A. Lebelin

Théorème sur le trapèze

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 2 (1843), p. 377-378
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1843_1_2__377_0>

THÉORÈME SUR LE TRAPÈZE.

PAR M. A. LEBELIN,
Élève du collége de Dijon.

Théorème. Le lieu géométrique des points d'intersection des diagonales d'un trapèze dont la base inférieure est fixe, dont la base supérieure est constante, ainsi que la somme des deux côtés non parallèles, est une ellipse.

Démonstration. Supposons un trapèze ABCD (*fig.* 78), menons-en les diagonales AC, BD, et par le point d'intersection M menons MF et CK parallèles à AB. Soient $AB=m$; $AF=\delta$; $AD=B$; $BC=b$; $CD=n$, nous aurons, à cause des triangles semblables MAF, CAK :

$$MF : m :: \delta : b.$$

De même les triangles semblables BAD, MFD, donnent :

$$(1)\qquad MF : m :: B-\delta : B;$$

on conclut de ces deux proportions,

$$B-\delta : B :: \delta : b\,;\ \text{d'où}\ \ \delta=\frac{Bb}{B+b}\,;$$

donc le point F sera constant pour tous les trapèzes qui auront les mêmes bases parallèles.

Maintenant si nous menons par le point M une ligne MF' parallèle à CD, nous trouverons encore que $DF'=\frac{Bb}{B+b}=AF$.

Par conséquent le point F' est aussi constant.

Or, transportons la valeur trouvée pour δ, dans la proportion (1), nous aurons :

$$FM : m :: B-\frac{Bb}{B+b} : B,\ \text{donc}\ FM=m\frac{B}{B+b}\,;$$

on trouverait de même : $F'M = n \frac{B}{B+b}$,

ajoutons FM et F'M, il viendra

$$FM + F'M = (m+n) \frac{B}{B+b}.$$

Par conséquent, puisque les points F et F' sont fixes, il en résulte que le problème suivant : *Trouver le lieu géométrique des points d'intersection des diagonales des trapèzes dont la base inférieure est fixe et dont la base supérieure se meut de manière que la somme des côtés non parallèles reste constante*, est résolu; c'est une ellipse qui a pour foyers F et F', et dont le grand axe est égal à $(m+n) \frac{B}{B+b}$