centre ; les deux points communs à ces deux circonférences pourront être considérés comme centres de la courbe. Parmi ces deux points d'intersection, l'un, le point Q, n'est autre chose que le point d'intersection des quatre parallèles menées par le milieu des cordes AD, AB, BC, CD; ces quatre parallèles doivent évidemment se rencontrer au même point sur le milieu de DB. En prenant cette solution, on voit que les deux points D et B, seront les extrémités d'un même diamètre, et que les cordes AD, AB seront des cordes supplémentaires, ainsi que BC et CD; or, il est évident que lorsque les données seront situées de cette manière, le centre devra se trouver au point de rencontre des deux parallèles menées ainsi qu'il a été dit plus haut.

Pour plus de généralité, prenons le point o pour le centre de la courbe, joignons le point o avec le point E, milieu de BC, nous aurons là la direction d'un diamètre; par le centre menons oF, parallèle à BC, ces deux diamètres formeront un système de diamètres conjugués dont nous ne connaissons pas la longueur; tout ce que nous savons, c'est que si nous désignons leur longueur par a', l'équation de la courbe rapportée à ces deux diamètres sera :

$$y^2 - x^2 = - a'^2.$$

Nous connaissons les coordonnées du point B de la courbe, par conséquent nous voyons, d'après l'équation de la courbe, que si nous construisons un triangle rectangle dont l'hypoténuse soit l'abscisse du point B et un côté, l'ordonnée du même point, l'autre côté sera a'. L'équation de la courbe ci-dessus nous montre aussi que l'abscisse d'un point quelconque de la courbe est toujours plus grande que l'ordonnée du même point, on ne sera donc pas embarrassé pour savoir quelle est celle des deux lignes BE et oE qui est l'abscisse du point B, et quelle est celle qui en est l'ordonnée; il est urgent de faire cette distinction, parce que nous ne savons pas si l'axe des x est oE ou oF. Nous construisons donc sur oE le triangle rectangle oEG, a' sera égal à GE. Sur la direction des diamètres portons des longueurs oF, oH, égales à GE, sur ces deux lignes construisons le parallélogramme *o*FIH, *o*I sera une asymptote de la courbe. En menant par le point *o* une perpendiculaire à cette droite, nous aurons la direction de l'autre asymptote.

Connaissant les asymptotes, nous aurons la direction des axes en divisant les angles de ces deux droites en deux parties égales; il s'agit d'en avoir la longueur. Pour cela, par le point B, je mène BM, perpendiculaire à l'axe, jusqu'à la rencontre des deux asymptotes en M et L; sur ML, comme diamètre, je décris une demi-circonférence, par le point B, je mène BN, perpendiculaire à LM, jusqu'à la rencontre de cette circonférence; d'après un théorème connu on voit que BN sera la longueur des axes. Je porte donc sur leurs directions des longueurs *o*T, *o*T′, *o*R, *o*R′, égales à BN, et le problème est déterminé.

Nota. Si on cherche la circonférence qui passe par les milieux de AD, DC et AC, on voit qu'elle passe aussi par le point *o*.