NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

II.

PARIS. — IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT,
IMPRIMEURS DE L'UNIVERSITÉ ROYALE DE FRANCE,
Rue Racine, 28, près de l'Odéon.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

Rédigé par MM.

TERQUEM,

OFFICIER DE L'UNIVERSITÉ, DOCTEUR ÈS SCIENCES, PROFESSEUR AUX ÉCOLES ROYALES D'ARTILLERIE,

ET

GERONO,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES.

TOME DEUXIÈME.

PARIS.

CARILIAN-GOEURY ET V^OR DALMONT, ÉDITEURS,

LIBRAIRES DES CORPS ROYAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

Quai des Augustins, nos 39 et 41.

1843.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

ALGÈBRE SUPÉRIEURE.

DE LA RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE DE L'ÉQUATION

$$x^p - 1 = 0,$$

QUAND L'EXPOSANT p EST UN NOMBRE PREMIER.

PAR M. REALIS. (S.)

I.

Cas particuliers.

1. Le but que je me propose dans ce mémoire est de prouver que « toute équation à deux termes, dont l'exposant est un nombre premier, peut être décomposée rationnellement en d'autres équations, dont les degrés sont marqués par les facteurs premiers du nombre qui précède d'une unité ce nombre premier, » et de développer en même temps une méthode nouvelle et simple pour effectuer la décomposition indiquée.

2. La considération des propriétés du cercle donne, pour tous les degrés, des expressions des racines de l'unité, au moyen desquelles on peut parvenir à la résolution algébrique

de l'équation $x^p - 1 = 0$; c'est pourquoi je rappellerai que les racines de cette équation sont données par la formule

$$x = \cos\frac{2k\pi}{p} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{p},$$

dans laquelle on doit donner à k les valeurs 0, 1, 2, 3,..... $\frac{p}{2}$ si p est pair, et les valeurs 0, 1, 2, 3,..... $\frac{p-1}{2}$ si p est impair. Dans le premier cas les deux valeurs extrêmes de k donnent $x = 1$, $x = -1$, et toutes les autres valeurs de x sont imaginaires, conjuguées et réciproques. Dans le second cas, la première valeur de k donne $x = 1$; les autres racines sont toutes imaginaires, conjuguées et réciproques.

3. Après avoir délivré l'équation $x^p - 1 = 0$ du facteur $x - 1$, on ramène, par la méthode connue, l'équation résultante

$$x^{p-1} + x^{p-2} + x^{p-3} + x^{p-4} + \dots + x + 1 = 0$$

à une équation du degré $\frac{p-1}{2}$, en y faisant $x + \frac{1}{x} = z$. De cette manière les racines de l'équation en z seront

$$z = 2\cos\frac{2\pi}{p},\ 2\cos\frac{4\pi}{p},\ 2\cos\frac{6\pi}{p}, \dots\ 2\cos\frac{(p-1)\pi}{p},$$

et serviront à déterminer les $\frac{p-1}{2}$ facteurs de la forme $x^2 - zx + 1$ qu'admet l'équation $x^p - 1 = 0$.

C'est dans la recherche des expressions algébriques de ces racines que consiste le problème de la résolution des équations binômes, auquel revient, ainsi qu'on le voit, celui de la division du cercle en parties égales.

La résolution de quelques équations particulières éclaircira la théorie générale que j'exposerai à la suite.

4. Soit d'abord $p=13$; l'équation $x^{13}-1=0$ conduit à

$$z^6+z^5-5z^4-4z^3+6z^2+3z-1=0,$$

dont les racines sont

$$z=2\cos\frac{2\pi}{13},\ 2\cos\frac{4\pi}{13},\ 2\cos\frac{6\pi}{13},\ 2\cos\frac{8\pi}{13},\ 2\cos\frac{10\pi}{13},\ 2\cos\frac{12\pi}{13}.$$

Une équation peut être abaissée à un degré inférieur à celui sous lequel elle se présente, quand il existe entre ses racines des relations particulières. S'il n'y a que deux racines qui soient liées par une relation connue, on sépare de l'équation un diviseur du premier degré qui contient l'une ou l'autre de ces deux racines. Si toutes les racines, en nombre $2n$, peuvent se distribuer par couples de manière qu'elles aient, deux à deux, une même relation donnée, on peut, au moyen d'équations du degré n, décomposer la proposée en ses facteurs du second degré : c'est ainsi qu'on abaisse l'équation $x^p-1=0$, divisée par $x-1$, au degré $\frac{p-1}{2}$. Si les racines, en nombre $3n$, sont assujetties, trois par trois, à une relation donnée, on peut, au moyen d'équations du $n^{ième}$ degré, décomposer la proposée en des facteurs du troisième degré, etc. (*V.* Lacroix, *Compl. des élém. d'Algèbre*, n^{os} 58 et 59, 6^e édit.)

Dans le cas qui nous occupe, on voit que les valeurs de z sont liées entre elles de telle sorte que si u en désigne la première, les autres sont

$$u^2-2;\ u^3-3u;\ u^4-4u^2+2;\ u^5-5u^3+5u;\ u^6-6u^4+9u^2-2,$$

ainsi qu'on le déduit de la formule générale qui donne le cosinus du multiple d'un arc en fonction du cosinus de l'arc simple. Il ne faut pas conclure de là cependant que l'équation en z puisse être immédiatement abaissée; les relations ci-dessus demeurant les mêmes soit que la lettre u désigne la première racine, soit une autre racine quelconque, il s'ensuit que si l'on met, par exemple, z^2-2 à la place de z dans l'équation, et qu'on cherche le commun diviseur qui doit exister entre l'équation résultante et la proposée, ce commun diviseur montera au sixième degré et ne sera autre chose que le premier membre de la proposée elle-même.

On ne réussira pas non plus à abaisser le degré de l'équation en z, en la décomposant au hasard en des facteurs du second degré contenant des racines assujetties dans chacun d'eux à une même relation, car cette décomposition pourra généralement s'effectuer de deux manières différentes, et les équations d'où elle dépend monteront encore au sixième degré.

Je suppose, par exemple, qu'on veuille décomposer en trois facteurs de la forme

$$z^2-(2\cos\varphi+2\cos 2\varphi)z+2\cos\varphi\,.\,2\cos 2\varphi\ :$$

On pourra prendre les trois facteurs contenant respectivement les couples de racines

$$2\cos\frac{2\pi}{13},\ 2\cos\frac{4\pi}{13};\quad 2\cos\frac{8\pi}{13},\ 2\cos\frac{10\pi}{13};\quad 2\cos\frac{6\pi}{13},\ 2\cos\frac{12\pi}{13};$$

ou bien les facteurs contenant les couples

$$2\cos\frac{10\pi}{13},\ 2\cos\frac{6\pi}{13};\quad 2\cos\frac{12\pi}{13},\ 2\cos\frac{2\pi}{13};\quad 2\cos\frac{4\pi}{13},\ 2\cos\frac{8\pi}{13};$$

et par conséquent les équations que donnerait la méthode ordinaire d'abaissement pour déterminer les deux fontions

$$2\cos\frac{2\pi}{13}+2\cos\frac{4\pi}{13},\quad 2\cos\frac{2\pi}{13}.\ 2\cos\frac{4\pi}{13},$$

considérées comme des inconnues, seraient du sixième degré.

On voit maintenant que si l'on pouvait parvenir à combiner les racines deux à deux de manière qu'elles eussent dans chaque couple une même relation connue, et que les deux décompositions en facteurs du second degré rentrassent l'une dans l'autre, on réduirait par là de moitié le nombre de valeurs différentes des fonctions qui déterminent ces facteurs et le degré des équations d'où elles dépendent.

Soit m un nombre tel que l'équation puisse se décomposer en deux facteurs de la forme

$$z^2-(2\cos\varphi+2\cos m\varphi)\,z+2\cos\varphi\,.\,2\cos m\varphi\;:$$

tant que $\cos m^2\varphi$ aura une valeur différente de $\cos\varphi$, on pourra aussi décomposer l'équation en des facteurs de la forme

$$z^2-(2\cos m\varphi+2\cos m^2\varphi)\,z+2\cos m\varphi\,.\,2\cos m^2\varphi,$$

qui contiennent des racines liées dans chacun d'eux par la même relation que celles des premiers, et pour les déterminer on tombera sur des équations du même degré que la proposée. Mais si l'on avait $\cos m^2\varphi=\cos\varphi$, les deux décompositions se réduiraient à une seule, ce qui abaisserait les équations ci-dessus au troisième degré. Cela sera développé plus bas (*Théorie générale*); en attendant, j'observerai que le nombre m qui donne $\cos m^2\varphi=\cos\varphi$, φ étant de la forme $\frac{2\alpha\pi}{13}$, doit satisfaire à la condition de rendre entière la quantité $\frac{m^2+1}{13}$ ou la quantité $\frac{m^2-1}{13}$, et qu'ainsi c'est de la résolution de l'équation indéterminée $\frac{m^2\pm1}{13}=$ entier que dépend sa détermination.

On voit de suite que $m=5$ est le nombre cherché ; et en effet, il n'y a qu'une seule manière de décomposer l'équation en z en des facteurs de la forme

$$z^2-(2\cos\varphi+2\cos5\varphi)\,z+2\cos\varphi\,.\,2\cos5\varphi,$$

savoir par les facteurs qui contiennent les trois couples de racines

$$2\cos\frac{2\pi}{13},\ 2\cos\frac{10\pi}{13};\quad 2\cos\frac{4\pi}{13},\ 2\cos\frac{6\pi}{13};\quad 2\cos\frac{8\pi}{13},\ 2\cos\frac{12\pi}{13}.$$

Le procédé ordinaire d'abaissement se simplifie beaucoup à l'égard des équations en z qu'on tire des équations binômes dont il est question ici.

Dans l'équation ci-dessus en z, u étant une quelconque des racines, celle qui lui correspond dans le même facteur du second degré, est u^5-5u^3+5u (*voy.* page 7), de façon que ce facteur est de la forme

$$z^2-(u^5-5u^3+6u)z+u^6-5u^4+5u^2,$$

les fonctions u^5-5u^3+6u, $u^6-5u^4+5u^2$ devant être données par des équations du troisième degré. Voici comment on peut parvenir au résultat par une seule opération, sans avoir à s'occuper séparément de chacune de ces fonctions.

Soit $u^5-5u^3+6u=y$, ou ce qui est la même chose,

$$u^5-5u^3+6u-y=0;$$

si dans cette équation on mettait pour y une quelconque de ses trois valeurs, censées connues, elle devrait être vérifiée par deux valeurs de u et s'accorder avec l'équation

$$u^6+u^5-5u^4-4u^3+6u^2+3u-1=0$$

qu'on obtient en écrivant u à la place de z dans la proposée ; il doit donc exister entre ces deux équations un commun diviseur. Si l'on procède à la recherche de ce commun diviseur, on doit *nécessairement* rencontrer un polynôme *du troisième degré* en y qui, égalé à zéro, servira à déterminer les trois valeurs de y et à rendre diviseur commun des deux équations un polynôme *du second degré* en u.

On trouve, en effet, que le trinôme $u^2-yu-\dfrac{y^2-2}{y-1}$ divise les deux équations si l'on fait

$$y^3+y^2-4y+1=0.$$

On voit que le commun diviseur, sauf le changement de z en u, n'est autre chose que le facteur du second degré qu'il s'agissait de déterminer, et qu'en y mettant successivement à la place de y les trois racines de la dernière équation, on obtient précisément les trois facteurs dans lesquels se décompose la proposée, et qu'on est ainsi dispensé de s'occuper à part de la fonction $u^6-5u^4+5u^2$. On peut faire disparaître le dénominateur du dernier terme du commun diviseur, car de l'équation en y on déduit $-\dfrac{y^2-2}{y-1}=y^2+y-3$.

La résolution de l'équation $x^{13}-1=0$ se réduit donc à celle des trois équations combinées

$$x^2-zx+1=0\,; \quad z^2-yz+y^2+y-3=0\,, \quad y^3+y^2-4y+1=0.$$

5. L'équation en z qu'on vient de traiter peut aussi se décomposer en deux facteurs de la forme

$$z^3-(2\cos\varphi+2\cos m\varphi+2\cos m^2\varphi)\,z^2+(\ldots.)z+(\ldots.).$$

Tant qu'on ne choisit pas convenablement le nombre m, à chaque manière qu'on trouvera d'effectuer cette décomposition, il en correspondra deux autres distinctes, de sorte que pour déterminer les coefficients des termes du facteur on tombera sur des équations du sixième degré; mais si m est tel qu'on ait $\cos m^3\varphi=\cos\varphi$, ce qui arrive quand $\dfrac{m^3\pm1}{13}=$ entier (sans dépendance mutuelle entre les deux signes), les trois décompositions se réduisent à une seule qu'on effectue par la résolution d'une équation du second degré.

On trouve ici deux valeurs de m, savoir $m=3$ et $m=4$ (il suffit de considérer les valeurs de m moindres que $\dfrac{13-1}{2}=6$; les autres conduiraient aux mêmes résultats), qui satisfont à la condition $\dfrac{m^3\pm1}{13}=$ entier, selon qu'on prend le signe inférieur ou le supérieur ; il n'en résulte cependant qu'une seule décomposition de la proposée en facteurs du troisième degré, ainsi qu'on peut s'en assurer et qu'il sera démontré dans la théorie générale. Les deux facteurs contiendront respectivement les deux groupes suivants de racines, savoir :

$$2\cos\frac{2\pi}{13},\ 2\cos\frac{6\pi}{13},\ 2\cos\frac{8\pi}{13};\ \text{et}\ 2\cos\frac{4\pi}{13},\ 2\cos\frac{12\pi}{13},\ 2\cos\frac{10\pi}{13}.$$

Si u désigne une quelconque des racines, les deux autres du même groupe seront $u^3—3u$ et $u^4—4u^2+2$; représentant par y la somme de ces trois racines, il doit exister un commun diviseur de troisième degré en u entre les équations

$$u^4+u^3—4u^2—2u+2—y=0,$$
$$u^6+u^5—5u^4—4u^3+6u^2+3u—1=0.$$

On trouve, en effet, que $u^3—yu^2—u+y—1$ divise ces deux équations si l'on fait $y^2+y—3=0$. Mettant successivement dans le commun diviseur les deux valeurs de y données par l'équation précédente et changeant u en z, on obtient les deux facteurs dans lesquels la proposée peut se décomposer.

La résolution de l'équation $x^{13}—1=0$ peut donc encore se réduire à celle des trois équations

$$x^2—zx+1=0;\quad z^3—yz^2—z+y—1=0;\quad y^2+y—3=0.$$

On remarquera que les procédés qu'on vient d'employer conduisent tous les deux à la résolution de l'équation en x, au moyen de deux équations du second degré et d'une du troisième, conformément aux énoncés généraux des nos 1 et 14.

6. Soit maintenant l'équation $x^{17}—1=0$. Après en avoir séparé le facteur $x—1$, on la décompose en huit facteurs de la forme $x^2—zx+1$ au moyen de l'équation

$$z^8+z^7—7z^6—6z^5+15z^4+10z^3—10z^2—4z+1=0,$$

dont les racines sont représentées par les expressions

$$2\cos\frac{2\pi}{17},\ 2\cos\frac{4\pi}{17},\ 2\cos\frac{6\pi}{17},\ 2\cos\frac{8\pi}{17},$$

$$2\cos\frac{10\pi}{17},\ 2\cos\frac{12\pi}{17},\ 2\cos\frac{14\pi}{17},\ 2\cos\frac{16\pi}{17},$$

et ont entre elles les relations connues du double cosinus d'un arc aux doubles cosinus de différents multiples de cet arc.

Puis on décompose l'équation en z en deux facteurs contenant chacun quatre racines de la forme

$$2\cos\varphi,\ 2\cos m\varphi,\ 2\cos m^2\varphi,\ 2\cos m^3\varphi;$$

pour cela on prendra pour m un nombre tel qu'on ait $\cos m^4\varphi = \cos\varphi$, c'est-à-dire qui satisfasse à la condition $\frac{m^4\pm 1}{17} =$ entier, sans quoi il y aurait quatre manières différentes de faire la décomposition, et l'on tomberait sur des équations du même degré que l'équation en z. Les nombres 2, 4, 8 satisfont à la condition ci-dessus, et les deux extrêmes servent à partager les racines en deux groupes, savoir :

$$2\cos\frac{2\pi}{17},\ 2\cos\frac{4\pi}{17},\ 2\cos\frac{8\pi}{17},\ 2\cos\frac{16\pi}{17}$$

$$\text{et } 2\cos\frac{6\pi}{17},\ 2\cos\frac{12\pi}{17},\ 2\cos\frac{10\pi}{17},\ 2\cos\frac{14\pi}{17},$$

dans chacun desquels les racines sont assujetties à une même relation. Quant au nombre 4, il satisfait aussi à la condition $\frac{m^2+1}{17} =$ entier, et sera employé plus bas pour une nouvelle décomposition. Au moyen d'une racine quelconque u on exprimera les trois autres du même groupe, et puis la somme y des quatre. On aura par là les deux équations

$$u^8-8u^6+21u^4-19u^2+u+2-y=0,$$

$$u^8+u^7-7u^6-6u^5+15u^4+10u^3-10u^2-4u+1=0,$$

qui seront divisibles par le facteur commun

$$u^4-yu^3-(y+2)u^2+(2y+3)u-1,$$

si l'on fait $y^2+y-4=0$. Ce facteur commun, au moyen des deux valeurs de y, produit les deux facteurs dans lesquels se partage l'équation en z.

Il s'agit maintenant de décomposer à son tour l'équation

$$z^4-yz^3-(y+2)z^2+(2y+3)z-1=0,$$

dont les racines sont celles du premier ou du second groupe, selon qu'on y met pour y l'une ou l'autre de ses deux valeurs. La condition $\frac{m^2+1}{17}=$ entier, qui est satisfaite par $m=4$, indique la décomposition en deux facteurs contenant les racines

$$2\cos\frac{2\pi}{17},\ 2\cos\frac{8\pi}{17},\ \text{et}\ 2\cos\frac{4\pi}{17},\ 2\cos\frac{16\pi}{17}$$

respectivement, ou celles de l'autre groupe arrangées semblablement; selon la valeur qu'on suppose à y.

Soit s la somme des deux racines appartenant à un quelconque de ces derniers facteurs; on aura les deux équations

$$u^4-4u^2+u+2-s=0,$$
$$u^4-yu^3-(y+2)u^2+(2y+3)u-1=0,$$

qui admettront le commun diviseur $u^2-su+\frac{2s-y-2}{y}$, pourvu qu'on fasse $s^2-ys-1=0$. Le commun diviseur peut aussi s'écrire $u^2-su+\frac{s^2+s-y-4}{2}$. Si l'on change u en z et qu'on mette successivement pour s ses deux valeurs, on obtient les deux facteurs qui composent la dernière équation en z. Et comme dans chacun de ces facteurs on a deux valeurs à mettre pour y, on en conclut les quatre facteurs dans lesquels se partage l'équation du huitième degré en z.

Par ce qui précède, la résolution de l'équation $x^{17}-1=0$ se trouve ramenée à celle des quatre équations combinées

$$x^2-zx+1=0\,;\ z^2-sz+\frac{s^2+s-y-4}{2}=0\,;\ s^2-ys-1=0\,;$$
$$y^2+y-4=0.$$

Ces quatre équations n'étant que du second degré, il s'ensuit qu'on peut effectuer, avec la règle et le compas, la division du cercle en 17 parties égales (*).

7. Soit encore l'équation $x^{19}-1=0$. Après l'avoir divisée par $x-1$, et représenté par z la somme $x+\frac{1}{x}$ de deux racines réciproques, on en tire l'équation

$$z^9+z^8-8z^7-7z^6+21z^5+15z^4-20z^3-10z^2+5z+1=0,$$

dont il faut grouper les racines trois par trois de manière qu'elles se trouvent assujetties, dans chaque groupe, à une même relation qui ne puisse subsister entre elles à l'aide d'aucun autre arrangement. Les nombres 7 et 8 qui satisfont à la condition $\frac{m^3\pm 1}{19}=$ entier, conduisent à partager les racines en trois groupes comme il suit :

$$2\cos\frac{2\pi}{10},\ 2\cos\frac{14\pi}{19},\ 2\cos\frac{16\pi}{19};\ 2\cos\frac{4\pi}{19},\ 2\cos\frac{10\pi}{19},\ 2\cos\frac{6\pi}{19};$$
$$2\cos\frac{8\pi}{19},\ 2\cos\frac{18\pi}{19},\ 2\cos\frac{12\pi}{19}.$$

Si l'on désigne par u une racine quelconque, et par y la somme des trois du même groupe, on aura les deux équations

$$u^8+u^7+8u^6-7u^5+20u^4+14u^3-16u^2-6u+2-y=0,$$
$$u^9+u^8-8u^7-7u^6+21u^5+15u^4-20u^3-10u^2+5u+1=0,$$

(*) *Voir* Legendre, Trigon. CX. Tm.

qui doivent admettre un facteur commun du troisième degré, déterminé à l'aide d'une équation aussi du troisième degré.

Un court calcul conduit en effet au commun diviseur

$$u^3-yu^2+(y^2-5)u+\frac{1}{y+1},$$

dans lequel y doit être déterminé par l'équation

$$y^3+y^2-6y-7=0\,;$$

au moyen des trois valeurs de y, on en conclut l'un après l'autre les trois facteurs dans lesquels se décompose l'équation en z. L'équation en y fait voir qu'à la place du dernier terme $\frac{1}{y-1}$ on peut écrire y^2-6.

En dernière analyse, l'équation $x^{19}-1=0$ se trouve résolue au moyen de ces trois autres

$$x^2-zx+1=0\,;\quad z^3-yz^2+(y^2-5)\,z+y^2-6=0\,;$$
$$y^3+y^2-6y-7=0.$$

(*La suite prochainement.*)

NORMALES AUX COURBES DU SECOND ORDRE.

Lorsque, par un point donné sur le plan d'une ellipse, il faut mener une normale à la courbe, on parvient, en général, à une équation du quatrième degré. Dans certaines situations du point, il y a, effectivement, *quatre* normales. Pour d'autres positions, le nombre des normales est seulement *trois;* et enfin, ce nombre peut encore se réduire à *deux*. L'examen de ces différents cas est l'objet de cet article. La solution que nous allons donner avec quelques développements, a été indiquée par *Legendre*, dans sa théorie des *fonctions elliptiques* (tome I, page 348).

Nous supposerons l'ellipse rapportée à ses axes $2a$, $2b$. L'excentricité sera $2c$.

1. Soient α, β, les coordonnées du point par lequel il faut mener la normale; et, x, y, les coordonnées du point de rencontre de la normale et de l'ellipse. Les valeurs des inconnues x, y, devront satisfaire à la fois aux deux équations : $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, $c^2xy+b^2\beta x-a^2\alpha y=0$. Cette dernière équation deviendra, en posant

$$\frac{a\alpha}{c^2}=f,\ \frac{b\beta}{c^2}=h:$$

$$xy+bhx-afy=0.$$

L'équation $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ donne $\dfrac{ay}{b(a+x)}=\dfrac{b(a-x)}{ay}$.

Et si l'on désigne par z la valeur inconnue de la fraction $\dfrac{ay}{b(a+x)}$, il en résultera $\dfrac{ay}{b(a+x)}=z$, $\dfrac{b(a-x)}{ay}=z$; d'où $ay-bzx=abz$, $azy+bx=ab$; et par suite :

$$y=\frac{2bz}{1+z^2},\quad x=\frac{a(1-z^2)}{1+z^2}.$$

Ces expressions de y et x en fonction de z, montrent que toute valeur réelle de z donne à chacune des coordonnées y, x, une valeur réelle; et de plus, quelle que soit la valeur de z, celle de y ne surpassera jamais b, et de même x ne peut devenir plus grand que a.

Actuellement, remplaçons y et x par $\dfrac{2bz}{1+z^2}$, $\dfrac{a(1-z^2)}{1+z^2}$, dans $xy+bhx-afy=0$, en ayant soin de supprimer le facteur ab commun à tous les termes de l'équation résultante, nous aurons :

$$\frac{2z(1-z^2)}{(1+z^2)^2}+\frac{h(1-z^2)-2fz}{1+z^2}=0,$$

ou

$$2z(1-z^2)+h(1-z^4)-2fz(1+z^2)=0.$$

Développant et divisant par h, que nous supposons différent de zéro, il viendra :

$$z^4+\frac{2(f+1)}{h}z^3+\frac{2(f-1)}{h}z-1=0.$$

Ou bien, en posant

$$\frac{2(f+1)}{h}=\mathrm{A},\ \frac{2(f-1)}{h}=\mathrm{B}:$$

$$z^4+\mathrm{A}z^3+\mathrm{B}z-1=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

L'équation (1) a deux racines réelles de signes contraires, puisque le dernier terme est négatif. Ainsi, on pourra mener au moins deux normales à l'ellipse par le point donné.

Lorsque l'équation (1) aura ses quatre racines réelles et inégales, il sera possible de mener *quatre* normales à la courbe. Si deux de ces racines réelles ont la même valeur, le nombre des normales se réduira à *trois*; et enfin, il y aura seulement *deux* normales, si l'équation proposée a deux racines imaginaires.

Pour distinguer les positions du point donné, dans ces différentes hypothèses, nous allons d'abord chercher les conditions qui doivent être remplies par les coefficients A, B, pour que les quatre racines de l'équation $z^4+\mathrm{A}z^3+\mathrm{B}z-1=0$, soient réelles et inégales.

2. Je nommerai m, n, p, q, les racines de l'équation $z^4+\mathrm{A}z^3+\mathrm{B}z-1=0$. Les quantités m, n, p, q, seront liées entre elles par les égalités :

$$m+n+p+q=-\mathrm{A} \ldots\ldots \quad (2).$$

$$(mn+pq)+(mp+nq)+(mq+np)=0 \ldots \quad (3).$$

$$mnp+mnq+mpq+npq=-\mathrm{B} \ldots \quad (4).$$

$$mnpq=-1 \ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Au moyen de ces relations il sera facile de déterminer les coefficients de l'équation du troisième degré, dont les racines sont les sommes $(mn+pq)$, $(mp+nq)$, $(mq+np)$. Cette équation aura la forme $t^3+A't+B'=0$, puisque la somme de ses trois racines est nulle. De plus, on voit que le coefficient A', qui se compose de la somme des produits deux à deux des binômes $(mn+pq)$, $(mp+nq)$, $(mq+np)$, est une fonction symétrique des quantités m, n, p, q, dont un terme est m^2np. C'est ce que nous écrirons ainsi : $A'=\Sigma.m^2np$. Or, la multiplication des égalités (2), (4), l'une par l'autre, donne

$$4mnpq+\Sigma.m^2np=AB.$$

On a donc :

$4mnpq+A'=AB$. D'où $A'=AB+4$, car $mnpq=-1$.

Le coefficient, $-B'$, est égal au produit des trois binômes

$$(mn+pq),\ (mp+nq),\ (mq+np).$$

Ce produit a pour expression $mnpq\Sigma m^2+\Sigma m^2n^2p^2$, en désignant par Σm^2, $\Sigma m^2n^2p^2$, les sommes $(m^2+n^2+p^2+q^2)$,

$$(\overline{mnp}^2+\overline{mnq}^2+\overline{mpq}^2+\overline{npq}^2).$$

Ainsi, on trouve d'abord : $B'=\Sigma m^2-\Sigma m^2n^2p^2$, puisque $mnpq=-1$. Mais, les égalités (2), (4), élevées chacune au carré, donnent, en ayant égard à l'égalité (3) : $\Sigma m^2=A^2$, $\Sigma m^2n^2p^2=B^2$. Donc, $B'=A^2-B^2$. Et par conséquent, l'équation cherchée est :

$$t^3+(AB+4)t+A^2-B^2=0\ldots\ldots(6).$$

Lorsque les racines t', t'', t''', de cette dernière équation seront réelles, il en sera de même des quatre racines m,n,p,q, de l'équation proposée

$$z^4+Az^3+Bz-1=0\ldots\ldots.(1).$$

En effet les racines de ces deux équations sont liées entre elles par les relations $mn+pq=t'$, $mp+nq=t''$, $mq+np=t'''$. On en déduit :

$$\left.\begin{aligned}(m-q)\,(n-p)&=t'-t''\\(m-p)\,(n-q)&=t'-t'''\\(m-n)\,(p-q)&=t''-t'''\end{aligned}\right\}\ldots.(7).$$

Supposons, maintenant, que m, q, soient les deux racines réelles et de signes contraires de l'équation (1). La différence $(n-p)$ des deux autres racines, aura une valeur réelle $\frac{t'-t''}{m-q}$.
Il est alors impossible que n et p soient des imaginaires conjuguées. Donc, les racines n et p seront des quantités réelles.

Si deux des racines, t', t'', t''', sont égales, l'équation (1) aura de même deux racines égales entre elles. Et réciproquement. C'est ce qui résulte évidemment des relations (7).

Et de là nous conclurons que l'équation $z^4+Az^3+Bz-1=0$, a ses quatre racines réelles et inégales, lorsque les coefficients A, B, satisferont à l'inégalité :

$$4\overline{(AB+4)}^3+27.\overline{(A^2-B^2)}^2<0.$$

Deux de ces racines deviendront égales, si

$$4\overline{(AB+4)}^3+27\,\overline{(A^2-B^2)}^2=0.$$

Deux des quatre racines seront imaginaires, lorsqu'on aura

$$4\overline{(AB+4)}^3+27\,\overline{(A^2-B^2)}^2>0.$$

3. L'inégalité $4\overline{(AB+4)}^3+27\overline{(A^2-B^2)}^2<0$, peut être transformée en une autre : $\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+1<0$, dont l'interprétation géométrique, dans la question qui nous occupe, est plus simple.

Pour faire cette transformation, posons

$$\overline{\left(\frac{A+B}{4}\right)}^2=r^3,\quad \overline{\left(\frac{A-B}{4}\right)}^2=s^3;$$

les quantités r, s, seront positives. Nous aurons

$$(A^2—B^2)^2=16^2.r^3.s^3. \quad \text{Et} \quad AB=4(r^3—s^3).$$

Par suite :

$$4(AB+4)^3+27(A^2—B^2)^2=4^4.(r^3—s^3+1)^3+27.\ 16^2.r^3s^3.$$

L'inégalité à transformer deviendra : $(r^3—s^3+1)^3+27.r^3s^3<0$. On en déduit immédiatement :

$$r^3—s^3+1+3rs<0.$$

Ou bien, parce que

$$r^3—s^3=(r—s)^3+3rs(r—s),$$

on aura : $\qquad (r—s)^3+1+3rs(r—s+1)<0.$

Mais, la somme $(r—s)^3+1$, des deux cubes $(r—s)^3, 1^3$, divisée par la somme, $r—s+1$, des premières puissances, donne, comme on sait, le quotient $(r—s)^2—(r—s)+1$, qui est toujours positif, quelles que soient les valeurs réelles de r et s. D'ailleurs, le facteur $3rs$, du produit $3rs(r—s+1)$ est positif, car les quantités r et s sont positives. Donc, la dernière inégalité obtenue revient à :

$$(r—s+1)[(r—s)^2—(r—s)+1+3rs]<0,$$

et se réduit à la suivante :

$r—s+1<0$, puisque le facteur $(r—s)^2—(r—s)+1+3rs$ est la somme de deux quantités positives.

Remplaçons r et s par leurs valeurs $\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$ et $\left(\frac{A—B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$, dans $r—s+1<0$. Il en résultera :

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}—\left(\frac{A—B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+1<0.$$

Lorsque les coefficients A, B, satisferont à cette inégalité, l'équation $z^4+Az^3+Bz—1=0$ aura ses quatre racines réelles et inégales. Elle aura deux de ses racines égales si

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}—\left(\frac{A—B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+1=0.$$

Deux des racines seront imaginaires, lorsqu'on aura

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+1>0.$$

4. Pour interpréter géométriquement ces différentes conditions, il suffira de substituer aux quantités

$$\left(\frac{A-B}{4}\right),\left(\frac{A+B}{4}\right),$$

les fonctions de coordonnées qu'elles représentent. On a, (n° 1) :

$$A=\frac{2(f+1)}{h},\ B=\frac{2(f-1)}{h};\ \text{d'où}\ \frac{A-B}{4}=\frac{1}{h},\ \text{et}\ \frac{A+B}{4}=\frac{f}{h}.$$

$$\text{Mais, } h=\frac{b\beta}{c^2}, f=\frac{a\alpha}{c^2}.\ \text{Donc, } \left(\frac{A-B}{4}\right)=\frac{c^2}{b\beta}, \text{ et} \left(\frac{A+B}{4}\right)=\frac{a\alpha}{b\beta}.$$

Par la substitution de ces valeurs, l'inégalité

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+1<0,$$

deviendra, $$\overline{\left(\frac{a\alpha}{b\beta}\right)}^{\frac{2}{3}}-\overline{\left(\frac{c^2}{b\beta}\right)}^{\frac{2}{3}}+1<0;$$

ou, $$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}-(c^2)^{\frac{2}{3}}<0.$$

Cette dernière inégalité exprime, en fonction des coordonnées α, β, du point que l'on donne, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit possible de mener par ce point, quatre normales à l'ellipse.

Si les coordonnées α, β, satisfont à l'équation

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+,(b\beta)^{\frac{2}{3}}-(c^2)^{\frac{2}{3}}=0;$$

deux des quatre normales se réduisent à une seule; c'est-à-dire que par le point donné on pourra, seulement, conduire trois normales à la courbe.

Enfin, le nombre des normales demandées se réduit à *deux*, lorsque les coordonnées α, β, donnent,

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}-(c^2)^{\frac{2}{3}}>0.$$

D'après cela, on voit que l'équation $(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}-(c^2)^{\frac{2}{3}}=0$, entre les coordonnées variables α, β, représente le lieu géométrique des points par lesquels on peut conduire trois normales à l'ellipse. On sait d'ailleurs que l'équation dont il s'agit est précisément celle de la *développée* de l'ellipse.

Tous les points situés dans l'intérieur de la surface que la développée termine ont des coordonnées satisfaisant à l'inégalité $(a\alpha)^{\frac{2}{3}}+(b\beta)^{\frac{2}{3}}-(c^2)^{\frac{2}{3}}<0$. Tous les points extérieurs à cette surface donnent lieu à l'inégalité contraire. Par conséquent, de chacun des premiers, on pourra conduire quatre normales à l'ellipse; et par chacun des autres, seulement deux normales. G.

(*La suite prochainement.*)

VOLUME DU TRONC DE CONE

par la méthode des coefficients indéterminés.

PAR M. IVON (LOUIS),
Elève du collége Charlemagne.

On a vu, en géométrie élémentaire, que le volume d'un tronc de cône a pour expression $\frac{1}{3}\pi h\ (R^2+Rr+r^2)$; on peut trouver ce volume par d'autres considérations et de la manière suivante.

Désignons par X le polynôme inconnu fonction de h, R et r qui doit exprimer le volume cherché; ce polynôme sera du troisième degré et homogène ; si on fait $h=o$, X doit devenir nul, quels que soient R et r, donc h est facteur commun à tous les termes de X ; ce facteur étant mis en évidence il viendra $X=hX'$.

Je dis maintenant que le nouveau polynôme X' ne contiendra plus h à aucun de ses termes.

Supposons un instant que R et r aient des valeurs particulières, et, ne considérant que h de variable, imaginons qu'on ordonne X' par rapport aux puissances décroissantes de h, il est facile de voir que le coefficient du premier terme devrait être positif ; car s'il était négatif on pourrait trouver une valeur positive de h assez grande pour que le résultat de sa substitution dans X' fut de même signe que le premier terme, et par conséquent négatif ; X', et par suite X qui est un volume, serait négatif, ce qui est impossible ; donc le coefficient du premier terme devrait être positif ; alors pour une valeur de h suffisamment grande X', surpasserait toute grandeur donnée, ce qui ne peut pas être ; en effet, imagiginons un cylindre ayant pour rayon de la base le rayon constant de la plus grande base du tronc de cône, et dont la hauteur variable resterait toujours la même que celle de ce tronc, il est clair que le dernier volume sera toujours plus petit que le cylindre, on aura donc : $X<\pi hR^2$, et par suite $X'<\pi R^2$ valeur déterminée et constante puisque R est supposé invariable ; X' ne pourrait donc pas surpasser toute grandeur donnée ; donc X' doit être indépendant de h ; c'est par conséquent un polynôme homogène du second degré et de la forme $aR^2+bRr+cr^2$, car il ne peut évidemment renfermer de puissances négatives de R et r ; puisqu'une de ces quantités s'évanouissant, le volume deviendrait infini (*).

(*) Comment démontrer que cette expression ne renferme pas des termes de la forme $R^{\frac{4}{3}}r^{\frac{2}{3}}$? objection qu'on peut faire à ce genre de démonstration. Tm.

On a donc $X = h(aR^2 + bRr + cr^2)$; a, b et c étant des quantités qu'il s'agit de déterminer. Si on fait $r=0$ le volume se réduit à celui d'un cône et est $= \frac{\pi}{3} R^2 h$; mais X doit être égal à cette expression. On a donc la relation $haR^2 = \frac{\pi}{3} R^2 h$ qui détermine a, et il vient $a = \frac{\pi}{3}$. Si on fait $R=0$, on trouve de même la relation $hcr^2 = \frac{\pi}{3} r^2 h$ d'où l'on tir $c = \frac{\pi}{3}$. On voit que a est égal à c, ce qu'on pouvait voir *à priori*.

Il ne reste plus que b à déterminer : or, si on fait $R=r$, le tronc deviendra un cylindre et on aura la relation $h(a+b+c)\, R^2 = \pi R^2 h$ qui donne $a+b+c=\pi$, mais $a+c = \frac{2\pi}{3}$, donc $b = \frac{\pi}{3}$. On a donc, en substituant ces valeurs dans X,

$$X = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2)$$

qui est bien l'expression trouvée en géométrie.

Ce que l'on vient de faire dans ce cas particulier, pourrait s'appliquer pour trouver les expressions des autres volumes ; et il est clair que cela revient à ce problème d'algèbre : déterminer les coefficients d'un polynôme connaissant les valeurs qu'il prend dans certains cas particuliers (*).

Observation. Cette méthode a une utilité mnémonique ; elle peut servir à se rappeler des formules, obtenues par d'autres moyens. Considérée logiquement, la méthode n'a pas le degré de certitude désirable. Le volume ou l'aire cherchés, sont peut-être des fonctions non algébriques des données de la question. L'aire de l'ellipsoïde de révolution en offre un exemple, entre mille autres. Tm.

(*) *Voir* t. I, p. 117.

RELATIONS D'IDENTITÉ

Et équations fondamentales relatives aux courbes du second degré.

(Suite, *voy.* t. I, p. 489.)

—

XIII. *Coordonnées des sommets :* ellipse et hyperbole.

En éliminant y entre les équations (2) et (8), on obtient une équation dont les racines sont les abscisses x des sommets, l'origine étant au centre. Effectuant l'élimination et ayant égard aux identités, il vient

$$mx^2\,[N^2+m\sin^2\gamma]\,[m^2x^2-4AL]=L^2\,(2A\cos\gamma-B)^2$$

changeant A en C, on aura l'équation en y.

Pour revenir à l'équation générale (1), où l'origine est quelconque, il faut remplacer x par $x-\frac{k}{m}$; faisant le calcul, et mettant au lieu de 4AL, sa valeur k^2-ml, l'équation résultante est divisible par m, et on obtient

$$\begin{gathered}(N^2+m\sin^2\gamma)\,[m^3x^4-4m^2kx^3+2mx^2\,(3k^2-2AL)\\ +4kx\,(2AL-k^2)]=L^2\,(2A\cos\gamma-B)^2-k^2l\,(N^2+m\sin^2\gamma)\end{gathered}\quad(9)$$

changeant A en C et k, l en k', l' on a l'équation en y.

Observation 1. Pour le cercle $N^2+m\sin^2\gamma=0$ et $2A\cos\gamma-B=0$; l'équation se réduit à l'identité $0=0$ comme cela doit être; tous les points du cercle sont des sommets.

Observation 2. L'équation (9) combinée avec l'équation analogue en y, peut servir à trouver le lieu géométrique des sommets, lorsqu'on assujettit les coefficients de l'équation (1) à des relations données.

Observation 3. $\dfrac{N^2}{m\sin^2\gamma}$ est invariable pour la même courbe (X, corol. 2); ce qui est utile à considérer lorsqu'il s'agit de trouver le lieu géométrique des sommets d'une même conique, prenant diverses positions, d'après une loi assignée.

XIV. *Coordonnées du sommet, et équation de l'axe principal dans la parabole.*

Dans l'équation (9), si l'on fait $m=0$, trois racines deviennent infinies, et la quatrième reste finie et donne l'abscisse du sommet de la parabole :

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{k^2 l N^2 - L^2(2A\cos\gamma - B)^2}{2k^3N^2} \\ \text{et l'ordonnée}\quad y &= \frac{k'^2 l' N^2 - L^2(2C\cos\gamma - B)^2}{2k'^3N^2} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Équation de l'axe principal $ky - k'x = ky' - k'x'$ (11)

y', x' sont les coordonnées du sommet; les substitutions effectuées ne donnent pas de simplifications.

Observation. Connaissant le sommet, la direction de l'axe et le paramètre de la parabole (IX), on peut décrire la courbe d'un mouvement continu.

XV. *Expression de la grandeur des diamètres:* ellipse et hyperbole.

Plaçant l'origine au centre, soit $y=px$ l'équation d'un diamètre; combinant cette équation avec celle de la courbe (2), on obtient, pour les coordonnées des points d'intersection des deux lignes,

$$x^2 = \frac{-L}{mP};\ y^2 = \frac{-p^2L}{mP};\ xy = \frac{\pm pL}{mP};\ P = Ap^2 + Bp + C$$

dans l'ellipse, m étant négatif, le trinôme P n'ayant point de racines réelles, conserve toujours le signe de A, qui est positif; et L étant positif, x^2 et y^2 sont positifs, et par conséquent x et y ont toujours des valeurs réelles; et si p est positif, x et y sont de même signe et xy positif. Il faut donc, dans le cas de l'ellipse, et pour p positif, écrire

$$xy = -\frac{pL}{mP};$$

dans l'hyperbole où m est positif, le trinôme P a deux racines réelles, et par conséquent il change deux fois de signe, en passant par zéro; donc x^2 et y^2 changent aussi deux fois de signe, en passant par l'infini. Nous reviendrons sur ce sujet ci-dessous (XVII).

Soit D la grandeur du demi-diamètre; on a donc

$$D^2 = y^2 + x^2 + 2xy\cos\gamma;$$

mettant à la place de y et de x leurs valeurs, on aura

$$D^2Pm^2 = L^2(p^2 \pm 2p\cos\gamma + 1)\ (12).$$

Coroll. Résolvant l'équation (12) par rapport à p, et égalant à zéro la partie sous le radical, on trouve pour D, les mêmes valeurs que l'on a obtenues pour les diamètres principaux (VIII). On a ainsi une seconde manière de parvenir à l'équation fondamentale (3).

XVI. *Système de diamètres conjugués égaux ou simplement égaux dans l'ellipse. Origine au centre.*

Soient $y = px$, et $y = qx$, les équations de deux diamètres, et par conséquent l'équation du système de ces diamètres est

$$y^2 - (p+q)x + pq = 0,$$

les deux diamètres étant de même longueur, l'équation (12) donne celle-ci

$$\frac{p^2+2p\cos\gamma+1}{Ap^2+Bp+C}=\frac{q^2+2q\cos\gamma+1}{Aq^2+Bq+C};$$

cette équation est satisfaite en faisant $p=q$; ainsi après avoir chassé les dénominateurs, et avoir passé tous les termes dans un même membre, l'équation sera divisible par $p-q$; effectuant ces opérations, il vient

$$(2A\cos\gamma-B)pq+(A-C)(p+q)+B-2C\cos\gamma=0 \quad (13).$$

Combinant cette équation, qui appartient aux diamètres simplement égaux, avec l'équation (5) aux diamètres conjugués, on en déduit pour les diamètres conjugués égaux

$$p+q=\frac{m+2CN}{m+2AN};\ pq=\frac{-2(BN+m\cos\gamma)}{m+2AN}.$$

Observation 1. Ayant construit ces deux diamètres conjugués, le grand axe de l'ellipse est bissectrice de l'angle aigu et le petit axe est bissectrice de l'angle obtus. La position de chaque axe principal est donc complétement déterminée; et on connaît aussi leurs grandeurs. On peut donc construire l'ellipse d'un mouvement continu.

Observation 2. L'équation (13) aux diamètres égaux jouit de propriétés importantes, que nous étudierons plus tard.

Observation 3. Dans deux ellipses semblables les angles que font entre eux les diamètres conjugués égaux, sont égaux et *vice versâ*.

XVII. *Système d'asymptotes ; hyperbole.*

Pour les asymptotes, on a

$$D=\infty \text{ et } Ap^2+Bp+C=0 \text{ ; d'où } p=\frac{-B\pm\sqrt{m}}{2A}.$$

L'équation qui exprime le système des asymptotes est donc

$$(2Ay+Bx+x\sqrt{m})\,(2Ay+Bx-x\sqrt{m})=0,$$

l'origine étant au centre ; revenant à une position quelconque de l'origine, l'équation de ce système devient

$$\left[2A\left(y-\frac{k'}{m}\right)+B\left(x-\frac{k}{m}\right)+\left(x-\frac{k}{m}\right)\sqrt{m}\right]$$
$$\left[2A\left(y-\frac{k'}{m}\right)+B\left(x-\frac{k}{m}\right)-\left(x-\frac{k}{m}\right)\sqrt{m}\right]=0,$$

ou bien, ayant égard à l'identité 10me

$$\left[2Ay+Bx+D+\left(x-\frac{k}{m}\right)\sqrt{m}\right]\left[2Ay+Bx+D-\left(x-\frac{k}{m}\right)\sqrt{m}\right]=($$

$$(2Ay+Bx+D)^2-\left(x-\frac{k}{m}\right)^2 m=4A(Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex)$$
$$+D^2-\frac{k^2}{m}=0;$$

mais

$$D^2-\frac{k^2}{m}=D^2-4AF+4AF-\frac{k^2}{m};\ \frac{ml-k^2+4mAF}{m}=\frac{4mAF-4AL}{m};$$

ainsi l'équation au système d'asymptotes est

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=\frac{L}{m}\ (14).$$

Coroll. 1. Toutes les hyperboles qui ont les mêmes asymptotes, lorsqu'on les rapporte aux mêmes axes, ont donc des équations qui ne diffèrent que par la valeur du terme tout connu, et pourvu que la fonction L ait toujours des valeurs de même signe, toutes ces hyperboles sont semblables et semblablement placées.

Coroll. 2. Deux coniques semblables et semblablement placées étant coupées par une troisième conique, le point de moyenne distance des points d'intersection de la première conique avec la troisième est le même que le point de moyenne distance des points d'intersection de la deuxième conique avec la troisième; c'est un théorème que nous démontrerons comme une conséquence immédiate de la théorie de l'élimination; un cas très-particulier du théorème est énoncé dans les éléments. Savoir : les parties d'une sécante interceptées entre l'hyperbole et ses asymptotes sont égales.

Coroll. 3. Résolvant l'équation (14), on trouve pour les équations des asymptotes

$$2A(my-k')+(B\pm\sqrt{m})(mx-k)=0,$$

ou bien

$$2C(mx-k)+(B\pm\sqrt{m})(my-k')=0.$$

XVIII. *Système de deux hyperboles conjuguées.*

L'équation (3) rapportée à une hyperbole, devient celle qui convient à l'hyperbole conjuguée, en y changeant le signe du second terme. Désignant par des lettres accentuées ce qui est relatif à cette seconde hyperbole, on aura

$$\frac{LN}{m^2}=-\frac{L'N'}{m'^2};\ \frac{L^2}{m^3}=\frac{L'^2}{m'^3};$$

Ces deux équations expriment que les hyperboles ont les mêmes axes, mais dans un sens inverse, l'axe réel de l'une est l'axe *imaginaire* de l'autre et *vice versâ*; on écrit que les deux courbes ont mêmes asymptotes; en exprimant que l'équation (14) leur est commune; ce qui donne ces équations de condition :

$$\frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}=\frac{C'}{C}=\frac{D'}{D}=\frac{E'}{E}=\frac{m(m'F'-L')}{m'(mF-L)}.$$

Les deux précédentes équations peuvent être remplacées par celles-ci :

$$\frac{N^3}{L}=-\frac{N'^3}{L'};\ \frac{N^2}{m}=\frac{N'^2}{m'}.$$

Observation essentielle. Pour que deux hyperboles soient semblables, il faut donc outre la condition énoncée (X), que $\frac{N}{L}$ et $\frac{N'}{L'}$, ou ce qui revient au même, que NL et N'L' aient même signe. Alors les hyperboles sont dans le même angle des asymptotes. (*La suite prochainement.*)

DISCUSSION

DES

CAS DOUTEUX DES TRIANGLES SPHÉRIQUES.

PAR M. LENTHERIC (neveu),
Professeur à l'École du génie de Montpellier.

—

La discussion de l'un des deux cas douteux se ramenant à celle de l'autre par la considération du triangle polaire, je me bornerai à examiner celui où l'on connaît deux côtés a,b et l'angle A opposé à l'un d'eux a.

Construisons le fuseau dont l'angle serait A, sur un des arcs prenons, à partir du sommet, une longueur AC$=b$ et du point C abaissons l'arc CD perpendiculaire sur l'autre côté de l'angle. Dans le triangle sphérique rectangle ACD *l'arc perpendiculaire* CD *sera aigu ou obtus suivant que l'angle donné* A *sera lui-même aigu ou obtus* (*fig.* 1).

Si l'arc CD est aigu, il sera le plus court de tous les arcs qu'on pourrait mener du point C dans le fuseau aux divers points de l'arc ABA' et les obliques augmenteront en *s'éloignant* du pied de l'arc perpendiculaire.

Si l'arc CD est obtus il sera au contraire le plus grand des arcs obliques menés au point C, et ces arcs obliques augmenteront en se *rapprochant* du pied de la perpendiculaire.

Cela posé : *Pour que le triangle proposé soit possible il faudra d'abord que le côté opposé* a *soit au moins égal à l'arc perpendiculaire, si l'angle donné* A *est aigu ; ou plus petit, si l'angle donné* A *est obtus.*

Cette première condition de possibilité est évidemment satisfaite lorsque l'angle donné A et le côté opposé a, aussi donné, sont de nature différente.

Si A et a étaient de même nature, le triangle rectangle ACD donnerait $CD = \frac{\sin A \sin b}{R}$, formule qui ferait connaître la valeur de CD, que l'on comparerait avec a pour s'assurer si la première condition de possibilité du triangle est satisfaite.

Je dis maintenant que :

A *et* a *étant de nature différente, le problème (s'il est possible) n'a qu'une solution.*

A *et* a *étant de même nature, le problème (s'il est possible) peut avoir une ou deux solutions.*

En effet, *soit* A *aigu et* a *obtus*, par exemple. Si l'on peut tracer dans le fuseau, par le point C, une oblique CB égale au côté a, elle ne pourra se trouver évidemment que du côté de celle des obliques extrêmes b ou $180°-b$ qui sera de même nature que a ; ainsi le problème ne peut avoir qu'une solution.

Cette solution existera pour $a <$ que celui des arcs b ou $180°-b$ de même nature ; *le triangle sera impossible* pour a au moins égal à celui des arcs b ou $180°-b$ de même nature.

Si l'on supposait A obtus et a aigu, on arriverait aux mêmes conclusions, seulement il faudrait renverser les signes parce que l'arc perpendiculaire CD serait obtus.

Soient A *et* a *aigus*. L'arc perpendiculaire CD étant alors aussi aigu, on voit qu'il pourra exister dans le fuseau une oblique CB′ égale à a du côté de celui des arcs b ou $180°-b$ qui sera aigu et à fortiori qu'il en existera alors une autre CB du côté de celui des deux arcs b ou $180°-b$ qui sera obtus.

Ainsi le problème pourra avoir deux solutions.

Ces deux solutions existeront pour $a <$ que celui des arcs b ou $180°-b$ de même nature; *une de ces deux solutions ne sera plus possible* pour a au moins égal à celui des arcs b ou $180°-b$ de même nature.

Le triangle sera impossible pour $a <$ que l'arc perpendiculaire CD.

Si l'on supposait A et a obtus on arriverait aux mêmes conclusions, seulement il faudrait renverser les signes, parce que l'arc perpendiculaire CD serait obtus.

ÉLIMINATION

ENTRE DEUX ÉQUATIONS DU 2e DEGRÉ A DEUX INCONNUES.

PAR M. MERLIEUX (ÉDOUARD).

Soient les deux équations suivantes entre lesquelles il faut éliminer y :

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$
$$A'y^2 + B'xy + C'x^2 + D'y + E'x + F' = 0$$

ou bien, ordonnant par rapport à y,

$$Ay^2 + (Bx + D)y + Cx^2 + Ex + F = 0$$
$$A'y^2 + (B'x + D')y + C'x^2 + E'x + F' = 0$$

Posant

$$M = Bx + D;\quad M' = B'x + D';\quad N = Cx^2 + Ex + F;$$
$$N' = C'x^2 + E'x + F',$$

on peut mettre ces équations sous la forme

$$Ay^2 + Mx + N = 0 \qquad A'y^2 + M'y + N' = 0$$

Multipliant la première par A′, la seconde par A, et retranchant le dernier résultat du premier, il vient

$$(MA'-AM')y+NA'-AN'=0 \qquad \text{d'où } y=\frac{AN'-A'N}{MA'-AM}$$

Remplaçant M, M′, N, N′, par leurs valeurs :

$$y=\frac{A\,(C'x^2+E'x+F')-A'\,(Cx^2+Ex+F)}{A'\,(Bx+D)-A\,(B'x+D')}$$

$$=\frac{(AC'-A'C)\,x^2+(AE'-A'E)\,x+(AF'-A'F)}{(A'B-AB')\,x+(A'D-AD')}$$

Désignons, avec Bezout, $(AC'-A'C)$ par la notation $[AC']$; de même $(AE'-A'E)$ par $[AE']$, et ainsi des autres ; on a

$$y=\frac{[AC']\,x^2+[AE']\,x+[AF']}{[A'B]\,x+[A'D]};$$

remplaçons y par sa valeur, dans la première équation,

on aura $$A\left[\frac{[AC']\,x^2+[AE']\,x+[AF']}{[A'B]\,x+[A'D]}\right]^2$$

$$+(Bx+D)\left[\frac{[AC']\,x^2+[AE']\,x+[AF']}{[A'B]\,x+[A'D]}\right]+Cx^2+Ex+F=0$$

$$A\,\big[[AC']\,x^2+[AE']\,x+[AF']\big]^2$$
$$+(Bx+D)\,\big[[AC']\,x^2+[AE']\,x+[AF']\big]\,\big[[A'B]\,x+[A'D]\big]$$
$$+(Cx^2+Ex+F)\,\big[[A'B]\,x+[A'D]\big]^2=0$$

Ordonnant par rapport à x, et simplifiant les coefficients, il vient, après avoir divisé par A,

$$\big[[AC']^2-[AB'][BC']\big]\,x^4$$
$$+\big[\,2[AC'][AE']-[AB']\,([BE']-[CD'])-[BC']\,[AD']\big]\,x^3$$
$$+\big[[AE']^2+2[AC'][AF']-[AB']([BF']+[DE'])-[AD']([BE']-[CD'])\big]\,x^2$$
$$+\big[2\,[AF']\,[AE']-[AD']\,([BF']+[DE'])-[AB']\,[DF']\big]\,x$$
$$+\big[[AF']^2-[AD'][DF']\big]=0\ (*).$$

(*) Bezout, *Théorie générale des équations*, p. 238. Dans le coefficient de x de cet auteur, il faut mettre ef' au lieu de $e'f$. Tm.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 35 (p. 395, t. I).

PAR M. BERTOT (H.),
Elève du Collége Louis-le-Grand.

—

Soit SABCD (*fig.* 2) l'angle polyèdre de l'octaèdre régulier, et *abcd* la section faite dans cet angle par un plan quelconque; je dis que l'on a :

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha'}=\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta'},$$

en désignant par α, α', β, β' les lignes Sa, Sc, Sb, Sd.

En effet cette égalité revient à celle-ci :

$$\frac{\alpha+\alpha'}{\alpha\alpha'}=\frac{\beta+\beta'}{\beta\beta}$$

Mais les angles ASC et BSD sont droits; donc les deux membres de la dernière égalité sont les réciproques des côtés des carrés inscrits dans les triangles aSc, bSd et dont l'un des angles coïncide avec l'angle droit du triangle correspondant. Donc en désignant ces côtés par x et y, il faut faire voir que l'on a : $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}$ ou $x=y$.

Observons que la ligne SO étant à la fois dans les plans ASC et BSD se trouve au point de rencontre des lignes ac et bd, et, que, de plus, elle est bissectrice des angles ASC et BSD.— Mais dans un triangle rectangle la bissectrice de l'angle droit est la diagonale du carré dont l'un des angles coïncide avec cet angle droit. — Donc les deux carrés x^2 et y^2 ont la même diagonale, donc ils sont égaux. — C. Q. F. D (*).

(*) Ce même genre de théorèmes existe encore pour d'autres pyramides et même pour le cône. Nous y reviendrons. Tm.

SOLUTION DU PROBLÈME 54 (p. 521, tome I).

SURFACES ALGÉBRIQUES

Sur lesquelles on ne peut tracer qu'une seule circonférence de cercle.

PAR M. ROCHE,
Professeur de l'artillerie navale.

On trouvera des surfaces susceptibles de remplir cette condition dans les deux équations générales suivantes

$$a^m(y^2+x^2)+z^nx^2=a^nb^2,\quad a^n(y^2+x^2)+z^nxy=a^nb^2.$$

D'après la forme de ces équations, il est évident qu'en y faisant $z=0$, on a l'équation d'un cercle $y^2+x^2=b^2$, ce qui indique qu'elles sont coupées suivant une circonférence de cercle par le plan horizontal des xy. Les cas les plus simples à considérer sont ceux ou $n=1$; on a deux surfaces du troisième degré dont les équations sont :

$$a(y^2+x^2)+zx^2=ab^2,\quad ay^2+ax^2+zxy=ab^2.$$

Pour démontrer qu'elles ne peuvent être coupées suivant un cercle par aucun autre plan que celui des xy, on y substituera pour z une expression de la forme $mx+ny+r$; le résultat de la substitution donnera l'équation de la projection horizontale de la section faite par le plan dont l'équation est $z=mx+ny+r$. On aura pour la première équation

$$ay^2+nx^2y+mx^3+(r+a)x^2-ab^2=0.$$

Pour que cette équation donne celle d'une courbe du second degré, il faudra ou qu'elle soit le système d'une droite et d'une courbe, ou qu'elle se réduise immédiatement à l'équation d'une courbe du second dégré par l'évanouissement des coefficients des termes d'un degré supérieur. Pour reconnaître le premier cas, représentons par $y=px+q$ l'équation de la droite. On divisera le premier nombre de l'équation précédente par $y-px-q$, on aura pour quotient $ay+nx^2+apx+aq$ et pour reste le polynôme

$$(m+np)x^3+[(a(1+p)+nq)+r]x^2+2apqx+a(q^2-b^2)$$

Cette expression devant s'évanouir quel que soit x, tous les coefficients de x et le terme constant devront être nuls, ce qui donnera quatre équations, d'où l'on déduira

$$q=\pm b\,,\ p=0\,,\ m=0 \text{ et } r=-a\mp nb\,;$$

d'après ces valeurs, on verra que le plan dont l'équation est $z+a\pm nb=0$ coupera la surface suivant une droite dont l'équation avec celle du plan sera $y=\pm b$ et une courbe du second degré dont l'équation sera

$$nx^2+a(y-b)=0$$

Cette équation sera celle d'une parabole ; ce qui prouve que pour que l'équation de la section représente une courbe du second degré, il faut que l'on ait immédiatement $p=0$, $m=0$; dans ce cas l'équation de la section se réduit à

$$ay^2+(r+a)\ x^2=ab^2\,;$$

et pour que cette équation, qui représente une ellipse, soit celle d'un cercle, il faut que l'on ait $r=0$; donc le plan des xy est le seul dont la section avec la surface donne un cercle.

En discutant cette surface, on verra qu'elle contient quatre droites dont les équations sont

$$y=\pm b\,,\ x=0\,,\ y=\pm b,\ z=a\,,$$

et qu'elle s'étend à l'infini dans le sens des trois axes. Quant à la seconde équation du troisième degré, elle deviendra par la substitution de la valeur de z

$$(a+nx)y^2+(mx^2+rx)y+ax^2-ab^2=0$$

En la divisant comme la précédente par le polynôme

$$y-px-q$$

on aura pour quotient

$$(a+nx)\ y+\ (m+pn)\ x^2+\ (r+ap+nq)\ x+aq$$

et pour reste le polynôme

$$p(pn+m)x^3+[a+p(r+ap+nq)+q(m+pn)]x^2+[apq+q \\ (r+ap+nq)]x+aq^2-ab^2=0$$

En égalant à zéro les coefficients de cette equation, on aura

$$p=\pm 1,\ m=\pm n,\ q=\pm b,\ r=nb\pm 2a\,;$$

ainsi, le plan dont l'équation sera $z=m\ (x\pm y)\ \pm 2a\pm mb$ coupera la surface suivant des droites dont les équations seront $y=\pm x\pm b$, et des hyperboles dont les équations seront $(a\pm mx)\,y\pm ax\mp ab=0$. Pour donner une courbe circulaire il faudra, comme pour la précédente, faire

$$m=0,\ n=0,\ r=0.$$

Cette surface comprendra huit lignes droites, savoir : quatre parallèles à l'axe des z dont les équations seront

$$x=0, y=\pm b\,;\ y=0,\ x=\pm b,$$

et quatre autres droites inclinées de 45° aux axes des x et des y, dont les équations seront

$$y=\pm b,\ x=\mp\frac{bz}{a}\,;\ x=\pm b, y=\mp\frac{bz}{a}\,;$$

les quatre plans verticaux représentés par l'équation

$$y=\pm x\pm b$$

avec toutes les combinaisons des signes couperont la surface, suivant trois droites dont deux parallèles à l'axe des z.

Cette surface s'étendra à l'infini dans le sens des trois axes.

Mais pour donner un exemple de la discussion d'une des surfaces comprises dans les formules générales, je choisirai celui de la première espèce ou $n=2$, ce sera une surface du quatrième degré représentée par l'équation

$$a^2y^2+a^2x^2+z^2x^2-a^2b^2=0$$

Pour démontrer que cette surface ne peut être coupée suivant un cercle que par le plan des xy, il faut employer une autre méthode que celle qu'on a employée précédemment qui entraînerait dans des calculs trop compliqués. La substitution de la valeur de z,

$$z=mx+ny+r$$

donnera l'équation

$$\begin{gathered}(a^2+n^2x^2)y^2+2n(mx^3+rx^2)y+m^2x^4+2mrx^3\\+(a^2+r^2)\,x^2-a^2b^2=0\end{gathered}$$

En résolvant cette équation par rapport à y, j'aurai

$$y=\frac{-nx^2(mx+r)\pm\sqrt{-a^2(m^2+n^2)x^4+a^2(b^2n^2-a^2-r^2)x^2-2a^2mrx^3+}}{a^2+n^2x^2}$$

Pour que cette équation puisse, dans une de ses racines, représenter une courbe du second degré, il faut d'abord que le numérateur de son expression soit divisible par $a^2+n^2x^2$; or, la partie rationnelle n'est point divisible par $(a^2+n^2x^2)$, parce que le facteur du second degré est monôme, et que le facteur binôme n'est que du premier degré ; la partie comprise sous le radical ne peut être divisible non plus par le carré de $a^2+n^2x^2$ ou $n^4x^4+2a^2n^2x^2+a^4$, par la raison que le premier et le dernier terme de son expression ont des signes différents. La réduction ne peut donc s'opérer que dans le cas où le coefficient n serait nul, puisque le radical, à cause des signes contraires de ses termes extrêmes, ne peut être un carré parfait d'un polynôme du second degré; mais la supposition de $n=0$ réduit la valeur de y à

$$y=\pm\frac{\sqrt{-a^2m^2x^4-a^2(a^2+r^2)x^2-2a^2mrx^3+a^4b^2}}{a^2}$$

et pour que cette équation se réduise à une équation du second degré en x et y, il faut que l'on ait encore $m=0$, et la valeur de y se réduira à

$$y=\pm\frac{\sqrt{a^2b^2-(a^2+r^2)x^2}}{a}$$

Dans ce cas, l'équation du plan sécant devient à $x=r$, la section est une ellipse qui ne peut se réduire à un cercle qu'en faisant $r=0$, ce qui donne $y=\pm\sqrt{b^2-x^2}$.

L'équation rationnelle de la section est

$$a^2y^2+(a^2+r^2)\,x^2=a^2b^2\,;$$

à mesure que r augmente les axes parallèles aux y des sections elliptiques restent constants et égaux à $2b$; mais les axes parallèles aux x exprimés par $\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+r^2}}$ diminuent constamment, de sorte que lorsque $r=\infty$, l'axe parallèle aux x ou le petit axe est zéro, et l'ellipse se réduit à une ligne parallèle à l'axe des y et égale à $2b$.

Si l'on coupe la surface par des plans parallèles à l'axe des yz, en substituant pour x, une valeur $x=p$, l'équation de la section parallèle au plan des yz deviendra

$$a^2y^2+p^2z^2=a^2\,(b^2-p^2)$$

Pour que cette section soit réelle, p doit être moindre que b, quel que soit son signe, ce qui indique que la surface est limitée dans le sens des x positives et négatives; si l'on fait $p=0$, l'équation de la section se réduit à $y^2=b^2$, ce qui représente le système de deux droites parallèles dans le plan des xz et dont les équations sont

$$y=+b, y=-b$$

Si p est plus petit que b, la section est une ellipse dont les deux axes représentés par $2\sqrt{b^2-p^2}$, $\frac{2a\sqrt{b^2-p^2}}{p}$ diminuent constamment.

Si $p=+b$, l'équation se réduit à $a^2y^2+p^2z^2=0$, qui ne peut être satifaite que par $y=0$, $z=0$, c'est-à-dire par les équations d'un point. Ce sont les deux limites de la courbe dans le sens de l'axe des x correspondant à $x=+b$, $x=-b$.

Si l'on coupe la surface par des plans parallèles au plan des xz, en faisant $y=q$ dans l'équation, elle devient

$$(a^2+z^2)x^2=a^2(b^2+q^2) \text{ ou } x=\pm a\sqrt{\frac{b^2-q^2}{a^2+z^2}}.$$

Cette équation représente une courbe analogue à l'hyperbole, car l'axe des x est une double asymptote correspondant à $z=\infty$, qui donne $x=0$; la plus grande valeur de x correspondant à $z=0$, est $x=\sqrt{b^2-q^2}$. Lorsque $q=0$, c'est-à-dire lorsque le plan sécant est celui des xz, on a $x=\pm b$; mais la surface est limitée dans le sens des y positives et négatives puisque q ne peut être plus grand que b, abstraction faite du signe.

Lorsque $q=\pm b$, on a $x=0$, et les sections par les plans

$$y=+b, \text{ et } y=-b$$

se réduisent chacune à une seule ligne droite.

La figure de la surface est donc celle d'un tuyau qui s'étend à l'infini dans le sens des z positives et négatives. Sa coupe par le plan des yz représente deux droites parallèles et sa coupe suivant le plan des yz, représente une courbe quasi fermée à quatre branches qui se touchent suivant l'axe des x par des points de rebroussement, et qui se rapprochent à l'infini en haut et en bas des z; la section du tuyau se réduit, à la limite, à une ligne droite.

SOLUTION DU PROBLÈME VII (page 122).

PAR M. VIDAL,
Elève au Collége de Montpellier.

Construire les axes d'une hyperbole équilatère dont on donne quatre points.

Pour arriver à la solution de ce problème, je m'appuie sur un théorème qui a été démontré page 423 :

Si deux points sont les milieux de deux cordes d'une hyperbole équilatère, et si, par chacun d'eux, on mène une parallèle à l'autre corde, les deux points, le point de rencontre des deux parallèles, et le centre de la courbe sont sur une même circonférence.

Soient A, B, C, D (*fig.* 3), les quatre points donnés, je joins AB et AD, j'aurai là deux cordes de l'hyperbole; si donc j'applique à ces deux cordes, la construction indiquée dans l'énoncé ci-dessus, je trouverai une circonférence sur laquelle devra être le centre de l'hyperbole. Je joins BC et DC, et je répète pour ces deux cordes la construction précédente, j'aurai une nouvelle circonférence sur laquelle devra se trouver le centre; les deux points communs à ces deux circonférences pourront être considérés comme centres de la courbe. Parmi ces deux points d'intersection, l'un, le point Q, n'est autre chose que le point d'intersection des quatre parallèles menées par le milieu des cordes AD, AB, BC, CD; ces quatre parallèles doivent évidemment se rencontrer au même point sur le milieu de DB. En prenant cette solution, on voit que les deux points D et B, seront les extrémités d'un même diamètre, et que les cordes AD, AB seront des cordes supplémentaires, ainsi que BC et CD; or, il est évident que lorsque les données seront situées de cette manière, le centre devra se trouver au point de rencontre des deux parallèles menées ainsi qu'il a été dit plus haut.

Pour plus de généralité, prenons le point o pour le centre de la courbe, joignons le point o avec le point E, milieu de BC, nous aurons là la direction d'un diamètre; par le centre menons oF, parallèle à BC, ces deux diamètres formeront un système de diamètres conjugués dont nous ne connaissons pas la longueur; tout ce que nous savons, c'est que si nous désignons leur longueur par a', l'équation de la courbe rapportée à ces deux diamètres sera :

$$y^2 - x^2 = - a'^2.$$

Nous connaissons les coordonnées du point B de la courbe, par conséquent nous voyons, d'après l'équation de la courbe, que si nous construisons un triangle rectangle dont l'hypoténuse soit l'abscisse du point B et un côté, l'ordonnée du même point, l'autre côté sera a'. L'équation de la courbe ci-dessus nous montre aussi que l'abscisse d'un point quelconque de la courbe est toujours plus grande que l'ordonnée du même point, on ne sera donc pas embarrassé pour savoir quelle est celle des deux lignes BE et oE qui est l'abscisse du point B, et quelle est celle qui en est l'ordonnée; il est urgent de faire cette distinction, parce que nous ne savons pas si l'axe des x est oE ou oF. Nous construisons donc sur oE le triangle rectangle oEG, a' sera égal à GE. Sur la direction des diamètres portons des longueurs oF, oH, égales à GE, sur ces deux lignes construisons le parallélogramme oFIH, oI sera une asymptote de la courbe. En menant par le point o une perpendiculaire à cette droite, nous aurons la direction de l'autre asymptote.

Connaissant les asymptotes, nous aurons la direction des axes en divisant les angles de ces deux droites en deux parties égales; il s'agit d'en avoir la longueur. Pour cela, par le point B, je mène BM, perpendiculaire à l'axe, jusqu'à la rencontre des deux asymptotes en M et L; sur ML, comme diamètre, je décris une demi-circonférence, par le point B, je mène BN, perpendiculaire à LM, jusqu'à la rencontre de cette circonférence; d'après un théorème connu on voit que BN sera la longueur des axes. Je porte donc sur leurs directions des longueurs oT, oT′, oR, oR′, égales à BN, et le problème est déterminé.

Nota. Si on cherche la circonférence qui passe par les milieux de AD, DC et AC, on voit qu'elle passe aussi par le point o.

EXTRAITS DE JOURNAUX.

Comptes rendus mensuels de l'Académie de Berlin
(1842, de janvier à juillet inclusivement).

Poggendorff. Méthode pour déterminer les maxima relatifs des courants dans deux chaînes voltaïques, suivie d'un essai d'explication de la polarisation galvanique (6—19).

Dirksen. Sommation de séries infinies, en A sin. n_1x et A′ cos n_2x; n_1, n_2, etc., étant les racines d'une équation transcendante, et les coefficients A et A′ sont donnés en intégrales définies.

On rencontre ces séries dans la mécanique céleste, et Fourier les a trouvées, en calculant le mouvement de la chaleur dans une sphère solide (Laplace, *Méc. cél.*, liv. IX, ch. 4; Fourier, *Th. de la chaleur*, § 290, *page* 348). Poisson a fait une objection contre la solution de Fourier; cette solution suppose une fonction entièrement arbitraire de la distance d'un point au centre de la sphère; or, rien ne prouve, dit Poisson, que la série d'une forme *particulière* qui exprime la valeur de l'inconnue, à l'origine du temps, puisse exprimer une fonction *arbitraire* de la distance au centre (*Th. mat. de la chaleur*, *page* 172). Dans le raisonnement que Poisson substitue à celui de Fourier, on suppose seulement une fonction assujettie à satisfaire à une certaine équation aux différences partielles. Or, objecte, M. Dirksen, une telle fonction n'a pas non plus toute la généralité exigée et n'étant pas entièrement arbitraire, ne peut pas représenter l'état quelconque calorifique du corps. Il démontre la série de Fourier d'une manière directe purement analytique, à l'aide de la théorie des résidus de M. Cauchy; théorie qu'on commence à cultiver et qui est extrêmement avantageuse, comme moyen algorithmique, pour simplifier les énoncés des résultats (20 à 29).

Lejeune-Dirichlet. *Théorème.* α_1, α_2, $\alpha_3 \ldots \alpha_m$ étant m nombres irrationnels; il existe toujours un système de $m+1$ nombres entiers, x_0, x_1, $x_2 \ldots x_m$ positifs ou négatifs, tels que le polynôme $x_0+\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots+\alpha_m x_m=y$ devienne plus petit que le plus grand de ces nombres entiers, élevé à la puissance—m

Démonstration. Par la méthode des fractions continues, le théorème est connu lorsque $m=1$; supposons donc $m>1$; soit δ un nombre quelconque; on peut toujours satisfaire à l'inégalité $(2n)^{-m}<\delta$; n étant un nombre entier; qu'on prenne pour x_1; x_2;.... x_m; un quelconque des nombres entiers renfermés dans la progression arithmétique

$-n$; $-(n-1)$; $-(n-2)\ldots-1$, 0; 1, 2; $3\ldots n$; alors $y-x_0$

prendra $(2n+1)^m$ valeurs ; on peut pour chacune de ces valeurs déterminer une valeur entière de x_0 de telle sorte que y devienne une quantité positive plus petite que l'unité ; parmi ces $(2n+1)^m$ fractions, il y en aura donc au moins 2 compris entre les $2n^m$ intervalles que fournit la progression arithmétique 0, $(2n)^{-m}$; $2.(2n)^{-m}$; $3.(2n)^{-m}$...., 1; soient y', y'', deux de ces valeurs ; $y'-y''$ est donc compris et est donc moindre que $(2n)^{-m}$ et par conséquent moindre que δ ; mais $y'-y''$ est une expression de même forme que y et dans laquelle les quantités x_1 ; x_2 ; x_3.... ne deviennent pas simultanément nulles ; on a donc pour x_0, x_1, x_2 ....x_m des nombres entiers tels que l'expression y devient plus petite que $(2n)^{-m}$; s le plus grand de ces nombres entiers est au-dessus de $2n$; donc $y < s^{-m}$; et n étant un nombre entier indéterminé, il existe donc une infinité de manières de remplir cette condition ; C. Q. F. D.

Nous reviendrons sur ce théorème si important dans la doctrine des nombres irrationnels.

18 juillet (*page* 233). *Essai sur la hauteur moyenne des continents,* par M. A. de Humboldt. Il s'agit, dans cet important mémoire de l'illustre voyageur, de déterminer la hauteur du centre de gravité des volumes des continents (non pas des masses) au-dessus du niveau de l'Océan. Nous devons nous contenter d'en extraire quelques nombres.

Hauteur moyenne des plaines de la France (passant par Bourges, Chartres, Nevers)	80 toises.
Les Pyrénées distribuées sur ces plaines, l'élèveraient de	18
Les Alpes, le Jura, les Vosges, de	20
Les plateaux du Limousin, de l'Auvergne, des Cévennes, de l'Aveyron, du Forez, du Morvan, de la Côte-d'Or, de	18
Hauteur moyenne de toute la France, au plus.	136 toises.

Hauteur moyenne de l'Europe.		205 mètres
id.	Amérique septentrionale.	228
id.	id. méridionale.	345
id.	Asie.	351

On ne possède pas de données suffisantes pour déterminer la hauteur de l'Afrique. Laplace avait conjecturé que la hauteur des continents ne surpassait pas 1000 mètres. (*Mécanique céleste*, t. V, liv. XI, ch. 1, *page* 3) ; cette évaluation qui a donné lieu aux recherches de M. de Humboldt, est trop forte de presque les deux tiers.

PROBLÈMES ET THÉORÈMES.

58. Une équation ayant m racines réelles, si on en retranche l'équation dérivée, le reste égalé à zéro, aura au moins $m - 1$ racines réelles.

59. Entre tous les prismes de même base et de même hauteur, le prisme droit a la plus grande aire.

60. Si, d'un point situé sur une surface algébrique du degré m, on abaisse des perpendiculaires sur un système de n droites, le centre de moyenne distance des pieds des perpendiculaires est sur une surface aussi de degré m ; si le point est sur une ligne d'intersection de deux surfaces des degrés m et p, le centre de moyenne distance des pieds des perpendiculaires est aussi l'intersection de deux surfaces des mêmes degrés, m et p.

61. Deux pyramides convexes qui ont les faces triangulaires égales, chacune à chacune et semblablement disposées, sont égales (Catalan).

SUR LES CENTRES DE GRAVITÉ.

PAR M. FERRIOT,
Ancien recteur de l'Académie de Grenoble.

Je me propose de montrer, par quelques exemples simples, comment la règle de *Guldin* et la méthode des projections peuvent être employées, soit séparément, soit simultanément, à la recherche de certains centres de gravité, sans passer par le *calcul intégral*, et de faire descendre ainsi, dans les éléments, certaines propositions, qui, jusqu'ici, ont été regardées comme transcendantes.

Aujourd'hui que chaque branche des mathématiques a pris un développement immense et que les diverses propositions qui composent chacune d'elles sont éparses dans une infinité d'ouvrages, ou cachées dans des formules concentrées, si concentrées que personne ou presque personne ne les réduit en nombres, j'ai pensé que l'époque était peut-être arrivée, où il serait nécessaire de coordonner ces propositions, de les soumettre à un ordre systématique tel, que se rattachant à des propositions, non-seulement connues, mais élémentaires, elles soient entraînées à leur suite dans le torrent de la circulation des idées et forcées par là de devenir fécondes.

C'est donc pour indiquer le but, plutôt que pour l'atteindre, que je vais parcourir quelques exemples. J'emploierai la règle de Guldin (*) ou, ce qui est la même chose,

(*) Guldin (Paul), jésuite, né à St-Gall en 1577, mort à Gratz en 1637. Le théorème qui porte son nom, mais qui était déjà énoncé par Pappus, se trouve la notion du centre des moyennes distances, parce que cette notion est élémentaire, comme l'ont fait voir plusieurs géomètres et notamment *Lhuilier* de Genève, et, quant à l'idée de projection, elle l'est plus encore, puisqu'un très-grand nombre de simples ouvriers, sans avoir fait d'études spéciales, en font souvent un usage très-fin et très-délicat.

1. *Centre de gravité d'un arc de cercle.*

La distance du centre de gravité d'un arc au centre du cercle est le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers sont l'*arc*, la *corde* et le *rayon*. De sorte qu'on a toujours :

$$\text{arc} : \text{corde} :: \text{rayon} : og,$$

og étant la distance du centre du cercle au centre de gravité de l'arc.

En effet, soit amb un arc quelconque de cercle dont la corde ab est parallèle au diamètre cd (*fig.* 10).

Si on fait tourner cet arc autour de ce diamètre, comme axe, on obtiendra une zône dont la mesure est, comme on sait, égale à une circonférence de grand cercle multipliée par la hauteur de cette zone, donc

$$\text{zone } amb = 2r\pi \times \text{corde};$$

d'autre part, og étant la distance du centre de gravité de l'arc à l'axe de rotation, on aura, d'après la règle de Guldin,

$$\text{arc. } amb \times 2\pi . og = 2r\pi \times \text{corde}$$

d'où, distance cherchée, ou $og = \dfrac{r \times \text{corde}}{\text{arc}}$, ce qui justifie l'énoncé.

---

dans l'ouvrage : *Centrobaryca seu de centro gravitatis trium specierum quantitatis continuæ*, lib. IV, Vienne, 1635-42, 2 vol. in-fol. Ces trois *species* sont les relations entre les figures, les centres de gravité, les aires et volumes.

Si l'arc *amb* est une demi-circonférence, on a

$$\text{corde} = 2r,\ \text{arc} = r\pi,\ \text{et par conséquent } og = \frac{2r}{\pi}. \quad (2)$$

Donc la circonférence décrite du rayon *og* est égale au double du diamètre du demi-cercle tournant.

II. *Centre de gravité d'un secteur de cercle.*

Soit *aob* un secteur quelconque (*fig.* 11); g', son centre de gravité qui se trouve évidemment sur le rayon qui partage l'angle *aob* en deux parties égales; enfin, soit $g'k$ la perpendiculaire abaissée sur l'axe *ob*, on aura :

$$\text{secteur } aob = \frac{\text{arc } ab}{2} \times r$$

puis, solide engendré par ce secteur autour de l'axe de rotation *ob*, $= \frac{2}{3}\pi . r^2 h$, *h* étant la hauteur de l'arc *ab*.

Connaissant le solide engendré par le secteur, ainsi que le secteur lui-même, la règle de *Guldin* donnera :

$$\frac{1}{2}\text{arc. } r \times 2\pi g'k = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

d'où

$$g'k = \frac{2}{3} . \frac{rh}{\text{arc}} \ (3).$$

Si le secteur devient un demi-cercle, $h = 2r$, $\text{arc} = r\pi$, le point *k* tombe en *o*, et $g'k$, rayon de la circonférence que décrit le centre de gravité du secteur, devient le rayon de la circonférence que décrit le centre de gravité du demi-cercle, de sorte que si ce dernier s'appelle og', on aura

$$og' = \frac{2}{3} \times \frac{2r}{\pi} \ (4).$$

Remarque I. Si on compare les expressions (2) et (4), on voit que $og' = \frac{2}{3}og$, ce qui signifie que la distance du centre de gravité du demi-cercle, au centre de ce cercle, n'est que les deux tiers de la distance du centre de gravité de la demi-circonférence au même centre.

Remarque II. On pourrait arriver autrement au résultat précédent : pour cela considérons le secteur *aob* comme formé par la somme d'une infinité de triangles isocèles dont le sommet commun est au centre et dont la hauteur est le rayon. Le centre de gravité de chacun de ces triangles étant aux $\frac{2}{3}$ du rayon, le centre de gravité du secteur n'est autre chose que le centre de gravité d'un arc semblable à celui qui sert de base au secteur proposé, et décrit d'un rayon égal aux $\frac{2}{3}$ du rayon r. Donc, quand la position d'un de ces centres est connue, l'autre l'est aussi, et même chacun de ces centres, peut se construire sans le secours de l'autre.

III. *Centre de gravité d'un segment de cercle.*

Le centre de gravité du segment *bmd* (*fig.* 12) peut évidemment se déduire du centre de gravité du secteur *bomd* combiné avec celui du triangle *bod*; mais l'emploi de la règle de Guldin le fournit plus rapidement et conduit à

$$gk = \frac{1}{12} \frac{c^2 h}{\text{segment}},$$

c représentant la corde *bd* et h la hauteur de l'arc *bmd*.

Je n'entrerai pas dans le détail du calcul relatif à ce troisième exemple, parce qu'il est tout à fait semblable à celui des deux premiers : seulement, je ferai remarquer que si le segment devient un demi-cercle, c devient $2r$, h devient aussi $2r$, et gk qui se change alors en go devient :

$$go = \frac{4r}{3\pi}$$

expression identique avec celle qui donne le centre de gravité d'un demi-cercle, comme cela devait être.

Connaissant le centre de gravité d'un arc, d'un secteur et d'un segment, on en déduira facilement le centre de gravité d'une partie quelconque du cercle, comprise entre des arcs et des lignes droites.

IV. *Centre de gravité d'un segment de parabole.*

Pour avoir le centre de gravité du segment *amp* de la parabole $y^2 = px$ (*fig.* 13), compris entre l'origine, l'abscisse et l'ordonnée d'un point quelconque de l'arc, appelez x et y les coordonnées de ce point, prenez les $\frac{3}{5}$ de x et les $\frac{3}{8}$ de y, et vous aurez les coordonnées du centre de gravité cherché.

Calcul.

Quand les axes sont rectangulaires, et qu'on fait $x = ap$, $y = mp$, on trouve les résultats suivants :

Segment *amp* connu par les éléments. . . . $\frac{2}{3}\,xy$

Rectangle fait sur les mêmes coordonnées. . . xy

Segment $amq = xy - \frac{2}{3}\,xy$. . . . . $\frac{1}{3}\,xy$

1. Le solide engendré par le segment *amp* tournant autour de l'axe *ap*, est $\frac{1}{2}p\pi x^2$ (*Voir* tome 1, p. 383) (*).

2. Le solide engendré par le segment *amq* tournant autour de *aq* est $\frac{1}{5}\,\pi x^2 y$ (*Voir* ci-après le n° V de cet article).

De ces deux résultats il suit que le solide engendré par le segment *amp* autour de *aq* est $\frac{4}{5}\,\pi x^2 y$, et cela, parce que le solide engendré par le rectangle xy est $\pi x^2 y$.

(*) Cette évaluation est due à Archimède, qui l'a trouvée par la méthode d'*exhaution*, qui est aussi celle qu'emploie l'auteur de cet article. Le géomètre de Syracuse est le premier qui ait trouvé l'aire, le centre de gravité de la parabole et les volumes que cette courbe engendre. Tm.

Application de la règle de Guldin.

Si on continue d'appeler og la distance du centre de gravité à l'axe de rotation, le segment amp tournant autour de ap donnera :

$$\frac{2}{3}xy \times 2\pi.og = \frac{1}{2}p\pi x^2, \qquad \text{d'où} \qquad og = \frac{3}{8}y;$$

le même segment tournant autour de aq donnera :

$$\frac{2}{3}xy.2\pi eg = \frac{4}{5}\pi x^2 y, \qquad \text{d'où} \qquad eg' = \frac{3}{5}x;$$

de sorte que les deux coordonnées du centre de gravité cherché, sont, comme on l'a annoncé, $\frac{3}{5}x$ et $\frac{3}{8}y$.

Donc, si on prend $ao = \frac{3}{5}ap$ et $ae = \frac{3}{8}$ de mp, et que par ces points on mène des parallèles aux axes, le problème sera résolu.

Si la parabole est rapportée à des axes obliques, comme on voit (*fig.* 14), la construction pour trouver le centre de gravité ne changera pas ; car, on peut toujours projeter cette figure de manière que le parallélogramme devienne un rectangle, sans que pour cela cette parabole cesse d'être du second degré ; or, la propriété dont il s'agit ayant lieu dans cette dernière figure, prouve qu'elle a lieu dans la première, et de plus les rapports entre les parties d'une même droite ne changeant pas, il en résulte que la construction pour avoir le centre de gravité est la même dans les deux figures.

Le segment parabolique d'une parabole quelconque $y^n = px^m$, étant algébrique, comme l'enseigne le calcul intégral, de même que le volume engendré par ce segment, il en résulte que les deux coordonnées du centre de gravité de ce segment sont algébriques ; mais on ne peut disconvenir que la règle de *Guldin* ne les offre bien plus simplement que l'emploi des formules :

$$\lambda = \int_\alpha^6 \frac{}{} y dx, \quad \lambda x_1 = \int_\alpha^6 \frac{}{} yx dx, \quad \lambda y_1 = \int_\alpha^6 \frac{}{} \frac{1}{2} y^2 dx;$$

et même que les valeurs $x_1 = \frac{3}{5} x$ et $y_1 = \frac{3}{8} y$ ne soient demeurées jusqu'ici cachées dans les symboles précédents (*).

V. *Comment on démontre que le solide engendré par le segment* amp, *tournant autour de l'axe des* y *a pour expression* $\frac{1}{5} \pi x^2 y$.

Considérons les rectangles PP'pm' et QQ'qm'..... (*fig.* 15). Le premier engendre, par sa révolution, un solide $P = \pi (x^2 - x'^2) y'$, comme étant la différence de deux cylindres dont les solidités respectives sont $\pi x^2 y'$ et $\pi x'^2 y'$; le second fournit directement $p = \pi (y - y') x'^2$, et le rapport du premier au second est $\frac{P}{p} = \frac{(x^2 - x'^2) y'}{(y - y') x'^2}$.

Pour avoir la valeur numérique de ce rapport, posons $y - y' = \omega y'$, $y' - y'' = \omega y''$...... ce qui est permis, puisqu'on peut espacer les sommets m, m', m''..... de manière qu'il règne telle loi qu'on voudra, entre leurs ordonnées; puis, éliminant y, y', x, x' entre les équations $y - y' = \omega y$ $\frac{(x^2 - x'^2) y'}{(y - y') x'^2} = \frac{P}{p}$ et les deux suivantes $y^2 = px$, $y'^2 = px'$, qui sont évidentes d'elles-mêmes, on a pour résultat $\frac{P}{p} = \frac{4 - 6\omega + 4\omega^2 - \omega^3}{(1 - \omega)^3}$; or, ω peut être aussi petit qu'on voudra, et même doit devenir nul pour passer du polygone à la courbe, donc $\frac{P}{p} = \frac{4}{1}$.

(*) L'utilité du théorème du P. Guldin est assez limitée. Très souvent l'aire de la surface est plus facile à déterminer directement que le centre de gravité du périmètre générateur. Où est le centre de gravité du périmètre d'une demi-ellipse? Les périmètres sont la pierre d'achoppement de la géométrie, qui ne nous apprend rien sur aucune ligne courbe, la circonférence et les hélices exceptées. Tm.

Par les mêmes raisons que ci-dessus :

$$\frac{P'}{p'}=\frac{4}{1},\ \frac{P''}{p''}=\frac{4}{1}\ldots;\text{et par suite, }\frac{P+P'+P''+\ldots}{p+p'+p''+\ldots}=\frac{P}{p}=\frac{4}{1};$$

donc $P+P'+P''+$ etc., ou le solide engendré par le segment AmP, est au solide engendré par AmQ, ou

$$p+p'+p''+\text{etc.}\ldots\ldots :: 4:1;$$

enfin, si on remarque que les deux solides dont il s'agit font ensemble le cylindre engendré par le rectangle $APQm$ dont la solidité est $\pi x^2 y$, on verra que le solide engendré par le segment AmQ, autour de l'axe des y, a pour expression

$$\frac{1}{5}\pi x^2 y,$$

résultat conforme à celui que fournit le calcul intégral.

VI. *Centre de gravité d'une demi-ellipse ayant pour base un diamètre quelconque.*

Observation préliminaire. Lorsqu'on connaît le centre de gravité d'une surface plane, on connaît également le centre de gravité de toutes les projections planes de cette surface, formées par des lignes parallèles, et cela tient à ce que tous les éléments de la première étant chargés de poids égaux et également inclinés sur la seconde, tous les points de la seconde sont aussi chargés de poids égaux; ainsi, par exemple, le centre de gravité d'un triangle équilatéral étant placé à l'intersection des lignes qui joignent les sommets et les milieux des côtés opposés, le centre de gravité de toute projection de ce triangle, c'est-à-dire d'un triangle quelconque, est aussi à l'intersection des lignes qui joignent les sommets et les milieux des côtés opposés dans ce nouveau triangle; de même, si c'est une ligne droite qu'on projette sur un plan ou sur une autre ligne, la projection du centre de gravité de cette ligne est elle-même le centre de gravité de la projection, et cela, parce que tous les éléments étant chargés de poids égaux, et de plus également inclinés sur la ligne de projection, tous les éléments de la projection sont aussi chargés de poids égaux, et également espacés sur la ligne de projection.

Mais, si c'est une ligne qu'on projette, une circonférence de cercle, par exemple, le périmètre de l'ellipse projection ne sera pas chargé de poids égaux en chacun de ses points ou de ses éléments linéaires, quoique ceux de la circonférence le soient; et cela parce que ces derniers étant diversement inclinés, leurs projections ne sont point égales et ne peuvent par conséquent représenter des poids égaux. cependant, si la courbe que l'on considère est à double courbure, il peut arriver que tous ses éléments soient également inclinés sur le plan horizontal, comme cela a effectivement lieu dans les hélices, par rapport au plan de la base. (*Voyez* les pages 201 et suivantes des *Nouvelles Annales* où elles offrent le premier exemple du centre de gravité d'une courbe à double courbure, ainsi que d'une portion de surface gauche, comprise entre deux positions de la génératrice.)

Cela posé, revenons à l'objet du paragraphe VI, c'est-à-dire au centre de gravité d'une demi-ellipse quelconque.

Pour cela, soit un cercle de rayon $OC = a$, dans lequel G est le centre de gravité du demi-cercle ACB (*fig.* 16). Si on projette ce cercle sur un plan passant par le diamètre PQ, les diamètres AB et CD qui sont à angles droits, et par conséquent conjugués dans le cercle, formeront dans l'ellipse projection, un système de diamètres conjugués A'B', C'D'.

Le centre de gravité G du demi-cercle ACB se projettera au centre de gravité g de la demi-ellipse, et ce dernier point partagera le demi-diamètre OC' comme le point G partage

le demi-diamètre OC; or, nous savons que $OG = \frac{4}{3\pi} . OC$,
donc on aura $Og = \frac{3}{4\pi} Oc'$; ce qui se traduit ainsi :

« Pour avoir le centre de gravité d'une demi-ellipse ayant
» pour base le diamètre a', menez son conjugué b', prenez
» à partir du centre, une partie $og = \frac{4}{3\pi} . b'$, et le problème
» sera résolu. »

Les centres de gravité de tous les demi-cercles qu'on peut faire dans un cercle, étant évidemment eux-mêmes sur un autre cercle de rayon OG, il en résulte que les centres de gravité de toutes les demi-ellipses qu'on peut faire dans une ellipse, sont sur une autre ellipse concentrique et semblable à la première et qu'on obtient en projetant le cercle de rayon OG.

Non-seulement on peut obtenir le centre de gravité d'une demi-ellipse quelconque, mais on parvient encore avec autant de facilité au centre de gravité d'un secteur, d'un segment elliptique. Il suffit pour cela de projeter les parties correspondantes du cercle, et les projections des centres de gravité de ces derniers objets seront les centres de gravité des premiers.

VII. *Ellipsoïde de révolution autour d'un diamètre quelconque.*

Toutes les moitiés d'une même ellipse étant équivalentes, quel que soit le diamètre qui leur serve de base, chacune d'elles a pour expression de sa surface $\frac{1}{2}\pi ab$, a et b étant les demi-axes.

Mais parce que le rectangle $ab = a'b' . \sin(\alpha' - \alpha)$, il en résulte que la demi-ellipse construite sur les demi-diamètres a', b', a pour expression $\frac{1}{2} \pi a'b' \sin(\alpha' - \alpha)$, et peut par conséquent se prendre sur la figure même, sans avoir recours aux axes.

Cela posé : pour avoir l'ellipsoïde autour de A'B', abaissez gp perpendiculaire sur l'axe, et vous aurez $gp = og . \sin gop$ ou $gp = \frac{4}{3\pi} b' . \sin(\alpha' - \alpha)$, en remplaçant go par sa valeur $\frac{4}{3\pi} . b'$, comme on a vu dans l'article précédent ; puis, appliquant la règle de Guldin, il vient :

$$\frac{1}{2} \pi a' b' . \sin(\alpha' - \alpha') \times \frac{4}{3\pi} b' . \sin(\alpha' - \alpha) . 2\pi =$$

$$\text{Ellipsoïde} = \frac{4}{3} \pi . a' b'^2 . \sin^2(\alpha' - \alpha).$$

Si l'on met l'expression précédente sous la forme $\frac{4}{3} \pi a' b' . \sin(\alpha' - \alpha) \times b' \sin(\alpha' - \alpha)$, on remarquera que le premier facteur $\frac{4}{3} \pi a' b' . \sin(\alpha' - \alpha)$ est constant puisqu'il est égal à $\frac{4}{3} \pi ab$, et que l'ellipsoïde varie avec le second facteur $b' \sin(\alpha' - \alpha)$, qui n'est lui-même autre chose que $\frac{ab}{a'}$; ce qui signifie que l'ellipsoïde va croissant à mesure que le diamètre a' va en diminuant ; qu'il atteint son *maximum* quand le diamètre a' se confond avec b, et qu'il atteint son *minimum*, quand a' se confond avec a.

Dans chacun de ces cas extrêmes, $\sin(\alpha' - \alpha) = 1$, parce que les diamètres conjugués sont alors les axes, et l'expression générale de l'ellipsoïde devient successivement $\frac{4}{3} \pi a^2 b$ et $\frac{4}{3} \pi ab^2$. Enfin, si on suppose $a = b$, on a $\frac{4}{3} \pi a^3$, qui est la solidité de la sphère, comme on devait s'y attendre.

Conclusion. On voit donc, par ce qui précède, et sans qu'il soit nécessaire de multiplier davantage les exemples, combien la règle de Guldin et l'emploi des projections facilitent, dans certains cas, la recherche des vérités mathématiques; aussi, est-ce sous ce point de vue que je crois qu'on doit principalement les considérer.

NOTE

SUR UNE

CONSTRUCTION MÉCANIQUE DES TROIS CONIQUES,

PAR M. BLUM (**AUGUSTE**),
Professeur de mathématiques.

—

Tout ce qui peut montrer l'analogie entre les trois courbes du second degré est utile à faire connaître ; aussi n'a-t-on pas manqué de faire voir fréquemment qu'une parabole est, ou bien une ellipse dont le grand axe est infini, ou bien une hyperbole dont l'axe transverse est infini. Une remarque consignée dans tous les traités sur les sections coniques, m'a fait rencontrer un moyen de montrer l'identité de trois courbes par une construction mécanique.

Si je cherche le lieu des points également distants d'un point fixe et d'une circonférence donnée, je trouve l'ellipse ou l'hyperbole, suivant que le point donné est intérieur au cercle ou extérieur ; on retrouve, en effet, cette condition que la somme des distances d'un point particulier du lieu au point donné et au centre du cercle, est égale à une constante qui est le rayon du cercle, ou bien que la différence de ces distances est égale au rayon du cercle donné. Si la circonférence donnée a un rayon infini, on trouve la parabole. Ainsi, je puis dire qu'une section du cône est le lieu des points également distants d'un point et d'une circonférence. Tout cela est connu depuis longtemps, mais ce qui me semble nouveau, ou du moins inédit jusqu'ici, c'est une conséquence simple qu'on peut en déduire pour la construction mécanique de l'ellipse et de l'hyperbole d'un mouvement continu.

On sait que la parabole peut être construite au moyen d'une équerre qu'on fait *diriger* dans son mouvement, par une droite qui est la *directrice*, l'extrémité d'un fil étant attachée au foyer, et un style tendant ce fil dont l'autre extrémité est attachée à un point du côté de l'équerre perpendiculaire à la directrice. C'est de là assurément que le nom de directrice est venu à la droite, ainsi nommée pour la parabole. Maintenant pour l'ellipse (*fig.* 4), soit F'A, le rayon d'un cercle enlevé dans une planche ; soit PQR, une équerre mixtiligne dont l'arc QR est de même rayon que celui du cercle donné. Si j'attache un fil au point F que je tendrai, après l'avoir placé de manière que le point M soit également distant de Q et de F, qu'ensuite l'autre extrémité du fil soit attachée au point P; en faisant mouvoir l'équerre de manière qu'elle s'appuie sur la circonférence, le fil étant toujours tendu, il est évident que le style placé au point variable M décrira l'ellipse.

Pour l'hyperbole (*fig.* 17), même construction et même remarque, l'équerre est mixtiligne concave, tandis que dans le premier cas elle est mixtiligne convexe.

On justifie par ces constructions les dénominations de directrices circulaires qui ont été données aux circonférences décrites d'un foyer comme centre, avec le grand axe ou l'axe transverse pour rayon.

La fig. 18 donne la relation qui existe entre une ellipse, une parabole et une hyperbole qui ont même sommet et même foyer. Pour passer de l'ellipse à l'hyperbole, il faut passer d'un rayon positif à un rayon négatif, et en construisant les trois courbes avec leurs trois directrices, on voit que la parabole, est une sorte de moyenne entre l'ellipse et l'hyperbole pour les parties voisines du sommet, c'est-à-dire, pour la première moitié de l'ellipse.

En déplaçant le foyer F (*fig.* 4), on peut obtenir toutes les ellipses, ayant même grand axe depuis une ligne droite jusqu'au cercle; ainsi, avec une seule directrice circulaire et une seule équerre mixtiligne, on peut construire une ellipse semblable à toute ellipse donnée.

Cette construction mécanique me semble prouver qu'on ne peut pas dire qu'une parabole a deux centres, et même elle fait voir qu'elle n'en a point, puisqu'il faut que le rayon du cercle directeur devienne infini pour que l'ellipse devienne une parabole.

Il y aurait d'autres remarques à faire, mais nous dépasserions alors les limites d'une simple note.

Observation. Un sommet et le foyer voisin d'une ellipse ou d'une hyperbole restant fixes, et le centre s'éloignant, la parabole est une limite commune à l'ellipse se dilatant, à l'hyperbole se rétrécissant; c'est dans ce sens qu'on dit, légitimement, que la parabole a un centre à l'infini, soit positif, soit négatif; locution abrégée dont la science offre une foule d'exemples. Prises dans un sens complet, sans faire attention aux idées sous-entendues, ces locutions tournent facilement à l'absurde; c'est ainsi qu'on sait que lorsque les n premiers coefficients d'une équation s'approchent de zéro, autant de racines grandissent. On exprime ce fait en disant que lorsque n coefficients deviennent nuls, n racines deviennent infinies. Or, une équation du premier degré peut être considérée comme une équation du millième degré, dont les 999 premiers termes se sont évanouis; donc toute équation du premier degré a mille racines, dont une racine finie et 999 infinies. Conclusion extravagante, tirée d'une locution juste. Tm.

QUESTIONS D'EXAMEN.

PAR M. JACOB,
Capitaine d'artillerie.

—

I. « Comment faut-il placer un triangle par rapport à un » axe qui passe dans son plan par son sommet, pour que le » volume engendré par la révolution de ce triangle soit égal » à celui d'une sphère donnée? »

Soient b et h, les dimensions du triangle (*fig.* 3 *bis*); AG, la distance du centre de gravité au sommet A : du point G j'abaisse sur l'axe une perpendiculaire $\mathrm{GK} = \mathrm{AG}\sin\alpha$.

Le volume V engendré par le triangle est égal à sa surface multipliée par la circonférence qui décrit le centre de gravité:

$$\mathrm{V} = \frac{1}{2}\,bh \times 2\pi\mathrm{GK}\,;$$

et puisque ce volume doit être égal à celui d'une sphère d'un rayon donné a

$$\frac{1}{2}\,bh.\,2\pi.\,\mathrm{GK} = \frac{4}{3}\,\pi a^3,$$

d'où

$$\mathrm{GK} = \frac{4a^3}{3bh}.$$

Dès lors, pour placer le triangle, j'élève sur AB une perpendiculaire CH=GK qui est connu. Par le point H, je mène une parallèle à AB. Du point A comme centre avec AG comme rayon, je décris un arc de cercle qui coupe cette parallèle en G, et le point G est la position du centre de gravité qui satisfait au problème.

On peut voir quand le volume sera un maximum, car

$$V=\frac{1}{2}bh.2\pi GK=\pi.b.hAG\sin\alpha.$$

Le volume croît avec sin α; il sera donc maximum quand $\sin\alpha=1$, ou quand la droite AG sera perpendiculaire à AB. Le problème ne sera donc plus possible quand

$$\frac{4}{3}\pi a^3>\pi bh.AG,$$

quand

$$AG<\frac{4a^3}{3bh}.$$

Observation 1. L'arc de cercle coupe la parallèle HG en deux points; le triangle a donc, généralement parlant, deux positions qui satisfont au problème; et toutes les fois qu'un problème a un nombre pair de solutions, il peut y avoir des cas d'impossibilité.

2. Le même genre de solution s'applique à un polygone tournant, lors même que l'axe de rotation n'est pas dans le plan du polygone.

II. « Lieu des points de rencontre des normales à la para-
» bole se coupant à angle droit. »

L'équation de la parabole est $y^2=2px$ (1).

Soient

$$y-y'=-\frac{y'}{p}(x-x')\ (2);\ y-y''=-\frac{y''}{p}(x-x'')\ (3)$$

les équations de deux normales. Pour que ces normales se coupent à angle droit, il faut que l'on ait la relation

$$\frac{y'y''}{p^2}=-1\ (4).$$

Mais on a aussi

$$y'^2 = 2px' \ (5) \qquad y''^2 = 2px'' \ (6)$$

ces deux dernières relations exprimant que les points (x', y'), (x'', y'') sont sur la courbe. Si maintenant on se sert des relations (2) (3) (4) (5) (6) pour éliminer $x'y'$, $x''y''$, il nous restera une relation en x et y, ce sera l'équation du lieu.

De (5) on tire $x' = \frac{y'^2}{2p}$, je reporte cette valeur dans (2);

$$y - y' = -\frac{y'}{p}\left(x - \frac{y'^2}{2p}\right) \text{ ou } y'^3 + y'(2p^2 - 2px) - 2p^2y = 0. \ (7)$$

Éliminons de même x'' entre (3) et (6), il vient

$$y''^3 + y''(2p^2 - 2px) - 2p^2y = 0. \ (8)$$

Cette équation étant identique avec (7), on en conclut que y' et y'' sont les racines d'une même équation. Or, dans (7), le produit des trois racines est égal au coefficient du dernier terme pris en signe contraire. Si donc nous divisons ce coefficient par le produit des deux racines y' et y'', produit qui nous est donné par la relation (4), on aura la troisième racine qui est $-2y$.

Remplaçons donc dans (7) l'inconnue y' par cette valeur ; l'équation sera satisfaite, d'où

$$8y^3 + 2y\,(2p^2 - 2px) + 2p^2y = 0,$$
$$4y^2 + 3p^2 - 2px = 0,$$
$$y^2 = \frac{1}{2}\,px - \frac{3}{4}p^2.$$

C'est l'équation d'une parabole rapportée à son axe principal. Pour la construire, il suffit de changer x en $x + \frac{3p}{2}$; l'équation du lieu rapporté aux nouveaux axes sera $y^2 = \frac{1}{2}\,px$. Cette parabole se construit aisément.

La suite prochainement.

NOTE SUR LES TRANSVERSALES.

PAR M. COUSINERY,

Ingénieur en chef au corps royal des ponts et chaussées.

Au nombre des propriétés qui devraient depuis longtemps faire partie des éléments de géométrie, on peut ranger en première ligne celles qui concernent les transversales; il ne leur manque pour y prendre définitivement la place qui leur est due, que de se rattacher à une théorie assez simple pour ne pas constituer une richesse encombrante, et qui puisse leur imprimer ce caractère d'évidence presque trivial, dont les axiomes fournissent le modèle, et en dehors duquel il n'est pas de vérités réellement élémentaires.

A l'appui de ces réflexions, qui nous ont été suggérées par la lecture de deux articles insérés dans le dernier numéro des *Annales de Mathématiques*, nous allons essayer s'il ne serait pas possible d'aborder le même sujet par la voie directe, en faisant dépendre les théorèmes qui s'y trouvent démontrés, de la géométrie à trois dimensions, à laquelle il nous semble qu'ils appartiennent de préférence.

On sait que, dans l'espace, deux droites quelconques sont respectivement divisées en parties égales par leur rencontre avec une série de plans parallèles équidistants; dès lors, si on les projette toutes deux sur l'un de ces plans (que nous pouvons supposer horizontaux pour fixer les idées); et qu'à partir du plan de projection, on numérote par ordre ces mêmes intersections, la figure présentera ce que l'on appelle deux *échelles de pente* (*). En joignant alors, de l'une à l'autre échelle, les points qui portent une graduation identique, on obtiendra la projection d'une série d'horizontales s'appuyant sur les deux échelles, et constituant ainsi les génératrices d'un paraboloïde réglé. Elles devront donc se trouver tangentes à la projection du contour apparent de la surface, courbe dans laquelle il nous sera facile de reconnaître une parabole; puisqu'elle est du second ordre, et qu'elle a une de ses tangentes dont deux points sont situés à l'infini: celle qui réunirait les deux points de graduation identique, correspondants sur chaque échelle à un nombre infiniment élevé.

Si l'on imagine maintenant une troisième droite faisant partie du système directeur auquel appartiennent les deux échelles primitives, et s'appuyant pour cela sur toutes les horizontales, il est évident qu'elle se trouvera encore divisée en parties égales à chacun de leur point de rencontre; et que par suite sa projection affectera à son tour la *forme d'échelle.* Et comme cette dernière forme appartiendra aussi bien à la directrice qu'à la génératrice qui se trouvent superposées dans un même plan projetant, il s'ensuit qu'en n'envisageant sur la surface que ce double faisceau de lignes, chacune d'elles sera divisée en parties égales par sa rencontre avec toutes les autres. Cette belle propriété du paraboloïde étant projective devrait se reproduire, en plan, d'une manière absolue; mais elle offre, sous ce dernier rapport, une de ces exceptions qu'il est important de signaler; et cela, parce qu'elle n'est qu'apparente.

Admettons que les deux premières échelles directrices soient disposées comme les présente la figure ci-jointe (*fig.* 9); l'un des points de division de ab, le cinquième par exemple,

---

(*) Dénomination adoptée dans les épures de projection mixte ou cotée, qui sont employées pour projeter et décrire les travaux de fortification.

verticalement situé au-dessus du zéro de cd. Si nous menons les horizontales 1, 2, 3, 4, etc., chacune d'elles sera bien divisée en parties égales; mais les portions ee', $e'e''$, $e''e'''$, etc., qui constituent les côtés du polygone circonscrit à la courbe contour apparent, feront exception à cette loi, et seront doubles de leurs homologues. Il y a donc sur chacun d'eux un point de division que la projection horizontale n'a pu rendre, bien qu'il existe dans l'espace. C'est précisément celui où les deux éléments linéaires qui se superposent projectivement se rencontrent eux-mêmes; comme tel, il appartient à la fois au contour apparent et au plan tangent vertical qui contient ces deux lignes; et il se projette sur la trace ee' de ce dernier au point o où celle-ci est tangente à la projection du contour apparent; c'est donc le point de contact parabolique de chacun des éléments ee', $e'e''$, $e''e'''$, etc., en le restituant sur toute la figure, ce qui n'offre aucune difficulté, puisqu'il est partout soumis à la loi d'égale subdivision, le réseau de toutes ces lignes reproduit, en plan, la remarquable symétrie que nous avons déjà signalée dans l'espace. Nous en conclurons le théorème suivant : *si on subdivise une tangente à la parabole en parties égales, à partir du point de contact, et que par les* n *points de division, on mène autant d'autres tangentes à la courbe, chacune d'elles sera partagée en parties égales par sa rencontre avec toutes les autres. — Une autre tangente quelconque sera divisée par ce réseau de lignes dans les mêmes conditions d'égalité; excepté que, pour cette dernière, le point de contact ne fera plus partie des subdivisions égales.*

Théorème duquel on déduira sans peine les relations de proportionnalité des transversales non concourantes, et qui les complète sous un certain rapport, en signalant un nouveau point de division, dont il faut nécessairement tenir compte, puisqu'il jouit des mêmes propriétés, et provient d'une même origine.

Pour l'intelligence de ceux qui n'auraient pas l'habitude de lire dans l'espace, au moyen d'une seule projection cotée, nous allons ajouter à la figure ci-dessus une des formes de projection verticale que ses cotes impliquent et déterminent.

Nous prendrons, pour cela, notre ligne de terre *mn* perpendiculaire à la direction de la génératrice horizontale 5. Celle-ci se projettera dès lors, en un seul point *h*, que l'on peut d'ailleurs choisir à volonté sur le prolongement de la direction *cd*. Toutes les échelles (ou directrices) devant s'appuyer sur cette horizontale, viendront concourir en *h*, et prendront leur origine au point où elles rencontrent l'horizontale zéro qui se projette elle-même suivant la ligne de terre *mn*. Les autres horizontales 1, 2, 3 et 4, partageront l'espace intermédiaire en cinq bandes égales. — Comme on peut le reconnaître sans peine, cette seconde projection ramène à la forme exclusivement élémentaire (un faisceau parallèle et l'autre concourant en un seul point *h*) les transversales qui se trouvaient non concourantes dans la projection corrélative; l'une de ces figures fournit donc l'explication directe des propriétés métriques de l'autre, et leur dépendance mutuelle résume ainsi, sous une forme tangible et presque toute matérielle, les idées que nous nous étions proposé de mettre en relief.

Quant aux transversales concourantes qui vont aboutir à une même courbe quelconque, il est encore plus simple d'y reconnaître la projection d'un cône dont les transversales figurent les génératrices, dont la courbe donnée constitue la base plane et dont le sommet, situé à une hauteur quelconque, correspond verticalement au-dessus du point de concours. Ces données admises, un plan sécant, parallèle à la base, coupera le cône suivant une courbe semblable et semblablement placée, et divisera toutes les génératrices en parties proportionnelles. Celui qui les partagera également en deux, donnera la section particulière dont la surface égalera le quart de celle de la courbe donnée.

Cette dernière section, que nous appellerons *section conique sous-double*, rend le problème que s'était proposé M. Midy, susceptible d'une solution directe : ainsi, dans le cas particulier où le pôle par lequel viennent passer toutes les cordes fait partie de la courbe qui les intercepte, la section conique sous-double résout *immédiatement* le problème ; et, dans le cas contraire, il est toujours possible d'en ramener les données à la supposition précédente, en substituant à la proposée une nouvelle courbe qui, sans rien changer aux lieux des centres cherchés, vienne elle-même passer par le pôle. Ces deux courbes sont dites alors : *polairement concentriques*. Il suffit, pour établir cette relation, qu'elles interceptent sur les mêmes rayons vecteurs des cordes superposées, dont le centre commun reste partout invariable. Si l'on remarque, en outre, qu'une relation identique doit exister, par similitude, entre leurs deux sections coniques sous-doubles, on en tire la règle suivante : *Le lieu des centres des cordes qui émanent d'un même point, se trouve sur la courbe polairement concentrique à la section conique sous-double de la proposée. Le pôle en fait nécessairement partie* (*).

Or, deux cercles décrits du même centre sont polairement concentriques par rapport à tous les points de leur plan. Il en est de même pour deux ellipses concentriques semblables et semblablement placées, envisagées comme les projections de deux cercles ; enfin, une hyperbole et ses asymptotes, et par suite toutes les hyperboles qui ont mêmes asymptotes

(*) Comme nous n'avons rien préjugé, dans ce qui précède, sur la nature de la courbe primitive, rien n'exige qu'elle soit algébrique.

jouissent de la même propriété : les centres des cordes qui émanent d'un même point y restent invariables. Donc, toutes les fois que la courbe primitive est du second degré, le lieu des centres de ses cordes se trouve sur une courbe semblable et semblablement placée, qui passe par le pôle, et qui est concentrique à la section conique sous-double ; ensemble de conditions qui la déterminent complétement.

Dans un prochain article, nous appliquerons ces principes à une question qu'on propose quelquefois aux candidats ; et nous expliquerons les anomalies auxquelles donne lieu ce genre de problèmes : elles se présentent toutes les fois que le pôle est extérieur à la courbe primitive : il existe alors des cordes imaginaires, dont le centre seul est réel ; et, quand on néglige d'en tenir compte, la courbe cherchée se trouve nécessairement interrompue dans toute la partie qui leur correspond.

Nous indiquerons enfin, un conoïde réglé qui contient à la fois la courbe proposée, le lieu des centres, et le pôle commun. Les courbes s'y trouvent l'intersection de trois plans équidistants parallèles, ce qui rattache encore ce genre de propriétés à la proportionnalité dans l'espace : à celle qui résulte de la division d'un certain faisceau de lignes concourantes ou non concourantes par une suite de plans parallèles.

DES

NORMALES AUX COURBES DU SECOND ORDRE (*).

—

5. La courbe GHG'H', représentée par l'équation $(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=(c^2)^{\frac{2}{3}}$, a la forme indiquée (*fig.* 19). Lorsque $c>b$, elle coupe l'ellipse en quatre points. La tangente PD menée à cette courbe, en un point P dont les coordonnées sont x, y, fait avec l'axe des abscisses un angle PDX qui a pour tangente trigonométrique $-\sqrt[3]{\frac{a^2y}{b^2x}}$. C'est ce que l'on trouve facilement au moyen des méthodes ordinaires.

Si d'un point quelconque M, on veut mener une tangente MP à la courbe GH, on aura, en nommant α, β, les coordonnées de M, et x, y, les coordonnées inconnues du point de tangence P :

$$\sqrt[3]{a^2x^2}+\sqrt[3]{b^2y^2}=\sqrt[3]{c^4}, \qquad (1)$$

$$\beta-y=-\sqrt[3]{\frac{a^2y}{b^2x}}\cdot(\alpha-x). \qquad (2)$$

L'équation (2) donne successivement :

$$\beta\sqrt[3]{b^2x}-y\sqrt[3]{b^2x}=-\alpha\sqrt[3]{a^2y}+x\sqrt[3]{a^2y},$$

$$x\sqrt[3]{a^2y}+y\sqrt[3]{b^2x}-\beta\sqrt[3]{b^2x}-\alpha\sqrt[3]{a^2y}=0,$$

$$\sqrt[3]{xy}\left[\sqrt[3]{a^2x^2}+\sqrt[3]{b^2y^2}\right]-\beta\sqrt[3]{b^2x}-\alpha\sqrt[3]{a^2y}=0,$$

(*) Pour la première partie de cette note, *voyez* pages 17-23, tome II.

d'où

$$\sqrt[3]{c^4xy} - 6\sqrt[3]{b^2x} - \alpha\sqrt[3]{a^2y} = 0. \qquad (3)$$

Si maintenant on pose $x = \frac{c^2x'^3}{a^4}$, $y = -\frac{c^2y'^3}{b^4}$, les équations (1) et (3) deviendront :

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2, \qquad (4)$$
$$c^2x'y' + 6b^2x' - \alpha a^2y' = 0. \qquad (5)$$

Or, les équations (4) et (5) sont précisément celles qu'il faut résoudre pour mener du point M une normale à l'ellipse lorsqu'on désigne par x', y', les coordonnées du point R auquel la normale rencontre l'ellipse. Ainsi, les coordonnées des points P et R, sont liées entre elles par les relations $x = \frac{c^2x'^3}{a^4}$, $y = -\frac{c^2y'^3}{b^4}$. On en déduit $\frac{y}{x} = \frac{-a^4y'^3}{b^4x'^3}$; et par suite $-\sqrt[3]{\frac{a^2y}{b^2x}} = \frac{a^2y'}{b^2x'}$. Mais, la quantité $-\sqrt[3]{\frac{a^2y}{b^2x}}$, est la tangente de l'angle PDX, que la tangente PD forme avec l'axe des abscisses. D'ailleurs $\frac{a^2y'}{b^2x'}$ est la tangente de l'angle de la normale RM à l'ellipse et de l'axe des abscisses. Par conséquent, les droites MP, MR coïncident, c'est-à-dire que *les tangentes menées à la courbe,* $(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (c^2)^{\frac{2}{3}}$, *sont normales à l'ellipse* $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. *Et réciproquement.*

Les relations $x = \frac{c^2x'^3}{a^4}$, $y = -\frac{c^2y'^3}{b^4}$, montrent que les points P et R, sont toujours situés d'un même côté de l'axe des y, et de différents côtés de l'axe des x. Lorsque le point R se trouve sur l'arc AB' de l'ellipse, le point P appartient à la branche HG de l'autre courbe.

D'après cela, il est facile de voir comment sont dirigées les normales menées à l'ellipse par un point M du plan de cette courbe. Si l'on suppose que le point M est comme l'indique la figure 19, intérieur à la courbe $(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=(c^2)^{\frac{2}{3}}$, on pourra mener de ce point quatre normales à l'ellipse. Le point M étant, de plus, situé dans l'angle YOX, deux de ces normales seront tangentes à la branche HG. La troisième touchera la branche G'H, et la quatrième sera tangente à GH'. Par conséquent, les deux premières sont normales à l'ellipse en des points de l'arc AB'. La troisième, en un point situé sur l'arc A'B'; et la quatrième en un point de l'arc AB. Ces quatre points sont les intersections de l'ellipse et de l'hyperbole $c^2xy+\beta b^2x-\alpha a^2y=0$.

Lorsque les coordonnées α, β, satisferont à l'équation $\sqrt[3]{a^2x^2}+\sqrt[3]{b^2y^2}=\sqrt[3]{c^4}$; le point donné appartiendra à la courbe GHG'H'. S'il est situé, comme le point P, sur la branche GH, les deux tangentes à cette branche de la courbe coïncideront; et il en sera de même des normales à l'arc AB' de l'ellipse. Dans ce cas, il y aura seulement trois normales. L'hyperbole $c^2xy+\beta b^2x-\alpha a^2y=0$, sera tangente à l'ellipse au point R.

Enfin, si l'on suppose que le point donné devienne extérieur à la courbe GHG'H', et soit, par exemple, en M' dans l'angle YOX; le nombre des normales se réduit à deux. Ces droites sont tangentes aux branches G'H, GH'. Les points auxquels elles seront normales à l'ellipse appartiendront: l'un d'eux à l'arc A'B', et l'autre à l'arc AB. Et alors, l'hyperbole $c^2xy+\beta b^2x-\alpha a^2y=0$, coupe l'ellipse en ces deux points seulement.

6. Pour démontrer encore une autre propriété remarquable de la courbe dont l'équation est $\sqrt[3]{a^2x^2}+\sqrt[3]{b^2y^2}=\sqrt[3]{c^4}$, nous rappellerons ici une proposition relative aux différents cercles tangents à une ellipse en un même point.

Soit la droite RM normale à l'ellipse au point R (*fig.* 20). Supposons que, du point M pris sur cette droite, comme centre, on décrive une circonférence tangente à l'ellipse au point R, et qui coupe l'ellipse en deux autres points C, D. *La corde d'intersection* CD *conservera la même direction, quel que soit le point* M *sur la normale.* C'est-à-dire que *les différentes cordes d'intersection obtenues, en changeant la position du centre* M, *sur la normale, seront parallèles entre elles.*

En effet, menez au point R une tangente GRS à l'ellipse (*fig.* 20), et prolongez la corde CD jusqu'à la rencontre de GRS, au point G. La circonférence passant par les trois points C, D, R, et qui a son centre au point M, étant supposée tangente à GS, en R; on aura $\overline{GR}^2 = GC \times GD$. Si, maintenant, on mène par le centre O de l'ellipse, les diamètres L'OL, H'OH, respectivement parallèles aux droites GRS, GDC, on aura encore d'après un principe connu: $\frac{\overline{GR}^2}{GC \times GD} = \frac{OL \times OL'}{OH \times OH'} = \frac{\overline{OL}^2}{\overline{OH}^2}$. Donc OH = OL. Ainsi, le diamètre H'OH formera avec le grand axe A'A de l'ellipse, un angle H'OX, supplémentaire de l'angle LOX que le diamètre LOL' fait avec le même axe. Et par conséquent, quelle que soit la position du point M, sur la normale, l'angle que la corde CD fait avec l'axe OX, est toujours supplémentaire de l'angle GSX, formé par la tangente au point R avec l'axe OX.

Réciproquement, si l'on inscrit daus l'ellipse une droite CD parallèle au diamètre H'OH qui est égal à L'OL. La circonférence passant par les points C, D, R, sera tangente à la droite GRS au point R. Car, l'égalité $\frac{\overline{GR}^2}{GC \times GD} = \frac{OL \times OL'}{OH \times OH'}$, donnera $\overline{GR}^2 = GC \times GD$. C'est la proposition que nous voulions d'abord établir.

Cela posé, nous pouvons concevoir que la corde CD, restant parallèle au diamètre H'OH, s'approche de plus en plus du point de tangence R. Les circonférences qui passent par les points C, D, R, restent tangentes à l'ellipse au point R, et coupent cette courbe en deux autres points D, C; l'un d'eux, D, se rapproche continuellement du point de tangence R. Enfin, lorsque la corde CD, passe par le point R, un des points d'intersection, D, se confond avec le point de tangence R, et le second point C coïncide avec l'extrémité E de la corde RE, parallèle à H'OH. Alors, la circonférence est considérée comme ayant avec l'ellipse trois points communs qui se confondent en un seul, R; le quatrième point qui appartient à la fois à ces deux courbes, se trouve à l'extrémité E, de la corde RE parallèle au diamètre HOH'. Dans ce cas particulier, on dit que le cercle est *osculateur* à l'ellipse, *au point* R. Pour déterminer le centre P, de ce cercle il suffira d'élever une perpendiculaire QP, sur le milieu de la corde RE, et de prolonger cette perpendiculaire jusqu'à la rencontre de la normale RM. Nous allons faire voir que le point P, ainsi obtenu, appartient à la courbe dont l'équation est

$$\sqrt[3]{a^2x^2} + \sqrt[3]{b^2y^2} = \sqrt[3]{c^4}.$$

Je nommerai x', y', les coordonnées du point R. La tangente RS à l'ellipse, fait avec l'axe OX, un angle dont la tangente trigonométrique a pour expression $\frac{-b^2x'}{a^2y'}$. La corde RE fait avec l'axe OX un angle dont la tangente est $\frac{b^2x'}{a^2y'}$; car les angles que les droites RS, RE forment avec l'axe OX sont supplémentaires. Ainsi, l'équation de la droite

RE est $y - y' = \frac{b^2 x'}{a^2 y'}(x - x')$. L'équation de l'ellipse à laquelle le point R appartient, peut être mise sous la forme $a^2(y^2 - y'^2) + b^2(x^2 - x'^2) = 0$, ou $\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{-b^2.(x + x')}{a^2(y + y')}$.
Les coordonnées du point E devront satisfaire à la fois aux équations $\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{b^2 x'}{a^2 y'}$, et $\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{-b^2(x + x')}{a^2(y + y')}$. On en déduit immédiatement $\frac{x + x'}{y + y'} = -\frac{x'}{y'}$. La résolution des deux équations du premier degré

$$\frac{x + x'}{y + y'} = -\frac{x'}{y'}, \quad y - y' = \frac{b^2 x'}{a^2 y'}(x - x'),$$

donne pour les coordonnées du point E :

$$x = \frac{4x'^3}{a^2} - 3x', \quad y = \frac{4y'^3}{b^2} - 3y'.$$

Les coordonnées du point Q, milieu de RE, seront donc :

$$x = \frac{2x'^3}{a^2} - x', \quad y = \frac{2y'^3}{b^2} - y'.$$

L'équation de la droite QP, perpendiculaire sur le milieu de RE, est

$$a^2 y' x + b^2 x' y = y' x'(2y'^2 + 2x'^2 - a^2 - b^2).$$

La normale RM a pour équation

$$a^2 y' x - b^2 x' y = c^2 x' y'.$$

Ajoutant membre à membre ces deux équations, on trouv
$2a^2 y' x = y' x'[2x'^2 + 2y'^2 - 2b^2]$, d'où $x = \frac{(x'^2 + y'^2 - b^2)x'}{a^2}$.
Mais de l'équation $a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2$, on tire

$$y'^2 - b^2 = -\frac{b^2 x'^2}{a^2}; \text{ donc } x = \frac{\left(x'^2 - \frac{b^2}{a^2}x'^2\right)x'}{a^2} = \frac{c^2 x'^3}{a^4}.$$

En substituant à x, la valeur $\frac{c^2x'^3}{a^4}$, dans l'équation $a^2y'x-b^2x'y=c^2x'y'$, on trouve $y=-\frac{c^2y'^3}{b^4}$. Ainsi les coordonnées du centre P, du cercle osculateur, sont

$$x=\frac{c^2x'^3}{a^4},\quad y=-\frac{c^2y'^3}{b^4}.$$

L'élimination de x', y', entre les trois équations $x=\frac{c^2x'^3}{a^4}$, $y=-\frac{c^2y'^3}{b^4}$, $a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2$, donne :

$$\sqrt[3]{a^2x^2}+\sqrt[3]{b^2y^2}=\sqrt[3]{c^4}.$$

On voit donc que le lieu géométrique des centres des cercles *osculateurs* à l'ellipse, est celui des points par lesquels on peut mener précisément trois normales à cette courbe.

Il est facile d'exprimer, en fonction des coordonnées du point R, la longueur de la droite RP, qu'on appelle le *rayon de courbure* de l'ellipse au point R. En effet, on a

$$\overline{\mathrm{RP}}^2=(y-y')^2+(x-x')^2=(x-x')^2\left[\frac{(y-y')^2}{(x-x')^2}+1\right].$$

Mais $x-x'=\frac{c^2x'^3}{a^4}-x'=x'\left(\frac{c^2x'^2-a^4}{a^4}\right)$. D'ailleurs, puisque le point P est sur la normale RM, $\frac{y-y'}{x-x'}=\frac{a^2y'}{b^2x'}$; donc

$$\overline{\mathrm{RP}}^2=x'^2\left(\frac{c^2x'^2-a^4}{a^4}\right)^2\left(\frac{a^4y'^2}{b^4x'^2}+1\right)$$
$$=\frac{x'^2(c^2x'^2-a^4)^2(a^4-c^2x'^2)}{a^8b^2x'^2}=\frac{(a^4-c^2x'^2)^3}{a^8b^2}.$$

L'égalité $\overline{\mathrm{RP}}^2=\frac{(a^4-c^2x'^2)^3}{a^8b^2}$, montre que le rayon de courbure diminue, lorsque x' augmente depuis zéro jusqu'à

la valeur a. Si l'on suppose $x'=0$, il viendra $\frac{(a^4-c^2x'^2)^3}{a^8b^2}=\frac{a^4}{b^2}$.
Le centre du cercle osculateur est alors au point H (*fig.* 19), le rayon de ce cercle est HB'. Par conséquent $\overline{HB'}^2=\frac{a^4}{b^2}$; d'où $HB'=\frac{a^2}{b}$.

Si $x'=a$, on aura $\frac{(a^4-c^2x'^2)^3}{a^8b^2}=\frac{(a^2-c^2)^3}{a^2b^2}=\frac{b^4}{a^2}$. Dans ce cas, le point R est en A; et le point P en G (*fig.* 19). Ainsi $\overline{GA}^2=\frac{b^4}{a^2}$. Ou, $GA=\frac{b^2}{a}$.

Les rayons de courbure HB', GA, aux sommets B', A de l'ellipse sont en raison inverse des cubes des axes B'B, AA', menés par ces points ; car les égalités $HB'=\frac{a^2}{b}$, $GA=\frac{b^2}{a}$, donnent $\frac{HB'}{GA}=\frac{a^3}{b^3}$.

Les distances OG, OH (*fig.* 19), ayant respectivement pour valeurs $\frac{c^2}{a}$, $\frac{c^2}{b}$, l'équation de la droite HG, est $by+ax=c^2$. Cette équation est satisfaite lorsqu'on y remplace y et x, par $-b$ et $+a$. Donc, la droite HG passe par *un des sommets*, N, *du rectangle construit sur les axes de* l'ellipse. De plus, le coefficient angulaire de la droite HG est $\frac{-a}{b}$; celui de la corde AB' est $\frac{b}{a}$: la droite HG est donc perpendiculaire sur B'A. D'où l'on conclura que pour obtenir les centres des cercles osculateurs aux sommets *B'*, A, de l'ellipse, il suffit d'abaisser du point N, une perpendiculaire sur la corde B'A, et de prolonger cette perpendiculaire jusqu'à ce qu'elle coupe les axes de l'ellipse. Les points G, H, d'intersection seront les centres cherchés. G.

(*La fin prochainement*).

THÉORÈMES NOUVEAUX

SUR LES FRACTIONS PÉRIODIQUES.

Nombre exact des chiffres de la période pour toute fraction ordinaire donnée, dont le dénominateur ne contient pas de facteurs premiers plus grands que 101 (*).

PAR M. THIBAULT,

Professeur à Paris, licencié ès sciences mathématiques et ès sciences physiques.

—

I. *Deux fractions irréductibles* $\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{d}}, \frac{\mathrm{n}'}{\mathrm{d}'}$ *ayant été converties en fractions décimales, si ces dernières sont périodiques, elles ont un même nombre de chiffres à leurs périodes, toutes les fois que les dénominateurs* d, d′ *sont égaux, ou ne diffèrent entre eux que par des facteurs puissances de* 2 *ou de* 5.

Supposons d'abord que d, d', ne contiennent aucun des deux facteurs 2, 5; alors, $d'=d$. Appelons m, m', les nombres de chiffres des périodes des deux fractions; il faut faire voir qu'on a $m=m'$. Dans la première fraction une période commence à la virgule et se termine au chiffre de rang m; donc n et $n.10^m$ divisés par d, donnent le même reste. Ainsi d divise $n.10^m-n$, ou $n(10^m-1)$. Mais d est premier avec n, donc li divise 10^m-1, et, par conséquent, son multiple $n'.10^m-n'$. Donc n' et $n'.10^m$ divisés par d donnent le même reste; ainsi, dans la seconde fraction l'une des périodes se termine au chiffre de rang m; mais cette période a

(*) Cette note peut faire suite à celle de M. Catalan, insérée dans le numéro de novembre dernier.

m' chiffres, donc m' ne surpasse pas m On démontrerait de même que m ne surpasse pas m'.

Si l'un des dénominateurs, ou tous les deux, contiennent des facteurs de 10, les fractions peuvent se mettre sous la forme $\frac{n}{10^\alpha d}$, $\frac{n'}{10^{\alpha'} d'}$, en multipliant haut et bas par des puissances convenables de 2 ou 5. Ainsi, les fractions décimales correspondantes ne différant que par la place de la virgule de celles qui correspondent à $\frac{n}{d}$, $\frac{n'}{d'}$, leurs périodes sont les mêmes que celles de ces dernières fractions, et ont par conséquent un même nombre de chiffres.

II. *Si deux fractions irréductibles* $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}$, $\frac{n}{d}$ *converties en décimales donnent lieu à des périodes composées respectivement de* M, *m chiffres, dans le cas où* D *est divisible par d, le nombre* M *est également divisible par m.*

Remplaçons par l'unité les numérateurs des deux fractions proposées, et supprimons aux dénominateurs tous les facteurs 2, 5 qu'ils peuvent contenir. Les deux nouvelles fractions $\frac{1}{\mathrm{D}}$, $\frac{1}{d}$, conduiront encore à des périodes de M et m chiffres (1). Dans la fraction décimale égale à $\frac{1}{\mathrm{D}}$ une période commence à la virgule et finit au chiffre de rang M. Donc, $10^{\mathrm{M}}-1$ est divisible par D; et par conséquent par d sous-multiple de D. Donc, l'une des périodes de la fraction décimale égale à $\frac{1}{d}$ se termine au chiffre de rang M. La première de ces périodes commençant d'ailleurs à la virgule, il se trouve ainsi un nombre exact de périodes dans l'ensemble des M premiers chiffres. Puisque ces périodes ont m chiffres, M est donc multiple de m.

III. *Si plusieurs fractions irréductibles, dont les dénominateurs sont premiers entre eux, ou n'ont pas d'autres facteurs premiers communs que des puissances de 2 ou 5, donnent lieu à des périodes de m, m', m'',..... chiffres, toute fraction irréductible ayant pour dénominateur le produit des dénominateurs des premières, conduit à une période dont le nombre* M *des chiffres est le plus petit multiple de m, m', m'', etc.*

Remplaçons, comme plus haut, tous les numérateurs par l'unité, et supprimons aux dénominateurs tous les facteurs 2, 5. Les nouvelles fractions $\frac{1}{d}$, $\frac{1}{d'}$, $\frac{1}{d''}$, ..., $\frac{1}{dd'd''}$..... donneront encore lieu à des périodes de m, m', m'', ..., M chiffres. Appelons M_1 le plus petit multiple commun de m, m', m'', etc. La division par d de 10^m, et, par conséquent, de 10^{M_1} donne pour reste 1 ; donc $10^{M_1} - 1$ est divisible par d. Il est de même divisible par d', d'', etc., mais ces nombres sont premiers entre eux, donc $10^{M_1} - 1$; est divisible par $dd'd''$..... Ainsi, dans la fraction décimale égale à $\frac{1}{dd'd''}$..... l'une des périodes se termine au chiffre de rang M_1; mais cette période a M chiffres, donc M ne surpasse pas M_1. D'un autre côté M étant multiple de tous les nombres m, m', m'', etc. (II), ne peut être moindre que M_1 leur plus petit multiple, donc il lui est égal.

IV. Si les dénominateurs des premières fractions contiennent des facteurs communs autres que 2 et 5, nommons D le plus petit multiple commun de ces dénominateurs débarrassés des facteurs 2, 5; toute fraction dont le dénominateur débarrassé des facteurs 2, 5 sera égal à D, conduit à une période dont le nombre des chiffres est encore le plus petit multiple des nombres de chiffres des périodes correspondantes aux premières fractions.

Cette proposition, qui comprend la précédente, se démontre de même en observant que $10^{M_1}-1$ multiple commun de d, d', d'', etc., est divisible par tous leurs facteurs premiers élevés aux plus hautes puissances où ils se trouvent, et, par conséquent, est divisible par le produit de ces puissances, c'est-à-dire par le plus petit multiple D des nombres d, d', d'', etc.

V. Il résulte du théorème III que pour connaître le nombre des chiffres de la période à laquelle donne lieu la conversion en décimales de la fraction irréductible $\frac{N}{2^p 5^q a^\alpha a'^{\alpha'} \ldots}$, dont le dénominateur est décomposé en facteurs premiers, il suffit de connaître les nombres de chiffres des périodes correspondantes à $\frac{1}{a^\alpha}$, $\frac{1}{a'^{\alpha'}}$, etc. Occupons-nous donc du calcul relatif à ces dernières fractions.

D'abord s'il s'agit d'une fraction $\frac{1}{a}$ dont le dénominateur est premier, on sait que le nombre des chiffres de la période est sous-multiple de $a-1$ (p. 462, t. I) (*). Le reste 1 qui est le premier reste périodique, ne pouvant se trouver qu'aux rangs sous-multiples exacts de $a-1$, il suffit de déterminer successivement les restes de ces divers rangs jusqu'à ce que l'on trouve l'un d'eux égal à l'unité, ce qu'on peut faire sans passer par tous les restes qui précèdent. Par exemple, si les restes de rangs n, n' sont r, r', celui de rang $n+n'$ sera le même que le reste de la division de rr' par le dénominateur; en effet, on a $10^n = Ma + r$, $10^{n'} = Ma + r'$, en désignant par Ma un multiple quelconque de a, d'où résulte $10^{n+n'} = Ma + rr'$.

(*) Cette proposition, qui a lieu pour tout système de numération dont la base b n'est pas divisible par le nombre premier a, est fondée sur ce que la division de b^{a-1} par a donne pour reste 1, (théorème de *Fermat*); car il résulte de là que l'une des périodes se termine au chiffre de rang $a-1$, c'est-à-dire que les $a-1$ premiers chiffres composent un nombre exact de périodes.

On peut même pour simplifier employer les restes négatifs dans ce calcul, s'ils sont moindres que les restes positifs; mais alors il faut avoir soin de tenir compte de leurs signes dans la multiplication. On voit que si le reste d'un certain rang n est $a-1$ ou simplement -1, la période a nécessairement $2n$ chiffres; réciproquement si la période a $2n$ chiffres, le reste de rang n est toujours -1, car a divisant $10^{2n}-1$ ou $(10^n-1)(10^n+1)$, sans diviser 10^n-1 doit diviser 10^n+1.

VI. Quant au nombre des chiffres de la période correspondante à $\frac{1}{a^\alpha}$, nous savons déjà qu'il est multiple du nombre m des chiffres de la période correspondante à $\frac{1}{a}$ (théorème II); nous allons voir de plus que si ce nombre n'est pas le même pour $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{a^2}$, il sera toujours $ma^{\alpha-1}$ pour la fraction $\frac{1}{a^\alpha}$. Plus généralement *si l'on désigne par $\frac{1}{a^n}$ la dernière des fractions successives $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$,..... qui donne lieu comme $\frac{1}{a}$ à une période de* m *chiffres, la fraction $\frac{1}{a^\alpha}$ donnera lieu à une période de $a^{\alpha-n}$ chiffres.* Cette proposition se ramène à démontrer que si trois de ces fractions prises successivement $\frac{1}{a^i}$, $\frac{1}{a^{i+1}}$, $\frac{1}{a^{i+2}}$, donnent des périodes de μ, μ', μ'' chiffres, μ' étant différent de μ, on aura $\mu'=\mu a$; que de plus μ'' sera aussi différent de μ' et par suite égal à $\mu' a$ ou μa^2.

En effet: 1° on obtiendra l'expression en décimales de $\frac{1}{a^{i+1}}$ en divisant par a celle de $\frac{1}{a^i}$. Les périodes nouvelles devant avoir un nombre μk de chiffres multiple de μ, chacune d'elles sera le quotient exact de k périodes successives de la fraction décimale équivalente à $\frac{1}{a_i}$. Désignons par p une de ces k périodes, il est facile de voir que leur ensemble a pour valeur

$$p^2a^i[10^{(k-2)\mu}+2.10^{(k-3)\mu}+3.10^{(k-4)\mu}+\ldots(k-2)10^{\mu}+(k-1)]+kp$$

Car l'ensemble des deux premières périodes est $p.10^{\mu}+p = p\,(a^ip+1)+p=p^2ai+2p$; multipliant cette quantité par 10^{μ} et ajoutant p on aura l'ensemble des trois premières périodes qui peut s'écrire $p^2a^i\,(10^{\mu}+2)+3p$, en remplaçant $2p.10^{\mu}$ par son égal $2p\,(a^ip+1)$ ou $2p^2ai+2p$; multipliant encore par 10^{μ} et ajoutant p on trouve de même pour l'ensemble des quatre premières périodes $p^2ai(10^{2\mu}+2.10^{\mu}+3)+4p$ à cause de $3p.10^{\mu}=3p(a^ip+1)=3p^2ai+4p$, et ainsi de suite.

L'expression précédente ne peut se diviser par a tant que l'on a $k<a$, puisque p et par conséquent kp ne contient pas alors le facteur premier a qui se trouve dans l'autre partie de l'expression totale. (En effet si p était multiple de a, chaque période de l'expression décimale de $\frac{1}{a^i}$, se divisant par a exactement, les quotients égaux de ces divisions seraient les périodes de l'expression décimale de $\frac{1}{a^{i+1}}$, périodes qui auraient ainsi μ chiffres comme les premières, ce qui est contre l'hypothèse). Il faut donc qu'on ait $k=a$, c'est-à-dire qu'on prenne a périodes pour en avoir le moindre nombre possible dont l'ensemble se divise par a, donc $\mu'=\mu a$.

2° Remplaçons k par a dans l'expression générale écrite plus haut et divisons par a; le quotient

$$p^2a^{i-1}[10^{(a-2)\mu}+2.10^{(a-3)\mu}+\ldots\ldots+(a-2)10^{\mu}+(a-1)]+p,$$

représente une période de l'expression en décimales de $\frac{1}{a^{i+1}}$.
La partie p n'est pas divisible par a, qui divise au contraire l'autre partie de cette expression, lors même que i est égal à 1. En effet, les termes du facteur entre les crochets sont des multiples de a augmenté respectivement de 1, 2, 3,... $(a-1)$, puisque 10^μ est un multiple de a augmenté de 1. Ce facteur peut donc s'écrire $Ma+1+2+3+\ldots(a-1)$, ou $Ma+\frac{a(a-1)}{2}$, quantité dont les deux termes sont divisibles par a. Ainsi a ne divise pas exactement les périodes de l'expression décimale de $\frac{1}{a^{\alpha+1}}$ prises chacune isolément, il faut donc diviser par a l'ensemble de plusieurs de ces périodes pour en obtenir une de l'expression décimale de $\frac{1}{{}^{\alpha+2}}$, donc μ'' est différent de μ'.

Ces considérations générales sont applicables à un système quelconque de numération, de même que tout ce qui précède, sauf les modifications évidentes relatives aux facteurs de la base.

VII. D'après les propositions que nous venons de démontrer, on peut être assuré que *dans l'expression décimale de* $\frac{1}{3^r}$ *la période est de* 3^{r-2} *chiffres*, puisqu'elle est d'un chiffre pour les fractions $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3^2}$, et d'un nombre plus considérable de chiffres pour la fraction $\frac{1}{3^3}$. Si l'on prend pour a l'un quelconque des 23 autres nombres premiers consécutifs 7, 11, 13, ... 101, on trouve que $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{a^2}$ donnent lieu à des périodes d'un nombre différent de chiffres; donc, *le nombre des chiffres périodiques étant* m *pour la fraction* $\frac{1}{a}$, *il sera exactement* $ma^{\alpha-1}$ *pour la fraction* $\frac{1}{a^\alpha}$, a *étant un des nombres premiers* 7, 11, 13..... 101 (*).

VIII. Parmi les fractions de la forme $\frac{1}{a}$ dont le dénominateur est un nombre premier moindre que 100, il y en a dix qui donnent lieu à des périodes dont le nombre des chiffres est égal au dénominateur moins 1. Ce sont les suivantes : $\frac{1}{7}, \frac{1}{17}, \frac{1}{19}, \frac{1}{23}, \frac{1}{29}, \frac{1}{47}, \frac{1}{59}, \frac{1}{61}, \frac{1}{71}, \frac{1}{97}$. (D'après la dénomination d'Euler, 10 est racine primitive à l'égard de chacun de leurs dénominateurs.) Quant aux autres fractions, le tableau suivant met en regard, au-dessous de chacune d'elles, le nombre des chiffres des périodes respectives de leurs expressions en décimales. Ces nombres sont les exposants des plus petites puissances de 10, qui, divisées par les dénominateurs respectifs, donnent pour reste l'unité.

$\frac{1}{3}$,	$\frac{1}{11}$,	$\frac{1}{13}$,	$\frac{1}{31}$,	$\frac{1}{37}$,	$\frac{1}{41}$,	$\frac{1}{43}$,	$\frac{1}{53}$,	$\frac{1}{67}$,	$\frac{1}{73}$,	$\frac{1}{79}$,	$\frac{1}{83}$,	$\frac{1}{89}$,	$\frac{1}{101}$.
1,	2,	6,	15,	3,	5,	21,	13,	33,	8,	13,	41,	44,	4

IX. Concluons des nos III, VII, VIII, qu'on peut con-

(*) Pour que $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{a^2}$ donnent lieu à des périodes d'un même nombre m de chiffres il faut et il suffit que $b^{a-1}-1$ soit divisible par a^2, la base du système de numération étant le nombre b non divisible par le nombre premier a. En effet si 10^m divisé par a^2 donne 1 pour reste, il en est de même de 10^{a-1}, puisque $a-1$ est multiple de m. Réciproquement si b^{a-1} divisé par a^2 donne 1 pour reste, la période correspondante à $\frac{1}{a^2}$ a un nombre de chiffres sous-multiple de $a-1$, ce nombre de chiffres ne peut d'ailleurs être en général que m ou ma; ainsi dans le cas particulier que nous supposons, il ne peut-être que m, puisque ma n'est pas diviseur de $a-1$.

La divisibilité de $b^{a-1}-1$ par a^2 est évidente quand $b-1$ est multiple de a^2 comme il arrive pour $a=3$ dans le système décimal. Si l'on pouvait s'assurer qu'elle n'a lieu seulement alors, on en conclurait que dans tout autre cas la fraction $\frac{1}{a^\alpha}$ conduit à une période de $ma^{\alpha-1}$ chiffres.

naître exactement le nombre des chiffres de la période à laquelle donne lieu une fraction irréductible quelconque $\frac{N}{2^p.5^q.3^r.a^\alpha.a'^{\alpha'}}$, les facteurs premiers a, a',..... n'étant pas plus grands que 101. Ce nombre est le plus simple multiple de 3^{r-2}, $ma^{\alpha-1}$, $m'a'^{\alpha'-1}$, ..., les périodes correspondantes à $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a'}$, ... ayant m, m', ... chiffres.

Exemples. 1° Soit proposée la fraction $\frac{N}{91} = \frac{N}{7.13}$. Les fractions $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{13}$ donnent lieu chacune à des périodes de 6 chiffres, il en est de même de $\frac{N}{91}$.

2° Soit $\frac{N}{4212} = \frac{N}{2^2.3^4.13}$. La période a 18 chiffres, puisque $\frac{1}{3^4}$, $\frac{1}{13}$ donnent lieu à des périodes, l'une 3^{4-2} ou 9 chiffres, l'autre de 6 chiffres.

3° Soit $\frac{N}{12495} = \frac{N}{5.3.7^2.17}$. Le nombre des chiffres de la période est 336, multiple le plus petit de 1, 6.7, 16, qui correspondent à $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7^2}$, $\frac{1}{17}$.

4° Soit $\frac{N}{1658200} = \frac{N}{2^3.5^2.7^3.13^2}$, la période aura 3722 chiffres, ce nombre étant le plus petit multiple de 6.7^2, 6.13, qui correspondent à $\frac{1}{7^3}$, $\frac{1}{13^2}$.

Remarque. En terminant cette note j'indiquerai une exception au théorème énoncé (p. 469, tome I) : « Si $\frac{N}{D}$ a son dénominateur premier, et si $D - 1 = mp$, la somme de n restes périodiques pris de m en m est un multiple de D. »

Cette proposition vraie, en général, ne l'est pas si m est le nombre même des chiffres de la période, ou un multiple de ce nombre. La fraction $\frac{1}{13}$, prise pour exemple à l'article cité, peut aussi servir d'exemple pour cette exception ; les restes étant 1, 10, 9, 12, 3, 4, 1, 10, 9, 12, 3, 4, 1, ... qui se reproduisent périodiquement de 6 en 6 ; si l'on décompose $13-1$ en 6×2, il est évident que la somme de 2 restes quelconques pris de 6 en 6, ne peut être un multiple de 13. La démonstration donnée de cette proposition suppose en effet la condition, tacitement admise par l'auteur, que le reste R de la division de 10^m par D n'est pas l'unité.

La démonstration de ce théorème peut encore être présentée, en général et directement, de la manière suivante : désignons par b la base du système de numération, par R_1, R_2,... R_n les n restes pris au hasard de m en m, et par MD un multiple quelconque de D; on a, d'après la marche du calcul ordinaire :

$$\begin{aligned} R_1 b^m &= MD + R_2 \\ R_2 b^m &= MD + R_3 \\ &\dots\dots\dots \\ R_n b^m &= MD + R_1 \end{aligned}$$

Transposant les termes R_2, R_3,... R_n, R_1 dans les premiers membres, et additionnant les égalités, il vient $(R_1 + R_2 + \ldots + R_n)(b^m - 1) = MD$, d'où l'on conclut que D divise $R_1 + R_2 \ldots + R_n$ s'il ne divise pas $b^m - 1$, c'est-à-dire si la période n'a pas un nombre de chiffres égal à m ou sous-multiple de m (*).

(*) On peut consulter un mémoire de M. Penjon (*Gergonne*, tome IV, p. 265 ; 1813-14).

QUESTIONS RELATIVES A L'ELLIPSOÏDE.

PAR M. COURTOIS,
Professeur.

—

I.

Problème.— *Par le centre d'un ellipsoïde, on mène des plans qui interceptent des ellipses d'aire constante, et, par le même point, des normales à chacun de ces plans :* et on propose de trouver *la surface, lieu géométrique de ces normales.*

1. Avant de résoudre cette question je cherche, en fonction des coefficients, l'expression de l'aire d'une ellipse rapportée à son centre. L'équation de cette courbe sera

$$My^2+2Pxy+Nx^2=1. \qquad (1)$$

Pour la ramener à la forme $Qy^2+Rx^2=1$, il faut poser :

$$Q=\frac{1}{2}\left\{M+N-\sqrt{4P^2+(M-N)^2},\right\}$$

$$R=\frac{1}{2}\left\{M+N+\sqrt{4P^2+(M-N)^2}.\right\}$$

Or, si l'on désigne par $2h$ la moyenne entre les deux axes de l'ellipse, l'aire sera ϖh^2, et l'on aura

$$h^2=\frac{1}{Q.R}=\frac{1}{M.N-P^2}. \qquad (2)$$

2. L'équation de l'ellipsoïde rapportée à son centre et à ses axes étant $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (3)$$

je coupe cet ellipsoïde par un plan, passant par le centre, et dont l'équation sera $z = \alpha x + \beta y$. (4)

Si je désigne par θ l'inclinaison de ce plan sur le plan des xy; par ψ l'angle que fait, avec l'axe des x, l'intersection des deux plans, ces angles seront déterminés en fonction de α et β, par les relations :

$$\text{tang}\,\psi = -\frac{\alpha}{\beta}, \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+1}}. \qquad (5)$$

Pour avoir l'équation de la section faite dans l'ellipsoïde, rapportée à des axes pris dans le plan sécant, je fais usage des formules de transformation suivantes :

$$z = y'\sin\theta,\ y = x'\sin\psi - y'\cos\theta\cos\psi,\ x = x'\cos\psi + y'\cos\theta\sin\psi.$$

Ces valeurs, substituées dans l'équation (1), donnent pour l'équation de cette section :

$$x'^2\left(\frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{-b^2}\right) + 2x'y'\sin\psi\cos\psi\cos\theta\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)$$
$$+ y'^2\left(\frac{\sin^2\psi\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\psi\cos^2\theta}{b^2} + \frac{\sin^2\theta}{c^2}\right) = 1.$$

3. Pour avoir l'aire de la section, je compare cette dernière équation avec (1); je substitue dans (2) les valeurs de M, P, N, déduites de cette comparaison, et je trouve ainsi, toute réduction faite :

$$h^4 = \frac{a^2b^2c^2}{a^2\sin^2\theta\sin^2\psi + b^2\sin^2\theta\cos^2\psi + c^2\cos^2\theta}. \qquad (6)$$

Telle est la relation constante qui doit exister en θ et ψ, pour que la section ait une aire constante égale à ϖh^2.

On peut exprimer cette relation au moyen des coefficients α, β de l'équation du plan sécant. Il suffit de remplacer les lignes trigonométriques de θ et ψ par leurs valeurs tirées des équations (5); il vient alors

$$h^4 = \frac{a^2b^2c^2(\alpha^2+\beta^2+1)}{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2}. \qquad (7)$$

4. Les équations de la normale au plan sécant menée par le centre de l'ellipsoïde, sont :

$$x = -\alpha z, \quad y = -\beta z. \qquad (8)$$

Si on substitue les valeurs de α, β, tirées de ces équations dans la relation (7), on trouve

$$x^2\left(\frac{1}{h^4}-\frac{1}{b^2c^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{h^4}-\frac{1}{a^2c^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{h^4}-\frac{1}{a^2b^2}\right)=0, \quad (9)$$

équation du lieu cherché. C'est un cône du deuxième degré dont les axes coïncident avec ceux de l'ellipsoïde.

La discussion de cette équation est facile.

Si on suppose $\qquad a > b > c$,

on reconnaît que l'on ne peut poser $h^2 > ab$ ou $h^2 < bc$; d'où l'on conclut que les sections maximum ou minimum sont perpendiculaires au petit axe ou grand axe. On aurait pu d'ailleurs trouver ce résultat en cherchant les valeurs de α et β qui rendent maximum ou minimum la valeur de h^2.

On reconnaît ensuite que : 1° si $h^2 = ab$, le cône se réduit à l'axe des z ; 2° si $h^2 = bc$, le cône se réduit à l'axe des x ; 3° si $h^2 = ac$, le cône se réduit à deux plans passant par l'axe moyen, leurs traces sur le plan des zx font, avec l'axe des z, des angles dont la tangente trigonométrique est donnée par la relation

$$\theta = \pm\frac{c}{a}\sqrt{\frac{(h^2-ab)(h^2+ab)}{(h^2-bc)(h^2+bc)}}.$$

4° Si h^2 est compris entre ab et ac, le cône elliptique a pour axe transverse l'axe des z.

5° Si h^2 est compris entre ac et bc, le cône a pour axe transverse l'axe des x.

6° Enfin, il est facile de voir que ce cône serait de révolution, si l'ellipsoïde était lui-même de révolution, aplati ou allongé.

II.

Théorème. *Chaque plan tangent à l'ellipsoïde, parallèle à l'un des plans diamétraux qui forment une section d'aire constante, est situé à une distance constante du centre de l'ellipsoïde.*

L'équation du plan tangent est, en désignant par x', y', z' les coordonnées du point de contact :

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}=1. \qquad (10)$$

Pour exprimer que ce plan est parallèle au plan dont l'équation est $z=\alpha x+6y$, il faut poser :

$$\alpha=-\frac{c^2x'}{a^2y'}, \quad 6=-\frac{c^2y'}{b^2x'}.$$

Ces valeurs, substituées dans l'équation (7), donnent, en observant que les coordonnées x', y', z', sastisfont à l'équation de l'ellipsoïde :

$$h^4=a^2b^2c^2\left(\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}+\frac{z'^2}{c^4}\right).$$

Or, si l'on désigne par δ la distance du centre au plan tangent en $x'\,y'\,z'$, on a la relation

$$\frac{1}{\delta^2}=\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^4}+\frac{z'^2}{c^4}. \qquad (11)$$

Donc, enfin : $$\delta^2=\frac{a^2b^2c^2}{h^4}. \qquad (12)$$

Ce qui démontre le théorème énoncé.

6. Il résulte de cette proposition que le cône décrit par les perpendiculaires abaissées du centre, sur les plans tangents équidistants de ce centre, doit être identique avec celui que nous avons déjà trouvé. C'est, en effet, ce qu'il est facile de vérifier, en cherchant directement le lieu des perpendicu-

laires abaissées sur ces plans tangents équidistants du centre. On trouve ainsi l'équation :

$$x^2(a^2-\delta^2)+y^2(b^2-\delta^2)+z^2(c^2-\delta^2)=0, \qquad (13)$$

et il est facile de faire voir, en se servant de la relation (12), que cette équation (13) est identique avec l'équation (9).

7. On conclut encore de là, que les plans tangents parallèles aux sections d'aire constante, sont tangents à une sphère concentrique à l'ellipsoïde et de rayon δ. Ces plans touchent la sphère en une suite de points donnés par l'intersection de cette surface avec celle du cône trouvé. Les équations de cette intersection seront donc :

$$\left.\begin{array}{c} x^2+y^2+z^2=\delta^2 \\ x^2(a^2-\delta^2)+y^2(b^2-\delta^2)+z^2(c^2-\delta^2)=0 \end{array}\right\} \qquad (14)$$

En éliminant successivement x^2, y^2, z^2 on trouve pour les équations des projections sur les trois plans coordonnés :

$$\left.\begin{array}{l} y^2(a^2-b^2)+z^2(a^2-c^2)=\delta^2(a^2-\delta^2) \\ z^2(b^2-c^2)+x^2(a^2-b^2)=\delta^2(b^2-\delta^2) \\ x^2(a^2-c^2)+y^2(b^2-c^2)=\delta^2(\delta^2-c^2) \end{array}\right\} \qquad (15)$$

Ces équations nous apprennent que les projections sur les deux plans perpendiculaires au grand et au petit axe sont des ellipses, et que la projection sur le plan perpendiculaire à l'axe moyen est une hyperbole dont l'axe transverse est dirigé suivant le grand ou le petit axe selon que δ est plus petit, ou plus grand que l'axe moyen.

III.

8. Je me proposerai encore de trouver l'équation de la surface, lieu des rayons menés du centre aux points de contact des plans tangents à l'ellipsoïde, satisfaisant aux conditions précédentes.

Les équations d'un de ces rayons seront : $y = \frac{y'}{z'} z$; $x = \frac{x'}{z'} z$.
Ces équations, jointes à la relation exprimant que le point $(x', y', z',)$ est situé sur l'ellipsoïde, permettent de déterminer pour x', y', z', des valeurs qui, substituées dans la relation (11), conduisent à

$$x^2 \frac{\delta^2 - a^2}{a^4} + y^2 \frac{\delta^2 - b^2}{b^4} + z^2 \frac{\delta^2 - c^2}{c^4} = 0. \qquad (16)$$

La surface est un cône qui a même axe transverse que le précédent. Si l'on cherche les projections de l'intersection de ce cône avec la sphère de rayon δ, on trouvera des résultats tout à fait analogues à ceux qui ont été trouvés n° 7.

Il en serait encore de même si l'on cherchait les projections de l'intersection du cône avec l'ellipsoïde.

9. Enfin, si l'on cherche le lieu des intersections successives des plans diamétraux qui font une section d'aire constante, on trouve encore un cône du 2e degré. Pour trouver ce lieu, on élimine, entre les équations (4) et (7), β, par exemple; puis, entre l'équation résultante (renfermant x, y, z, α,) et sa dérivée par rapport à α, on élimine ce dernier coefficient. On arrive ainsi à l'équation cherchée,

$$x^2 \cdot \frac{1}{\delta^2 - a^2} + y^2 \frac{1}{\delta^2 - b^2} + z^2 \frac{1}{\delta^2 - c^2} = 0. \qquad (17)$$

On peut donc considérer le plan sécant mobile comme roulant autour de ce cône, en lui restant toujours tangent. Ce dernier cône et le premier que nous avons trouvé, ont entre eux cette relation remarquable, que les génératrices de l'un sont perpendiculaires aux plans tangents à l'autre, et réciproquement. Cela résulte de la définition même qui nous a conduit à trouver ces surfaces. Mais cette conséquence peut aussi être mise facilement en évidence par un calcul direct, si l'on observe que, dans les équations (13) et (17), les coefficients de x^2, y^2, z^2 sont réciproques l'un de l'autre.

N. B. Les propriétés que nous venons d'examiner deviennent bien plus intéressantes qu'un simple calcul, lorsqu'on sait que l'emploi de ces mêmes propriétés, considérées dans l'ellipsoïde central d'un corps, mobile autour d'un point fixe, a permis à M. *Poinsot* de donner une image si claire et si nette du mouvement de ce corps.

THÉORÈME.

Soit un nombre quelconque m *de points donnés, et* n *un nombre entier moindre que* (m—1); *on peut déterminer* (n+1) *points tels, que si, des points donnés et des points trouvés, on mène des lignes droites à un autre point quelconque, la somme des puissances* 2n *des lignes menées des* m *point donnés soit à la somme des puissances* 2n *des lignes menées des autres points, comme* m *est à* (n+1).

Ce théorème a été donné, sans démonstration, par *Mathews* Stewart, dans l'ouvrage intitulé : *Some general theorems of considerable use in the higher parts of mathematics.* On trouve dans cet ouvrage plusieurs autres théorèmes du même genre, et qui n'ont pas été démontrés.

THÉORÈME DE M. STURM.

I. La disparition inattendue, par des moyens simples, d'un obstacle contre lequel s'étaient heurtés les princes de la science était un événement considérable; de là, cette profonde sensation que produisit, en 1829, la découverte de M. Sturm, sur les géomètres de toute classe. L'un d'entre eux, M. Mayer-Dalembert (*), doué d'un grand esprit de spéculation, et sachant le prix de toute chose, acquit de l'auteur le droit de faire usage de son invention. Le théorème, devenu si célèbre, fut inséré, pour la première fois, dans les *Éléments d'algèbre* que publia en 1830 M. Dalembert, de concert avec M. Choquet. Exigé tacitement (**) pour l'admission à l'École polytechnique, ce théorème est devenu, depuis, obligatoire pour tous les auteurs d'éléments; maintenant, il est expliqué partout avec clarté et rigueur, et, toutefois, de nombreuses interrogations m'ont convaincu que les élèves savent très-bien le procédé des opérations, mais que beaucoup d'entre eux ne voient la théorie qu'à travers des nuages. J'ai cru m'apercevoir que cela tient aux propositions auxiliaires qui servent à établir la théorie et qui, n'étant pas assez détachées du fond, jettent quelque obscurité sur l'exposition. Il m'a donc semblé utile de donner, non une nouvelle démonstration, différente de celle qui est dans les traités, mais une démonstration plus développée, différem-

(*) Mayer (Mathias), né à Mutzig (Bas-Rhin), le 27 déc. 1786, élève de l'École polyt. l'an XIV (1806), mort chef d'institution le 22 janvier 1841.

(**) Ce théorème si important n'est pas expressément énoncé dans le programme!

ment arrangée. Dans un autre numéro, nous donnerons la magnifique théorie des résidus, qu'on doit à l'illustre M. Cauchy, et où tous les théorèmes sur les équations découlent d'une source unique.

II. *Remarque essentielle.* Dans ce qui suit, il ne s'agit que de *fonctions algébriques entières à une seule variable et à coefficients numériques réels.*

La racine d'une fonction est un nombre qui, mis à la place de la variable, rend la fonction égale à zéro.

III. *Lemme I.* Si deux nombres substitués dans une fonction donnent des résultats de signes contraires, une variation, il y a un nombre impair de racines compris entre ces nombres, et au moins une; si les résultats de la substitution sont de mêmes signes, offrent une permanence, il y a un nombre pair de racines compris entre ces nombres, et il peut n'y en avoir aucune.

IV. *Lemme II.* Si deux nombres comprennent entre eux un nombre impair de racines, les résultats de la substitution offrent une variation; si les deux nombres comprennent un nombre pair de racines, les résultats offrent une permanence.

Remarque. Dans ces deux lemmes, les racines égales sont comptées selon leur degré de multiplicité.

V. *Lemme III.* $F(x)$ et $F_1(x)$ étant deux fonctions ; r une racine de la première fonction et non de la seconde, il existe toujours un nombre h tel, que $r-h$ et $r+h$ comprennent la seule racine r de $F(x)$ et aucune de $F_1(x)$.

En effet, concevons qu'on retranche r de toutes les racines de $F(x)$ et de $F_1(x)$, il suffit de prendre $2h$ moindre que la plus petite de ces différences.

VI. *Lemme IV.* $F(x)$ étant une fonction et $F'(x)$ la fonction dérivée première ; r étant une racine, simple ou multiple, de $F(x)$; si $r-h$ et $r+h$ comprennent la racine r et aucune autre racine de $F(x)$ et de $F'(x)$, la substitution du nombre

$r-h$, dans les deux fonctions, donnera nécessairement une *variation*, et la substitution du nombre $r+h$, dans les deux fonctions, donnera nécessairement une *permanence*.

C'est le lemme fondamental sur lequel repose le théorème, objet de cette note.

Soit n le degré de multiplicité de la racine r; on aura :

$$F(r-h) = \frac{(-h)^n}{1.2.3\ldots n} F^{n)}(r) + \ldots\ldots$$

et
$$F'(r-h) = \frac{(-h)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{(n)}(r) + \ldots\ldots$$

ce qui donne toujours une variation.

F^n désigne la $n^{\text{ème}}$ dérivée.

VII. *Lemme V.* Si, dans trois termes consécutifs, le premier et le troisième forment une permanence, les trois offrent ou deux permanences ou deux variations; si le premier et le troisième forment une variation, les trois offrent une variation et une permanence, ou une permanence et une variation.

VIII. Soient $F(x)$, $F_1(x)$, deux fonctions n'ayant aucun facteur commun; on suppose la seconde fonction d'un degré moins élevé que la première. Faisons sur ces fonctions la recherche du plus grand commun diviseur, et désignons les restes successifs par $F_2(x)$, $F_3(x)$, etc., et les quotients correspondants par Q_1, Q_2, Q_3, etc.; on aura les identités :

$$\left.\begin{aligned}
F(x) &= F_1(x).\ Q_1 + F_2(x) \\
F_1(x) &= F_2(x).\ Q_2 + F_3(x) \\
F_2(x) &= F_3(x).\ Q_3 + F_4(x) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
F_n(x) &= F_{n+1}(x) Q_n + F_{n+2}(x).
\end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Écrivons les restes sur une ligne horizontale :

$$F(x),\ F_1(x),\ F_2(x)\ldots\ldots,\ F_n(x),\ F_{(n+1)}(x),\ F_{(n+2)}(x)\ldots\ldots \quad (B)$$

Les deux fonctions $F(x)$, $F_1(x)$ n'ayant par supposition aucun commun diviseur, on démontre, comme en arithmétique, que deux restes consécutifs ne peuvent avoir de commun diviseur ; en d'autres termes, il n'existe pas de nombres qui, substitués à la place de x dans deux fonctions consécutives, puissent les rendre toutes deux égales à zéro; le dernier de ces restes, $F_m(x)$, est nécessairement un nombre différent de zéro.

IX. Soient a et b deux nombres non racines de la fonction $F(x)$ et $b > a$; si l'on substitue a à la place de x dans chacune des fonctions de la suite (B), supposons que l'on obtienne p permanences et v variations, et que, si l'on substitue b, on obtienne $p \pm k$ permanences et $v \mp k$ variations.

k indique le nombre de permanences ou de variations gagnées ou perdues en passant de a à b.

Imaginons que a croisse par degrés insensibles jusqu'à ce qu'il atteigne la valeur de b, à chaque accroissement correspond un certain état de la suite (B) qui présentera $p \pm k'$ permanences et $v \mp k'$ variations. Soit r une racine de la fonction $F_{(n+1)}(x)$, et comprise entre a et b; pour cette valeur, $F_{(n+1)}(x)$ s'anéantira; et alors, d'après les identités (A), on aura $F_n(x) = F_{(n+2)}(x)$; ces deux fonctions étant égales, offrent donc une permanence, soient $r-h$ et $r+h$, deux valeurs qui ne renferment que la seule racine r et aucune racine des fonctions voisines; $F_n(r-h)$, $F_{(n+2)}(r-h)$ forment donc aussi une permanence, ainsi que $F_n(r+h)$ et $F_{(n+2)}(r+h)$, puisque ces fonctions ne peuvent changer de signe (lemme I); mais, en vertu de ce même lemme, la fonction intermédiaire change de signe, en passant de $F_{(n+1)}(r-h)$ à $F_{(n+1)}(r+h)$; donc (lemme V) ou deux permanences seront changées en deux variations, ou bien deux variations seront changées en deux permanences. Il est donc impossible de savoir quels changements dans le nombre de permanences et de variations apportent les racines de la suite (B) comprises entre a et b; de sorte que le nombre k n'apprend rien sur le nombre de ces racines.

X. Pour remédier à cet inconvénient, M. Sturm a eu l'idée heureuse (*) de faire l'opération de la recherche du plus grand commun diviseur, mais en multipliant chaque reste par -1; ce qui ne donnant pas de nouveaux facteurs à ces restes, n'altère pas les propriétés ci-dessus énoncées (VIII). Les identités (A) prennent cette forme :

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= F_1(x).\, q_1 - f_2(x) \\ F_1(x) &= f_2(x).\, q_2 - f_3(x) \\ f_2(x) &= f_3(x).\, q_3 - f_4(x) \\ & \dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \qquad (A')$$

Nous désignons par la lettre f les restes ainsi changés.

La suite (B) est remplacée par celle-ci :

$$F(x),\, F_1(x),\, f_2(x),\, f_3(x), \dots f_n(x),\, f_{(n+1)}(x),\, f_{(n+2)}(x), \dots \quad (B')$$

Si r est une racine de $f_{(n+1)}(x)$, on aura en vertu des identités (A') :

$$f_n(r) = -f_{(n+2)}(r).$$

Ainsi $f_n(r-h)$, $f_{(n+2)}(r-h)$, présentent une variation, ainsi que $f_n(r+h)$ et $f_{(n+2)}(r+h)$; donc les trois fonctions consécutives $f_n(r-h)$, $f_{(n+1)}(r-h)$, $f_{(n+2)}(r-h)$ présentent ou une variation et une permanence ou l'inverse (lemme V) ; il en est de même pour $r+h$; ainsi dans le passage de $r-h$ à $r+h$, en cet endroit de la suite, une permanence sera remplacée par une variation et *vice versâ*; et la même chose a lieu pour toutes les fonctions qui s'annulent entre les deux voisines. Ainsi le nombre final k ne peut provenir que des changements de signe de la première fonction $F(x)$, qui n'a pas de fonction voisine à gauche ; supposons que l'on ait $k=0$; ceci peut annoncer ou que $F(x)$ n'a pas changé de signe ou

(*) Mémoire des Savants étrangers, tome VI, p. 271. 1835.

qu'il a changé deux fois, quatre fois ;..... en général, si k est un nombre pair, il y a un nombre pair de racines entre a et b; et si k est impair, il y a un nombre impair de racines, ce qui n'apprend rien sur le nombre des racines. D'ailleurs, pour obtenir ce résultat, on n'a pas besoin de la suite (A'); la substitution dans la première fonction $F(x)$ suffit (lemme I).

XI. Dans tout ce qui précède, $F_1(x)$ est une fonction arbitraire ; supposons que ce soit la première dérivée de $F(x)$, qu'on ait $F_1(x) = F'(x)$; $F(x)$ et $F'(x)$ ne devant pas avoir de facteurs communs (VIII), il s'ensuit que $F(x)$ ne devra avoir que des racines simples ; soient α, β, γ,... les racines de $F(x)$, suivant l'ordre ascendant de grandeur, comprises entre a et b, et h un nombre remplissant les conditions du lemme III pour chaque racine. Substituons a dans la suite (A') et supposons qu'on compte p permanences et ν variations. Faisant croître a, depuis a jusqu'à $\alpha-h$, les permanences et les variations peuvent se déplacer, mais le nombre n'en changera pas; à $\alpha-h$, la tête de la suite présente une variation qui se change en permanence pour $\alpha+h$ (lemme IV), tandis que, pour les autres termes, il pourra y avoir déplacement, mais non changement dans le nombre (X); donc, en $\alpha+h$, il y aura $p+1$ permanences et $\nu-1$ variations ; ce nombre se conservera, avec déplacement possible, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à $\beta+h$; alors on aura $p+2$ permanences et $\nu-2$ variations, et ainsi de suite; donc, si, arrivé en b, on a $p+k$ permanences, le nombre k marque le nombre de racines comprises entre a et b, et c'est là le théorème de M. Sturm; et l'on voit, d'après le lemme IV, qu'en allant de la limite inférieure a à la limite supérieure b, k est essentiellement positif.

Observation. Si une des limites, a ou b, ou toutes les deux étaient racines d'une des fonctions $f_n(x)$, on peut remplacer la fonction annulée par ± 0, ce qui, ayant lieu entre une variation, n'altère pas le résultat.

XII. En comparant les identités (A) et (A'), on en conclut que

$$f_2(x) = -F_2(x),\ f_3(x) = -F_3(x),\ f_4(x) = F_4(x),$$
$$f_5(x) = F_5(x),\ f_6(x) = -F_6(x),\ \text{etc.}$$

On déduit donc la suite (B') de la suite (B), en multipliant par -1, les troisième et quatrième termes, les sixième et septième, neuvième et dixième, etc., et sans changer les autres termes. On voit donc que, dans l'opération, on peut, si l'on veut, ne changer les signes que des premier, deuxième, cinquième, sixième, neuvième et dixième restes, etc.

XIII. Le dernier terme de la suite (B') est un nombre; mais si $F(x)$ et $F'(x)$ ont pour plus grand diviseur commun $f_t(x)$, le dernier terme de (B') sera ce diviseur commun multiplié par un nombre N.

Considérons la suite :

$$\frac{F(x)}{f_t(x)},\ \frac{F'(x)}{f_t(x)},\ \frac{f_1(x)}{f_t(x)},\ \ldots\ldots\ldots\ \frac{Nf_t(x)}{f_t(x)}. \quad (B'')$$

Ce sont évidemment des fonctions algébriques entières, où deux fonctions consécutives n'ont plus de diviseur commun; le lemme IV s'applique aux deux premières fonctions, et toutes les autres fonctions se déduisent aussi par la recherche du plus grand commun diviseur entre ces premières fonctions; le théorème de Sturm existe donc pour cette suite; mais elle présente le même nombre de permanences et de variations que les numérateurs; donc le théorème est aussi applicable à ces numérateurs. Ainsi la suite $F(x)$, $F'(x)$, $f_2(x)$,.. $f_t(x)$, peut servir à connaître le nombre de racine distinctes comprises entre a et b, mais non pas le degré de multiplicité de ces racines.

XIV. Le tableau suivant (*) met en évidence le mouvement

(*) On trouve plusieurs de ces tableaux dans le mémoire de M. Midi (E.) : du Théorème de M. Sturm et de ses Applications numériques. 1836, in-4° de 37 pages. Bachelier, lib.

des signes, dans l'intervalle de la limite inférieure à la limite supérieure; nous supposons une équation du quatrième degré ayant les racines réelles α, β, γ, δ, comprises entre les nombres a et b.

a.	$+-+-+$
$\alpha-h$.	$+-+-+$
α.	$0-+-+$
$\alpha+h$.	$--+-+$
$\beta-h$.	$-++-+$
β.	$0++-+$
$\beta+h$.	$+++-+$
$\gamma-h$.	$+--++$
γ.	$0--++$
$\gamma+h$.	$---++$
$\delta-h$.	$-++++$
δ.	$0++++$
$\delta+h$.	$+++++$
b.	$+++++$

On voit que les limites a et b comprennent 4 racines de $F(x)$, 3 racines de $F'(x)$, 2 racines de $f_2(x)$, et une racine de $f_3(x)$; de semblables conclusions peuvent se déduire pour des équations de tous les degrés; on voit aussi par là que le théorème de Rolle est une conséquence du théorème de Sturm.

XV. Il y a une infinité de manières de former des fonctions auxiliaires $f_2(x)$, $f_3(x)$, etc., dans la suite (B'), et qui peuvent servir également à trouver le nombre des racines, pourvu que les deux premières fonctions soient la fonction donnée et sa dérivée. Voici un moyen très-simple indiqué par M. Sturm, dans le mémoire cité (*page* 317); soient les deux fonctions consécutives $f_n(x)$, $f_{(n+1)}(x)$, de la suite (B'); au lieu d'ordonner les polynômes suivant les puissances décroissantes de x, comme on le fait d'ordinaire, on les ordonne suivant les puissances croissantes ; la division donnera un quotient $p+qx$ et un reste divisible par x^2 ; multipliant ce reste par -1, prenons pour $f_{(n+2)}(x)$, ce produit divisé par x^2 ; on aura l'identité : $f_n(x)=f_{(n+1)}(x)(px+q)-x^2f_{(n+2)}(x)$.

Lorsque la fonction intermédiaire s'annule, les deux fonctions voisines donnent une variation ; donc les fonctions ainsi obtenues remplissent les conditions exigées.

On peut donc former les fonctions auxiliaires par deux procédés de division différents ; en les combinant, on obtient plusieurs systèmes de fonctions auxiliaires. On peut même écrire en général :

$$f_n(x)=f_{(n+1)}(x).(px+q)-(ax^2+bx+c)f_{(n+2)}(x).$$

On peut se donner a, b, c, à volonté, pourvu que le trinôme conserve une valeur positive pour une valeur quelconque de x ; on divise $f_n(x)-(px+q)f_{(n+1)}(x)$ par ax^2+bx+c ; il vient un quotient qu'on prend pour $f_{(n+2)}(x)$ et un reste de la forme $Kx+L$; égalant à zéro K et L, qui renferment p et q au premier degré, on aura les valeurs de ces deux constantes. On suppose ici que le degré de $f_{(n+1)}(x)$ est moindre d'une unité que le degré de $f_n(x)$; s'il était moindre de deux unités, il faudrait prendre pour multiplicateur le trinôme $p+qx+rx^2$, etc. ; on voit donc qu'à partir de $F'(x)$, il existe une infinité de systèmes de fonctions auxiliaires. On peut même substituer à la fonction $F'(x)$, la fonction $F'(x+k)$, pourvu que k soit plus petit que la plus petite différence entre les racines de $F(x)$ et de $F'(x)$.

XVI. $F'(x)$ est, comme on sait, la somme des combinaisons des facteurs simples de $F(x)$ (du degré m), pris $m-1$ à $m-1$; $f_2(x)$ a de même une certaine relation avec ces mêmes facteurs pris $m-2$ à $m-2$; et, en général, $f_n(x)$ a une certaine relation avec ces facteurs pris $m-n$ à $m-n$; c'est le théorème de M. Sylvester (t. I, page 166) que

M. Sturm a récemment démontré (*Journal de Liouville* 1842). Nous possédons, depuis longtemps, une autre démonstration ; nous les donnerons l'une et l'autre, dans notre article sur l'élimination.

XVII. Nous n'insistons pas sur les divers usages du théorème ; on les trouve partout ; mais, avant de finir, nous croyons de la justice de rappeler que, dès 1815, M. Cauchy avait donné une règle sûre pour trouver le nombre de racines réelles d'une équation, à l'aide des alternances de signe d'une suite de fonctions, mais d'un calcul long et laborieux. Le théorème de Sturm est donc remarquable, non pas tant par la nouveauté du sujet que par l'extrême simplicité du procédé. L'auteur y est parvenu, en méditant sur une certaine équation différentielle du second ordre ; c'est ce que nous lisons dans son mémoire de 1833, publié en 1836 (*Journal de Liouville*, tome I, p. 186), et où le célèbre analyste s'est élevé à la hauteur de Lagrange. Tm.

RELATIONS D'IDENTITÉ

Et équations fondamentales relatives aux courbes du second degré.

(Suite, *voir* p. 26.)

—

XIX. *Angle des asymptotes ; puissance de l'hyperbole.*

Désignant par δ l'angle des asymptotes, les équations de ces lignes (XVII) donnent

$$\tan^2\delta=\frac{m\sin^2\gamma}{N^2}\,;\ \cos^2\delta=\frac{N^2}{N^2+m\sin^2\gamma}\,;\ \sin^2\delta=\frac{m\sin^2\gamma}{N^2+m\sin^2\gamma}\quad(15)$$

ce qu'on peut tirer aussi de l'équation (3).

Puissance de l'hyperbole $=\frac{a^2}{2}\frac{\sin\delta}{1+\cos\delta}$ où a désigne le $\frac{1}{2}$ axe focal : remplaçant a, $\sin\delta$, $\cos\delta$, par leurs valeurs, tirées des équations (3) et (15); il vient, puissance de l'hyperbole $=\sin\gamma.\frac{L\sqrt{m}}{m^2}$ (16).

Observation 1. Lorsque deux hyperboles égales sont rapportées aux mêmes axes, il faut donc que $\frac{L^2}{m^3}$ ait même valeur dans les deux courbes; ce qui s'accorde avec le corollaire 1 du paragraphe VIII.

Observation 2. $\frac{m\sin^2\gamma}{N^2}$ est aussi le carré de la tangente de l'angle que forment les diamètres conjugués égaux dans l'ellipse; ce qu'on déduit facilement de l'équation (3); aussi cette fraction suffit-elle pour établir le caractère de similitude entre les ellipses. Mais pour les hyperboles, il faut de plus que le produit NL ait le même signe dans les deux courbes, afin d'exclure le cas des hyperboles conjuguées. Lorsque NL est positif, l'hyperbole est située dans l'angle aigu des asymptotes, et lorsqu'il est négatif, l'hyperbole est dans l'angle obtus.

XX. *Intersection d'une conique et d'une droite; condition de tangence.*

Soit $dy+ex+f=0$, l'équation d'une droite; éliminant y entre cette équation et l'équation (1), on obtient

$$Rx^2+Sx+T=0\ (17);\quad R=Ae^2-Bde+Cd^2;$$
$$S=2Aef-Bdf-Dde+Ed^2;\quad T=Af^2-Ddf+Fd^2;$$

on parvient au même résultat, en faisant dans l'équation finale de la page 35, $A'=B'=C'=0$; l'équation en y s'obtient, en changeant A en C, D en E, d en e, et *vice versâ*.

$$S'^2 - 4RT = d^2\ (l'\,d^2 - 2den + le^2 + mf^2 + 2fdk' + 2fek) = d^2V.$$

Si V est positif, la droite coupe la conique en deux points; si V est négatif, la droite ne rencontre pas la conique; la droite est tangente, lorsqu'on a l'équation

$$V = 0\ (18),\ \text{et alors}\ x' = -\frac{S}{2R}\ ;\ y' = -\frac{S'}{2R};$$

x' et y' sont les coordonnées du point du contact.

Ou $$S' = 2Cdf - Bef - Ede + De^2.$$

Coroll. 1. $-\dfrac{S}{2R}$ et $-\dfrac{S'}{2R}$ sont dans le cas général les coordonnées du point de moyenne distance des intersections, réelles ou imaginaires, de la droite et de la conique; faisant

$$e = dr\ ;\ f = ds\ ;\ \text{il vient}\ x' = -\frac{S}{2R} = \frac{-2Ars + Bs + Dr - E}{2(Ar^2 - Br + C)}$$

$$y' = -\frac{S'}{2R} = \frac{-2Cs + Brs - Dr^2 + Er}{2(Ar^2 - Br + C)}$$

L'équation de la sécante est $y + rx + s = 0$; si r est constant et s variable, on a un système de sécantes parallèles; éliminant s entre cette équation, et les coordonnées du point de moyenne distance, on obtient le lieu géométrique de ce point; effectuant cette élimination, il vient

$$r\ (2Ay + Bx + D) = 2Cx + By + E\ (19).$$

Cette équation est celle d'une droite; égalant à zéro chaque membre séparément, on a $x = \dfrac{k}{m}$, $y = \dfrac{k'}{m}$, coordonnées du centre.

On a donc ce théorème : *le lieu géométrique du point de moyenne distance de deux points d'intersection d'une sécante, donnée de direction, est un diamètre.*

Observation. Lorsque $m = 0$; la droite donnée par l'équation (19) a une direction constante, quelle que soit la valeur de r; elle est constamment parallèle à la droite donnée par l'équation $2Ay+Bx+D=0$.

Coroll. 1. Soit $p=\frac{2C-Br}{2Ar-B}$, $q=-r$; éliminant r, on tombe sur la relation entre les lignes conjuguées (XI).

Coroll. 2. En considérant dans l'équation $y+rx+s=0$, s comme constante, et r comme variable, elle représente une droite, passant par le point fixe $x=0$, $y=-s$; éliminant r entre l'équation de la droite mobile et les coordonnées du point de moyenne distance, on obtient une équation du second degré, appartenant à une conique semblable à la conique donnée et semblablement placée. Nous ne nous arrêterons pas sur cette proposition que M. le professeur Midy a déjà traitée complétement. (Tome 1, p. 481.)

XXI. *Équation d'une conique qui touche cinq droites.*

Soit $dy+ex+f=0$, l'équation d'une de ces droites; la condition de tangence donne $V=0$ (XX), chacune des quatre autres droites donne une équation semblable. On a ainsi cinq équations du premier degré, d'où l'on tire les valeurs des cinq rapports, $\frac{k}{m}, \frac{k'}{m}, \frac{l}{m}, \frac{l'}{m}, \frac{n}{m}$.

Les six premières identités donnent les valeurs de $\frac{AL}{m^2}, \frac{BL}{m^2}, \frac{CL}{m^2}, \frac{DL}{m^2}, \frac{EL}{m^2}, \frac{FL}{m^2}$; on connaît donc les cinq rapports $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \frac{D}{A}, \frac{E}{A}, \frac{F}{A}$, et par conséquent l'équation de la conique.

Coroll. 1. En prenant deux des droites données pour axes des coordonnées, on a $l=l'=0$; il ne reste plus à résoudre que trois équations à trois inconnues, et on peut se donner les trois autres droites par les points où elles coupent les axes.

Coroll. 2. En faisant varier les rapports $\frac{e}{d}$, $\frac{f}{d}$, la droite représentée par l'équation $dy+ex+f=0$ devient mobile ; si ces variations satisfont constamment à l'équation $V=0$ (18), la droite restera tangente à une même conique ; autrement, *l'enveloppe* de la droite est une conique, et pour trouver l'équation de cette conique, il suffit de se donner cinq positions différentes de la droite.

Coroll. 3. Remplaçant dans l'équation (18), e et f par dr et ds, elle devient $ms^2+2krs+lr^2+2k's-2nr+l'=0$ (20) ; résolvant par rapport à s et ayant égard aux identités, on a

$$s=\frac{-kr-k'\pm 2\sqrt{L(Ar^2-Br+C)}}{m}.$$

Dans l'ellipse L et Ar^2-Br+C sont positifs ($A>0$) ; donc s est réel pour une valeur quelconque de r ; ainsi, dans l'ellipse, on peut toujours mener deux tangentes parallèles à une droite donnée ; dans la parabole, on ne peut mener qu'une tangente ; mais dans l'hyperbole, pour que le problème soit possible, il faut que l'on ait $L(Ar^2-Br+C)>0$.

XXI. Théorème de Newton (*). *Un quadrilatère étant circonscrit à une conique les trois milieux des diagonales du quadrilatère complet et le centre de la conique sont sur une même droite.*

Démonstration. Soit ABCD le quadrilatère circonscrit à une conique ; prenons le côté AB pour axe des x et AD pour axe des y ; soient P et Q les points de rencontre respectifs des côtés BC et CD avec AD et AC ; menons les diagonales PQ et BD ; AB et AD étant les axes tangents à la courbe, on a donc $l=l'=0$; $y+rx+s=0$, équation de la droite CD ; $y+r'x+s'=0$ équation de la droite BC ; mais ces droites étant des tangentes, on a les deux relations

(*) Princ. math., lib. 1, coroll. 3, lem. 25.

$$ms^2+2krs+2k's-2nr=0,$$
$$ms'^2+2kr's'+2k's'-2nr'=0.$$

Éliminant n, et faisant $x=\frac{k}{m}$; $y=\frac{k'}{m}$, on obtient

$$2y\,(rs-rs')+2xrn'\,(s-s')=rs'^2-r's^2;$$

équation d'une droite sur laquelle se trouve évidemment le centre de la conique. Or, cette droite est celle qui passe par les milieux des diagonales BD et PQ; en effet, le milieu de BD a pour coordonnées $x=-\frac{s'}{2r'}$, $y=-\frac{s}{2}$; le milieu de PQ a pour coordonnées $x=-\frac{s}{2r}$; $y=-\frac{s'}{2}$ et ces valeurs satisfont à l'équation de la droite. Par un moyen analogue, on démontre que les milieux des deux diagonales PQ, AC et le centre sont sur une même droite; donc... C. Q. F. D.

Coroll. Le lieu géométrique du centre des coniques inscrites à un quadrilatère est une droite.

XXII. *Équation d'une tangente passant par un point donné, non sur la conique.*

Soit x', y' les coordonnées du point; $y+rx+s=0$ l'équation de la tangente; donc, $s=-(y'+rx')$; subtituant cette valeur dans l'équation (20), il vient

$$r^2\,(mx'^2-2kx'+l)-2r\,(ky'+k'x'+n-mx'y')$$
$$+my'^2-2k'y'+l'=0.$$

Résolvant cette équation et ayant égard aux identités, il vient

$$r=\frac{ky'+k'x'+n-mx'y'\pm2\sqrt{\mathrm{LF}'}}{mx'^2-2kx'+l};$$

ou

$$\mathrm{F}'=\mathrm{A}y'^2+\mathrm{B}x'y'+\mathrm{C}x'^2+\mathrm{D}y'+\mathrm{E}x'+\mathrm{F}.$$

Coroll. 1. Lorsque $F'L$ est positif, le problème est possible et alors le point donné est situé hors de la courbe ; si $F'L$ est négatif, le problème est impossible et le point est dans l'intérieur de la courbe ; on a donc un moyen de connaître la position d'un point, relativement à la courbe.

Coroll. 2. Lorsque les axes des coordonnées sont rectangulaires, si l'on désigne par α l'angle formé par les deux tangentes, menées par le point (x', y'), on a

$$\tang^2\alpha = \frac{16LF'}{[m(x'^2+y'^2)-2kx'-2k'y'+l+l']^2};$$

ainsi lorsque cet angle est constant, le lieu géométrique du point (x', y') est une ligne du quatrième degré, que nous discuterons ailleurs. Lorsque $\alpha = \frac{\pi}{2}$, cette ligne se réduit à un cercle (double) pour l'ellipse et l'hyperbole, et à une droite (directrice) pour la parabole.

XXIII. *Équation d'une tangente à un point pris sur la conique.*

Lorsque le point est sur la conique, on a

$$F'=0;\ r=\frac{ky'+k'x'-mx'y'+n}{mx'^2-2kx'+l},$$

d'où

$$r^2=\frac{my'^2-2k'y'+l'}{mx'^2-2kx'+l}=\frac{(2Cx'+By'+E)^2}{(2Ay'+Bx'+D)^2}\ \text{(pag. 490, tome I.)}$$

d'où

$$r=\frac{2Cx'+By'+E}{2Ay'+Bx'+D};$$

d'ailleurs on a

$$ky'+k'x'-mx'y'+n=(2Ay'+Bx'+D)(2Cx'+By'+E)\ (*)$$

(*) A cette identité on peut ajouter celle-ci :

$$A(2Cx+By+E)^2+C(2Ay+Bx+D)^2-B(2Ay+Bx+D)(2Cx+By+E)$$
$$=L-m(Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F).$$

car

$$y' = (2AE + BD) = y'(k - 2BD)$$

$$(4AC+B^2)\,x'y' = x'y'\,(-m+2B^2);\; x'(2CD+BE) = x'\,(k-2BE)$$

$$DE = n + 2BF\,;$$

en ajoutant, on trouve l'équation (20).

Donc, l'équation de la tangente est

$$(y - y')\,(2Ay' + Bx' + D) + (x - x')\,(2Cx' + By' + E) = 0,$$

ou bien, effectuant les multiplications et ayant égard à l'équation $F' = 0$, il vient

$$y\,(2Ay'+Bx'+D) + x\,(2Cx'+By'+E) + Dy'+Ex'+2F = 0 \quad (21).$$

Observation. L'équation (20) est remarquable en ce qu'elle présente sous une nouvelle forme l'équation de la conique; forme utile à employer en certains problèmes; elle nous apprend que les intersections de la conique par les deux diamètres que donne la résolution immédiate de l'équation sont situées sur une hyperbole ayant pour équation

$$ky + k'x - mxy + n = 0.$$

XXIII (*bis*). *Équation de la polaire.*

Si x' et y' sont les coordonnées d'un point situé hors de la courbe, l'équation (21) devient celle de la droite qui joint les points de contact des tangentes menées par le point. En effet, les coordonnées du premier point de contact doivent satisfaire à cette équation et aussi les coordonnées du second point de contact; mais deux points déterminent une droite, donc, etc. : cette droite se nomme la *polaire* du point.

XXIV. *L'équation* (21) *peut s'obtenir directement par une autre méthode qui présente l'avantage de s'appliquer à une courbe algébrique de degré quelconque.*

Soit $P_m + P_{m-1} + P_{m-2} + \ldots\ldots\ldots P_2 + Dy + Ex = 0$, l'équation d'une courbe de degré m; P_m est la somme des termes de degré m; P_{m-1} la somme des termes de degré $m-1$, et ainsi de suite; on suppose le dernier terme où $P_o=0$; ainsi l'origine est sur la courbe; la tangente à la courbe menée par l'origine a pour équation $Dy+Ex=0$; en effet, menant par l'origine une droite quelconque, ayant pour équation $y=px$; éliminant y entre les deux équations, on a l'équation en x qui appartient aux points d'intersection de la droite et de la courbe; cette équation est divisible par x; donc, comme cela doit être, une racine est nulle; pour qu'une seconde racine soit nulle, il faut poser $Dp+E=0$ et alors la droite a deux points en commun avec la courbe et devient une tangente; d'où $p=-\frac{E}{D}$; et l'équation de la tangente est donc $Dy+Ex=0$.

Supposons maintenant que l'origine ne soit pas sur la courbe, elle aura pour équation

$$P_m+P_{m-1}+\ldots\ldots Dy+Ex+F=0=f(x,y).$$

Soient x', y' les coordonnées d'un point de la courbe, on a donc $f(x',y')=0$; pour trouver l'équation de la tangente en ce point, transportons-y l'origine, ce qu'on obtient en remplaçant x et y par $x+y'$ et $y+y'$ dans la fonction $f(x,y)$, ou ce qui revient au même de remplacer x' et y' par $x'+x$ et $y'+y$ dans la fonction $f(x',y')$, ce qui donne, d'après le théorème de Taylor,

$$f(x',y')+xf''_{x'}(x',y')+yf''_{y'}(x',y')+\text{ etc.}=0:$$

$f''_{x'}$ désigne la dérivée par rapport à x', et $f'_{y'}$ la dérivée par rapport à y'; mais $f(x',y')=0$, donc l'équation de la tangente est $xf''_{x'}+yf''_{y'}=0$; revenant à la première origine, on aura pour équation de la tangente

$$(x-x')\,f'_{x'}+(y-y')\,f'_{y'}=0;$$

or, pour les courbes du second degré, on a

$$f'_{x'} = 2Cx' + By' + E$$
$$f'_{y'} = 2Cy' + Bx' + D.$$

(*La suite prochainement.*)

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 33 (p. 394, t. I).

PAR H. DE SAILLY,
Ancien élève de l'École polytechnique.

—

THÉORÈME.

Les périmètres et les aires des portions de polygones réguliers inscrits dans le même arc de cercle, augmentent avec le nombre des côtés.

Démonstration.

Fig. 21. Soit OA un rayon et soient BC, DE deux demi-cordes perpendiculaires à OA. Supposons que la première est égale à la moitié d'un côté d'une portion de polygone régulier de m côtés, et la seconde à la moitié d'un côté, portion d'un polygone régulier de $m+n$ côtés, inscrits tous deux dans un même arc.

Menons les rayons OB, OD et prolongeons BD jusqu'à son intersection G avec la direction de OA.

D'après l'énoncé, on doit avoir

$$2(m+n)\,\mathrm{DE} > 2m.\,\mathrm{BC},$$
$$2(m+n)\,\mathrm{DE}.\,\mathrm{OE} > 2m.\,\mathrm{BC}.\,\mathrm{OC}.$$

La seconde inégalité se déduit évidemment de la première.

On a $\frac{BC}{DE} = \frac{OBG}{ODG}$; il suffit donc de démontrer l'inégalité $\frac{m+n}{m} > \frac{OBG}{ODG}$.

Le rapport $\frac{OBG}{ODG}$ est plus grand que 1 ; on a donc

$$\frac{OBG}{ODG} < \frac{OBG - ADG}{\text{sect. } AOD} \text{ (*)}.$$

On a aussi $2(m+n)$ arc $AD = 2m$ arc AB; d'où

$$\frac{m+n}{m} = \frac{\text{arc } AB}{\text{arc } AD} = \frac{\text{sect. } AOB}{\text{sect. } AOD}.$$

Mais

$$\frac{OBG}{ODG} < \frac{OBG - ADG}{\text{sect. } AOD} < \frac{OBG - ADG + \text{seg. } BDK}{\text{sect. } AOD} < \frac{\text{sect. } AOB}{\text{sect. } AOD}$$

et la relation $\frac{m+n}{m} = \frac{\text{sect. } AOB}{\text{sect. } AOD}$ donne enfin

$$\frac{OBG}{ODG} < \frac{m+n}{m}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On peut démontrer, en suivant une marche analogue, le théorème suivant :

Les périmètres et les aires des portions de polygone régulier circonscrites à un même arc de cercle, diminuent quand le nombre des côtés augmente.

Fig. 22. Soit OA un rayon et soit encore MA une tangente au cercle à l'extrémité du rayon.

Prenons AB égale à la $2m^{me}$ partie du premier contour et AD égale à la $2(m+n)^{me}$ partie du second. Il suffit évidemment, pour la démonstration complète du théorème, de prouver l'inégalité $\frac{BA}{DA} > \frac{m+n}{m}$. Joignons les points B et D

(*) Un nombre fractionnaire augmente en diminuant les deux termes de la même quantité. Tm.

avec le centre O et par le point G, où DO rencontre l'arc de cercle, menons IGK parallèle à la tangente. On a visiblement m arc AF $=(m+n)$ arc AG, ce qui permet de mettre l'inégalité à démontrer sous la forme

$$\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{DA}} > \frac{\text{arc AF}}{\text{arc AG}}.$$

On a aussi sect. AOF : sect. AOG :: arc AF : arc AG et l'inégalité devient

$$\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{DA}} > \frac{\text{sect. AOF}}{\text{sect. AOG}}.$$

Mais $\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{DA}} = \frac{\mathrm{IKO}}{\mathrm{GKO}}$; et, en partant du rapport $\frac{\mathrm{IKO}}{\mathrm{GKO}}$, on a la série d'inégalités

$$\frac{\mathrm{IKO}}{\mathrm{GKO}} > \frac{\mathrm{IKO}+\mathrm{GKA}}{\text{sect. OGA}} > \frac{\mathrm{IKO}+\mathrm{GKA}-\mathrm{GIF}}{\text{sect. OGA}} > \frac{\text{sect. AOF}}{\text{sect. OGA}}$$

et enfin, par suite de la relation $\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{DA}} = \frac{\mathrm{IKO}}{\mathrm{GKO}}$,

$$\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{DA}} > \frac{\text{sect. AOF}}{\text{sect. OGA}}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

CLASSIFICATION

DES

NOMBRES INCOMMENSURABLES D'ORIGINE ALGÉBRIQUE.

PAR M. L. WANTZEL,
Répétiteur à l'École polytechnique.

—

Ce travail a pour but de montrer que l'extraction des racines des divers degrés donne naissance à des nombres incommensurables essentiellement différents, et que, par la résolution des équations numériques de degré supérieur au second, on obtient de nouvelles quantités irrationnelles qui ne peuvent s'exprimer par des radicaux. Nous avons reproduit quelques principes que nous avions démontrés antérieurement (*).

I. *Principes.*

1. On appelle équation *irréductible* celle qui n'a pas de racines communes avec une équation de degré plus simple et à coefficients rationnels. Il résulte de cette définition que, si une équation quelconque admet une ou plusieurs racines d'une équation irréductible, elle les admettra toutes : car autrement les racines communes pourraient être données par une équation de degré moindre. De plus, quand ces racines communes sont multiples dans la première équation, elles y entrent toutes au même degré de multiplicité. Il est presque superflu de faire remarquer que les équations irréductibles n'ont jamais de racines égales.

2. Soit $f(x)=0$ une équation irréductible de degré m, et a une de ses racines. Si une fonction rationnelle $\varphi\,(a)$ satisfait à une équation $F(x)=0$, elle satisfera encore en remplaçant la racine a par chacune des m racines de $f(x)=0$, puisque $F\big(\varphi(x)\big)=0$ doit admettre toutes les racines de cette équation. On peut toujours former une équation $F(x)=0$, de degré m, qui ait pour racines les valeurs de $\varphi\,(a)$. Comme elle peut bien, lorsque ces valeurs ne sont pas toutes différentes, n'être pas irréductible, supposons que $\varphi\,(a)$ soit racine d'une équation irréductible de degré $n<m$. Il faudra que les racines de cette équation entrent le même nombre de fois dans $F(x)=0$, et par suite que n soit un diviseur de m, puisque celle-ci n'a pas d'autres racines. Si m

(*) *Journal de l'École polytechnique*, cahier XXV, p. 151. 1837.

est premier, on en conclut que $n = m$ ou $n = 1$; mais dans ce dernier cas $\varphi(a)$ se réduirait à un nombre et ne serait plus fonction de a. Donc, quand m *est un nombre premier, toute fonction rationnelle d'une racine de l'équation* $f(x) = 0$ *est racine d'une équation irréductible de même degré.*

3. Un radical est *irréductible* quand on ne peut obtenir une quantité rationnelle en l'élevant à une puissance moindre que son indice.

Les radicaux dont l'indice est un nombre premier sont irréductibles, à moins qu'ils ne soient commensurables.

On pourrait regarder ce principe comme une conséquence de la manière dont on simplifie un radical; mais il est plus convenable de le démontrer directement. Soit donc $(\sqrt[m]{a})^n = b$, m étant un nombre premier et plus grand que n ; les équations $x^m = a$, $x^n = b$ admettront une racine commune, et elles n'en admettront pas plus d'une, sans quoi deux nombres auraient à la fois la même puissance m^e et la même puissance n^e, ce qui est impossible quand m est premier avec n : alors la racine commune $\sqrt[m]{a}$ doit être commensurable.

4. Quand le radical $\sqrt[m]{a}$ est irréductible, l'équation binôme $x^m - a = 0$ l'est également.

En effet, si n racines de cette équation pouvaient satisfaire à une équation de degré moindre, il faudrait que leur produit fût rationnel. Or chaque racine de $x^m - a = 0$ est égale à $\sqrt[m]{a}$, multiplié par une racine m^e de l'unité ; en sorte que le produit de n racines sera $(\sqrt[m]{a})^n \times \alpha$, en désignant par α un produit de racines de l'unité qui est encore une racine m^e de l'unité. Pour que cette expression soit réelle, il faut que α soit égal à ± 1 ; et, elle se réduit alors à $(\sqrt[m]{a})^n$ qui ne peut être rationnel quand le radical $\sqrt[m]{a}$ est irréductible.

On appliquerait le même raisonnement à l'équation $x^m + aA^m = 0$.

Ainsi, d'après ce qui précède (3), *toute équation binôme de degré* m *est toujours irréductible, lorsque* m *est un nombre premier, à moins qu'elle n'admette une racine commensurable.*

II. *Classification des radicaux incommensurables.*

5. Deux radicaux sont *semblables* quand leur rapport est rationnel.

Il résulte de là que deux radicaux irréductibles et dissemblables $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, ne peuvent se réduire de manière que $A\sqrt[m]{a}+B\sqrt[n]{b}=0$. On n'aura pas non plus $A\sqrt[m]{a}+B\sqrt[n]{b}=H$. en désignant par A, B, H des quantités rationnelles positives ou négatives. L'impossibilité de cette dernière relation se démontre sans peine quand le plus petit indice n est égal à 2. On peut encore l'établir facilement pour tous les cas, en élevant les deux membres à la puissance n^e, après avoir isolé le second radical ; car il vient alors :

$$A^m(\sqrt[m]{a})^n - nA^{m-1}H(\sqrt[m]{a})^{n-1} + \ldots\ldots = B^n b;$$

ce qui est impossible puisqu'une racine de l'équation irréductible $x^m = a$ ne peut satisfaire à une équation de degré $n < m$. Si n était égal à m, l'équation ci-dessus deviendrait de degré $n-1$ en remplaçant $(\sqrt[m]{a})^n$ par a, et le résultat serait le même.

Il serait difficile de faire voir par ce mode de raisonnement que des radicaux en nombre quelconque ne peuvent se réduire à une quantité rationnelle. Ce théorème général peut se démontrer immédiatement par un procédé différent.

6. *La somme de plusieurs radicaux irréductibles et dissem-*

blables multipliés respectivement par des quantités rationnelles positives ou négatives, ne peut être égale à zéro ni à un nombre commensurable.

Ainsi, il est impossible que l'on ait la relation suivante :

$$A\sqrt[m]{a}+B\sqrt[n]{b}+C\sqrt[p]{c}+\ldots\ldots=H,$$

où A, B, C,.... H désignent des quantités rationnelles quelconques, et a, b, c... des nombres positifs.

Écartons tout d'abord le cas où H serait nul. Car s'il se présentait, on diviserait par $\sqrt[m]{a}$, et l'on obtiendrait :

$$B\frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[m]{a}}+C\frac{\sqrt[p]{c}}{\sqrt[m]{a}}+\ldots\ldots=-A\,;$$

relation de même forme que la première, puisque les quotients de $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[p]{c}$... par $\sqrt[m]{a}$ sont des radicaux dissemblables (5).

Faisons le produit des valeurs que prend la somme $Ax+By+Cz+\ldots-H$, lorsqu'on y remplace y, z.... par toutes les racines des équations $y^n-b=0$, $z^p-c=0$.... Ce produit sera une fonction symétrique des racines de ces équations, et se réduira à un polynôme à coefficients rationnels F (x).

Comme l'un des facteurs devient nul quand on remplace x par $\sqrt[m]{a}$, l'équation F $(x)=0$ est satisfaite par une racine de l'équation irréductible $x^m-a=0$, et par conséquent par toutes les autres. Il y a donc m facteurs de la forme

$$Ax+By+Cz+\ldots-H,$$

qui sont nuls pour des valeurs convenables de y, z...., en mettant successivement à la place de x toutes les racines de l'équation $x^m-a=0$. Si parmi les facteurs de F (x) il y en a plus de m qui deviennent nuls par cette substitution, leur nombre N sera un multiple de m, puisque l'équation $F(x)=0$ admet chaque racine de $x^m - a = 0$ un même nombre de fois.

Alors il y aurait précisément N quantités, et pas davantage, de la forme :

$$Ax + By + Cz + \ldots - H$$

qui seront nulles en remplaçant $x, y, z\ldots$ par certaines racines des équations $x^m - a = 0$, $y^n - b = 0$, $z^p - c = 0\ldots$ et ces quantités présenteront le même nombre de fois chacune des racines de $x^m - a = 0$.

D'ailleurs si l'on répète sur y, $z\ldots$ les mêmes raisonnements que nous avons faits relativement à x, on trouvera également que ces N quantités doivent offrir le même nombre de fois chacune des racines de $y^n - b = 0$, $z^p - c = 0\ldots$; en sorte que N sera un multiple des indices n, $p\ldots$

Faisons actuellement la somme de ces N quantités nulles : le nombre A sera multiplié par $\frac{N}{m}$ fois la somme des racines de $x^m - a = 0$, de même le multiplicateur de B sera $\frac{N}{n}$ fois la somme des racines de $y^n - b = 0$, et ainsi de suite. Comme toutes ces sommes de racines sont nulles, il faut que $NH = 0$; ce qui est contradictoire avec l'hypothèse que H est différent de zéro.

Donc la relation supposée entre les radicaux est impossible.

On peut remarquer que la démonstration précédente s'appliquerait aux racines de plusieurs équations irréductibles quelconques qui ne seraient pas binômes, pourvu que la somme des racines fût nulle pour chacune d'elles.

7. Il résulte du théorème précédent que l'on ne peut reproduire la valeur d'un radical incommensurable, en com-

binant d'autres radicaux avec des quantités rationnelles par voie d'addition et de soustraction.

Si, au contraire, on combine des radicaux par la multiplication et la division, on obtient un nouveau radical ou même un nombre commensurable. (On peut toujours ne considérer que la multiplication, puisque $\frac{1}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\frac{1}{a}}$. Mais l'indice du produit ramené à la forme la plus simple doit être un diviseur du produit des indices des facteurs. En effet, de $\sqrt[m]{a} = \sqrt[n]{b} \times \sqrt[p]{c}$ on conclut $\left(\sqrt[m]{a}\right)^{np} = b^p c^n$; en sorte que si m ne divisait pas np, il faudrait, en supprimant les facteurs communs, que $\left(\sqrt[m']{a}\right)^{n'}$ fût commensurable quoique m' et n' soient premiers entre eux; ce qui est impossible (3). On voit que m doit même diviser le plus petit multiple de n et de p.

Ainsi, tout radical dont l'indice est premier ne peut être reproduit en multipliant entre eux des radicaux de degré moindre, puisqu'un nombre premier est premier avec tous les nombres qui lui sont inférieurs.

D'ailleurs un radical $\sqrt[mn]{a}$ dont l'indice est le produit de deux nombres premiers entre eux peut toujours être décomposé en deux facteurs; car, si l'on pose $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{a^x}\sqrt[n]{a^y}$, il suffira de satisfaire en nombres entiers à l'équation $nx + my = 1$, ce qui est toujours possible.

On voit qu'un radical quelconque est égal au produit de plusieurs radicaux dont les indices sont des nombres premiers ou des puissances de nombres premiers.

8. On sait que toute fonction rationnelle d'une racine d'une équation algébrique peut toujours se ramener à une fonction entière de cette racine. La même fonction rationnelle des racines de plusieurs équations peut être remplacée

par un polynôme entier relativement à chacune de ces racines. Ainsi une fonction rationnelle de un ou plusieurs radicaux sera toujours égale à une somme de radicaux multipliés respectivement par des quantités rationnelles positives ou négatives. Chacun de ces radicaux sera le produit des puissances de certains radicaux composants.

D'après ce que nous avons vu, un radical quelconque ne peut être une fonction rationnelle d'un autre radical sans être semblable à une de ses puissances. Une fonction rationnelle de plusieurs radicaux ne saurait produire un radical dont l'indice renfermerait des facteurs premiers qui ne se trouvent pas dans les indices des radicaux composants.

Par suite *un radical dont l'indice est premier ne peut être obtenu en combinant d'une manière quelconque par les cinq premières opérations de l'arithmétique plusieurs radicaux d'indices différents.*

Ainsi les radicaux de divers indices premiers sont des nombres incommensurables distincts, dont l'un ne peut se déduire des autres sans effectuer une nouvelle extraction de racine. Quant aux radicaux de chaque indice, on pourrait les ramener à ceux dont la quantité soumise est un nombre entier premier absolu.

9. Les radicaux dont l'indice est une puissance d'un nombre premier ne sauraient être égaux à une fonction rationnelle de un ou plusieurs radicaux à indices premiers. Ces radicaux sont donc *d'espèces supérieures.*

Une fonction rationnelle de radicaux à indices premiers est appelée *fonction radicale de première espèce.* La racine de degré premier d'une pareille fonction est un radical de *seconde espèce*, quand on ne peut la ramener à des radicaux simples. Les radicaux de *troisième espèce* s'obtiennent en effectuant une nouvelle extraction de racines sur une fonction rationnelle de plusieurs radicaux d'espèce inférieure, et ainsi de suite. Le nombre des radicaux de la plus haute espèce qui entrent dans une fonction radicale d'espèce n forme le *degré* de cette fonction (*). D'après cela, si m est premier, $\sqrt[m]{a}$ sera de première espèce, $\sqrt[m^2]{a}$ sera de seconde espèce, $\sqrt[m^3]{a}$ de troisième, etc.; il existe donc des radicaux de toutes les espèces qui ne peuvent se réduire à des fonctions radicales d'espèce moindre.

III. *Racines incommensurables des équations du troisième degré.*

10. Les racines réelles d'une équation numérique du troisième degré peuvent-elles s'obtenir par des extractions de racines effectuées sur des quantités réelles? Cette question revient à celle-ci : Les racines d'une équation irréductible du troisième degré peuvent-elles être égales à des fonctions radicale d'une certaine espèce? Nous allons faire voir que la réponse est négative pour le cas où les trois racines sont réelles (cas irréductible).

11. Soient x, x_1, x_2 les trois racines réelles d'une équation irréductible du troisième degré, et supposons que la racine x puisse être exprimée par une fonction radicale de n^e espèce. Si l'on ordonne cette fonction ramenée à une forme entière par rapport aux puissances d'un des radicaux de n^e espèce qui y entrent, on aura la relation :

$$x = A + Bu + \dots + Mu^{m-1}$$

dans laquelle u remplace $\sqrt[m]{a}$, a désigne une fonction radicale de $n-1$ espèce et A, B,..... M des fonctions qui peuvent être de n^e espèce, mais qui seraient alors de degré inférieur

(*) Ces dénominations sont à peu près celles qu'Abel a employées dans son mémoire. *Journal de Crelle*, tome I, p. 65.

à celui de la fonction x. On a éliminé de la fonction les puissances supérieures de u au moyen de l'équation $u^m - a = 0$. On peut toujours ramener le coefficient de u dans l'expression de x à la valeur ± 1, lors même qu'il serait nul. En effet, si $\pm \mathrm{H}u^p$ est le premier terme différent de zéro, on fera $t = \mathrm{H}u^p$, d'où $t^m - \mathrm{H}^m a^p = 0$; et toutes les puissances de u s'exprimeront par des puissances de t, puisque, m étant premier, on peut toujours satisfaire à la relation $u^q = u^{pp'm-m'} = u^{pp'} \times a^{-m'}$, d'où $u^q = \dfrac{1}{\mathrm{H}^{p'} a^{m'}}\, t^{p'}$.

Ainsi l'on peut écrire : $x = \mathrm{A} \pm u + \ldots\ldots + \mathrm{M}u^{m-1}$.

Si nous traitons comme des quantités rationnelles toutes celles qui sont d'espèce ou de degré inférieur à ceux de la fonction primitive, l'équation $u^m - a = 0$ est irréductible et l'expression de x est racine d'une équation irréductible de degré m (2, 3), sans quoi n serait une fonction rationnelle des autres radicaux qui entrent dans l'expression, et l'on pourrait en éliminer ce radical, ce qui est contre la supposition.

Alors les valeurs que prend l'expression de x quand on y substitue les diverses racines de $u^m - a = 0$ sont toutes deux racines de l'équation proposée du troisième degré; et, comme elles sont au nombre de m, il faut que m ne dépasse pas 3. On ne peut donc supposer que $m = 3$ ou $m = 2$.

12. Soit d'abord $m = 3$, l'expression de x se réduit à $\mathrm{A} \pm u + \mathrm{B}u^2$. Comme les trois racines de $u^3 - a = 0$ sont égales à u multiplié par les trois racines 1, α, α^2 de l'unité, on aura :

$$x = \mathrm{A} \pm u + \mathrm{B}u^2,\quad x_1 = \mathrm{A} \pm u\alpha + \mathrm{B}\alpha^2 u^2,\quad x_2 = \mathrm{A} \pm u\alpha^2 + \mathrm{B}\alpha u^2.$$

Si l'on ajoute ces trois valeurs, après avoir multiplié la seconde par α^2 et la troisième par α, en tenant compte de $\alpha^3 = 1$, et de $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$, il vient :

$$x + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 = \pm 3u.$$

Or, α et α^2 sont deux imaginaires conjuguées tandis que toutes les autres quantités sont réelles, il faudrait donc que $x_1 = x$, pour que les imaginaires pussent se détruire; condition incompatible avec la supposition que l'équation est irréductible.

13. Soit actuellement $m=2$; on aura : $x=A+\sqrt{a}$ et par suite $x_1=A-\sqrt{a}$, d'où l'on tire $2A=x_1+x$. Il faut donc que 2A soit une racine de l'équation aux sommes de la proposée. Mais cette équation transformée est également irréductible, sans quoi elle admettrait une racine commensurable et la troisième racine de la proposée le serait aussi. On répétera sur A ce qui a été dit sur x, et l'on trouvera une série de quantité radicales dont les degrés et les espèces iront en décroissant, qui devront toujours être racines d'une équation irréductible du troisième degré à racines réelles. On finira donc par arriver à une quantité de première espèce et renfermant un seul radical de la forme $A'+\sqrt{a'}$. Or, il est évident que cette quantité est racine d'une équation du deuxième degré et qu'elle ne peut satisfaire à une équation irréductible du troisième.

Donc *il est impossible d'exprimer par des radicaux réels les racines d'une équation du troisième degré, lorsqu'elles sont toutes réelles.*

(La suite prochainement.)

Observation. Le théorème fondamental du § 8 a été démontré, pour les fonctions algébriques, d'abord par Abel, dans le mémoire cité ci-dessus, et ensuite d'une manière plus lucide, plus explicite, par M. Liouville, dans un mémoire de 1832 inséré dans le cahier 23 du Journal de l'École polytechnique. On trouve une analyse du mémoire d'Abel dans le tome VI du Bulletin de mathématiques de Férussac.

Tm.

NOTE

SUR L'ÉQUATION AUX SOMMES DES RACINES,

PRISES DEUX A DEUX, D'UNE EQUATION DONNÉE.

Parmi les différentes méthodes que l'on donne pour trouver l'équation aux sommes des racines d'une équation $f(x)=0$, il en est une qui consiste, comme on sait, à éliminer x entre les équations : $f(x)=0$.... (1) et $\dfrac{f(y-x)-f(x)}{y-2x}=0$, ou bien

$$f'(x)+\frac{f''(x)}{1.2}(y-2x)+\ldots..+\frac{f_m(x)}{1.2.3\ldots m.}(y-2x)^{m-1}=0\ldots(2),$$

les polynômes $f'(x)$, $f''(x)$, etc., étant les dérivées de $f(x)$, et m le degré de l'équation proposée. Lorsqu'on fait cette élimination au moyen des fonctions symétriques des racines a, b, c, etc., de $f(x)=0$, l'équation finale en y est du degré $m(m-1)$, ses racines sont les sommes $a+b$, $b+a$, $a+c$, $c+a$, etc.; le premier membre de l'équation en y est alors un carré (*). Mais si l'on élimine par le procédé des divisions successives, l'équation en y, à laquelle le calcul conduit, est seulement du degré $\dfrac{m(m-1)}{2}$; le premier membre n'est plus un carré; chacune des sommes $a+b$, $a+c$, etc, est racine *simple* de l'équation résultant de l'élimination.

(*) Pour éliminer x, on remplace successivement x, par a, b, c, ..., dans le premier membre de l'équation (2). Il en résulte m polynômes du degré $m-1$ par rapport à y. Leur produit est du degré $m(m-1)$; les coefficients des différentes puissances de y sont des fonctions symétriques de a, b, c, etc., qui s'expriment en fonctions rationnelles des coefficients de $f(x)=0$, au moyen de formules connues.

On a demandé pourquoi l'équation en y, obtenue par ce dernier moyen d'élimination, ne contient, parmi ses racines, qu'une seule fois les sommes $a+b$, $a+c$, etc.? C'est la question que nous allons examiner.

Si les racines a, b, c..., de $f(x)=0$, étaient connues, en remplaçant x par a dans l'équation (2), on obtiendrait une équation à une seule inconnue y du degré $m-1$, dont les racines seraient les sommes $a+b$, $a+c$, etc. De même, la substitution de b à x donnerait une équation en y ayant pour racines $b+a$, $b+c$, etc. Ainsi, à une seule valeur $a+b$ de y correspondent deux valeurs différentes a, b, de x; ou, ce qui revient au même, la substitution de $a+b$ à y donne pour commun diviseur aux premiers membres des équations (1) et (2) le produit du second degré $(x-a)(x-b)$; par conséquent, le dernier reste obtenu par les divisions que l'on fait pour éliminer x devra être annulé lorsqu'on y remplacera y par les sommes $a+b$, $a+c$, etc.; et la substitution de ces valeurs de y dans le reste précédent devra donner successivement pour résultats les produits $(x-a)(x-b)$, $(x-a)(x-c)$..., qui deviennent les plus grands communs diviseurs des premiers membres des équations (1) et (2), correspondants à ces valeurs de y. L'avant dernier reste sera donc du second degré, par rapport à x (*). C'est la seule conséquence que l'on puisse rigoureusement déduire de ce que toute valeur convenable de y donne aux premiers membres des équations (1) et (2) un diviseur commun du second degré en x; et rien n'indique, dans cette méthode d'élimination, que le premier membre de l'équation finale en y, c'est-à-dire le dernier reste des divisions effectuées, doive contenir au

(*) Si l'équation proposée est $x^3+px+q=0$, l'équation (2), devient $x^2-xy+y^2+p=0$, et, après une seule division, on trouve le reste $-y^3-py+q$. L'équation $y^3+py-q=0$, a évidemment pour racines les sommes $a+b$, $a+c$, $b+c$, des racines a, b, c, de $x^3+px+q=0$.

carré les facteurs $y-(a+b)$, $y-(a+c)$, etc.; il résulte, au contraire, de ce calcul même, que si aucun facteur étranger n'a été introduit, le dernier reste ne peut contenir les facteurs $y-(a+b)$, $y-(a+c)$.... à des puissances supérieures à la première. C'est ce qu'il est facile de reconnaître, en exprimant le dernier reste en fonction des premiers membres des équations proposées.

Nous désignerons par A, B, les premiers membres des équations (1), (2), et par R_n le reste indépendant de x, obtenu par les divisions successives. Il est supposé que ces divisions donnent des quotients entiers, sans l'introduction d'aucun facteur dans les dividendes. Les polynômes A, B, R_n seront liés entre eux par les égalités.

$$\begin{aligned} A &= Bq + R \\ B &= Rq' + R' \\ &\vdots \\ R_{n-2} &= R_{n-1}\, q_n + R_n. \end{aligned}$$

En exprimant les restes R, R', en fonction de A, B, on trouvera d'abord $R = A - qB$ et $R' = (qq'+1)B - q'A$. Dans ces valeurs de R, R', les coefficients de A, B sont, abstraction faite des signes, les termes des deux premières *réduites* de la fraction continue
$$\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{q'+\cfrac{\vdots}{+\cfrac{1}{q_n}}}}.$$

Pour démontrer que tous les autres restes R'', R''', etc., s'expriment de la même manière en fonction de A, B, il suffit de faire voir que si la loi dont il s'agit est applicable à deux restes consécutifs de rangs quelconques, elle convient de même au reste immédiatement suivant.

Soient r, r', r'', trois restes consécutifs; q, q', q'', les quotients correspondants, et $\frac{n}{d}$, $\frac{n'}{d''}$, les réduites terminées aux quotients incomplets q, q', on aura, par hypothèse :

$$r = nA - dB, \ r' = d'B - n'A, \ r = r'q'' + r'';$$

d'où : $$r'' = (n'q'' + n)A - (d'q'' + d)B.$$

Cette dernière égalité montre que la loi observée s'applique à tous les restes ; par conséquent, si l'on désigne par $\frac{N}{D}$ la réduite correspondante au dernier quotient q_n, on aura, en faisant abstraction des signes :

$$R_n = NA - DB \ldots\ldots (3).$$

Il faut de plus observer que les polynômes N, D ne peuvent être annulés à la fois par les mêmes valeurs de x, y ; car, si $\frac{N'}{D'}$ représente la réduite qui précède $\frac{N}{D}$, on a : $N'D - ND' = \pm 1$, quelles que soient les valeurs attribuées à x, y.

Cela admis, substituons à x, dans l'égalité (3), une des racines, a, de l'équation (1) ... $A = 0$. Cette égalité se réduit à $R_n = -DB$, et le polynôme B devient le produit $[y - (a+b)][y - (a+c)]\ldots$ Donc, si le facteur $y - (a+b)$ entrait dans R_n à une puissance supérieure à la première, il devrait aussi, lorsque $x = a$, se trouver dans le polynôme D ; ou, ce qui revient au même, le polynôme D serait divisible par $x - a$, lorsque $y = a + b$. Or, la substitution de $(a+b)$ à y, dans (3), donne l'égalité $NA = DB$, et le plus grand commun diviseur de A, B est alors $(x - a)(x - b)$. Par conséquent, si D est divisible par $x - a$, lorsque $y = a + b$, il faut que N admette aussi le diviseur $x - a$. D'où il suit que les équations $D = 0$, $N = 0$ auraient la solution commune $y = a + b$; $x = a$, ce qui est impossible, comme on vient de le voir.

Il résulte de la relation (3) établie entre les polynômes R_n, A, B, que le reste R_n ne peut contenir, à une puissance supérieure à la première, aucun des facteurs $y-(a+b)$, $y-(a+c)$, etc. C'est ce qu'il fallait démontrer.

G.

Observation. Waring est le premier qui ait donné des formules générales pour calculer les fonctions symétriques des racines, et leurs applications pour trouver l'équation qui a pour racine une relation donnée entre les racines de l'équation proposée, telle que les rapports des racines, les différences des racines, etc. Nous extrayons ici les formules qui conviennent à la somme des racines, prises deux à deux (*Meditationes algebraicæ*, *tertia editio*, 1782, p. 27).

Soit l'équation donnée $f(x)=0$ de degré m, et $F(y)=0$ l'équation cherchée; S_p est la somme connue des puissances p de la première équation, s_p la somme des puissances p des racines de la seconde équation, on a :

$$s_p=(m-2)^{p-1}S_p+pS_{p-1}S_1+\frac{p.p-1}{1.2}S_{p-2}S_2 \\ +\frac{p.p-1.p-2}{1.2.\ 3}S_{p-3}S_3+\ldots\ldots$$

Cette série se termine au terme $\dfrac{p.p-1\ldots\ldots\left(\frac{p}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\frac{p}{2}}\dfrac{\left[S_{\frac{p}{2}}\right]^2}{2}$,

pour p pair, et au terme $\dfrac{p.p-1\ldots\frac{p+3}{2}}{1.2.3\ldots\frac{p-1}{2}}S_{\frac{p+1}{2}}.S_{\frac{p-1}{2}}$, pour p impair. Au moyen de cette formule, on trouve facilement les coefficients de l'équation $F(y)=0$. Ainsi, pour $m=4$, on a :

$$s_1=3S_1;\ s_2=3S_2+2.\frac{S_1^2}{2};\ s_3=3S_2S_1;\ s_4=-4S_4+4S_3S_1+\frac{6}{2}S_2^2;$$

$$s_5 = -12S_5 + 5S_4S_1 + 10S_3S_2;\ S_6 = -28S_6 + 6.S_5S_1 + 15S_4S_3 + \frac{20.}{2}S_3^2.$$

Il est à remarquer qu'en cherchant l'équation directement par les fonctions symétriques, elle s'élève au degré $\frac{m(m-1)}{2}$; mais en ayant recours à la même méthode pour opérer l'élimination entre les équations (1) et (2), on arrive à une équation de degré $m(m-1)$, mais qui est un carré parfait.

Il est évident que l'équation aux sommes des racines, prises deux à deux, ou quatre à quatre, six à six, etc., a nécessairement quelques racines réelles.

On peut aussi parvenir à l'équation à la somme des racines, prises deux à deux, en cherchant les conditions pour que l'équation proposée admette un diviseur du second degré x^2+px+q : l'équation en p est évidemment l'équation cherchée. Tm.

QUESTION D'ALGÈBRE

Proposée au concours de l'École normale (p. 393, t. I).

PAR M. VACHETTE.

—

Première solution par l'élimination.

Remarquons que si on cherche l'équation aux quotients de $f(x)=0$, elle contiendra les racines $\frac{x}{x'}$, $\frac{x'}{x}$; elle sera donc réciproque. Mais $z = \frac{x}{x'} + \frac{x'}{x}$ est la somme de deux racines réciproques de cette équation aux quotients ; donc, pour avoir l'équation cherchée, il suffira d'abaisser à un degré sous-double, comme on sait le faire, le degré de l'équation réciproque. Cette équation en z contiendra, outre les racines $\frac{x}{x'} + \frac{x'}{x}$, des racines égales à 2 provenant des racines égales à 1 de l'équation réciproque ; pour les faire disparaître de l'équation en z, il suffira de les faire disparaître de l'équation aux quotients. (Pour la recherche de l'équation aux quotients et l'élimination des racines 1 avant le calcul, *voir* Reynaud et Duhamel, *Problèmes et Développements sur certaines parties des Mathématiques.*)

Appliquons le calcul à l'équation

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0,$$

il faudra éliminer x et x' entre

$$f(x) = 0, \quad f(x') = 0, \quad y = \frac{x'}{x},$$

$$\begin{array}{llll} \text{ou } x & \text{entre} & f(x) = 0 & \text{et} \quad f(yx) = 0, \\ \text{ou} & \text{entre} & f(yx) - f(x) = 0 & \text{et} \quad f(x) = 0, \end{array}$$

ou bien entre

$$(y^3-1)x^3 - 3(y-1)x = 0$$
$$x^3 - 3x + 1 = 0.$$

Mais

$$(y^3-1)x^3 - 3(y-1)x = (y-1)\{(y^2+y+1)x^3 - 3x\};$$

si on ôte le facteur $y-1=0$, on supprime dans l'équation finale trois racines égales à 1, et l'on a à éliminer entre

$$(y^2+y+1)x^3 - 3x = 0,$$
$$x^3 - 3x + 1 = 0;$$

si on supprime $x=0$, on n'altère pas l'équation finale, car $x=0$ ne peut convenir à la deuxième équation.

On a seulement à traiter

$$(y^2+y+1)x^2 - 3 = 0, \qquad x^3 - 3x + 1 = 0,$$

d'où

$$x^2 = \frac{3}{y^2+y+1}, \quad \frac{3x}{y^2+y+1} - 3x + 1 = 0, \quad x = \frac{y^2+y+1}{3y(y+1)}.$$

Égalant les deux valeurs de x^2, on a l'équation finale en y

$$\frac{3}{y^2+y+1}=\frac{(y^2+y+1)^2}{9y^2(y+1)^2},$$

et enfin

$$y^6+3y^5-21y^4-47y^3-21y^2+3y+1=0,$$

cette équation étant réciproque, on a pour l'équation cherchée

$$z^3+3z^2-24z-53=0.$$

Deuxième solution par les fonctions symétriques.

Soit m le degré de $f(x)=0$, le degré de l'équation en z est $\frac{m(m-1)}{1.2}$, nombre des combinaisons de m choses 2 à 2. Il suffit d'avoir l'expression générale des sommes $S'_1, S'_2 \ldots S'_n$, de $\varphi(z)=0$.

Or

$$S'_n=\Sigma\left(\frac{x}{x'}+\frac{x'}{x}\right)^n=\Sigma\left\{\frac{x^n}{x'^n}+\frac{n}{1}\cdot\frac{x^{n-1}}{x'^{n-1}}\cdot\frac{x'}{x}+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{x^{n-2}}{x'^{n-2}}\cdot\frac{x'^2}{x^2}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{x^2}{x'^2}\cdot\frac{x'^{n-2}}{x^{n-2}}+\frac{n}{1}\cdot\frac{x}{x'}\cdot\frac{x'^{n-1}}{x^{n-1}}\cdot\frac{x'}{x^n}+\frac{x'''}{x''}\right\},$$

$$=\Sigma\left\{\left(\frac{x^n}{x'^n}+\frac{x'^n}{x^n}\right)+\frac{n}{1}\left(\frac{x^{n-2}}{x'^{n-2}}+\frac{x'^{n-2}}{x^{n-2}}\right)+\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{x^{n-4}}{x'^{n-4}}+\frac{x'^{n-4}}{x^{n-4}}\right)+\ldots\right\};$$

Il faut distinguer deux cas :

1° $n=2p$

$$S'_{2p}=\Sigma\left\{\left(\frac{x^{2p}}{x'^{2p}}+\frac{x'^{2p}}{x^{2p}}\right)+\frac{2p}{1}\left(\frac{x^{2p-2}}{x'^{2p-2}}\right)+\ldots\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\ldots+\frac{2p(2p-1)\ldots\ldots(p+2)}{1.2\ldots\ldots(p-1)}\left(\frac{x^2}{x'^2}+\frac{x'^2}{x^2}\right)+\frac{2p(2p-1)\ldots(p+1)}{1.2\ldots\ldots p}\right\};$$

en remarquant que

$$\Sigma\frac{2p(2p-1)\ldots(p+1)}{1.2\ldots\ldots p}=\frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{2p(2p-1)\ldots\ldots p+1)}{1.2\ldots\ldots p};$$

2° $n = 2p+1$

$$S'_{2p+1}=\Sigma\left\{\left(\frac{x^{2p+1}}{x'^{2p+1}}+\frac{x'^{2p+1}}{x^{2p+1}}\right)+\frac{2p+1}{1}\left(\frac{x^{2p-1}}{x'^{2p-1}}+\frac{x'^{2p-1}}{x^{2p-1}}\right)+\ldots\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\ldots+\frac{(2p+1)2p(2p-1)\ldots(p+2)}{1.2\ldots\ldots p}\left(\frac{x}{x'}+\frac{x'}{x}\right)\right\}.$$

Il suffit d'avoir généralement $\Sigma\left(\frac{x^n}{x'^n}+\frac{x'^n}{x^n}\right)$. Rappelons-nous la forme générale d'une équation

$$x^m - A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} - A_3 x^{m-3} \ldots\ldots \pm A_m = 0,$$

et les valeurs de A_1, A_2, $A_3 \ldots$ A_m en fonction des racines. On a

$$\Sigma\left(\frac{x^n}{x'^n}+\frac{x'^n}{x^n}\right)=\Sigma\,\frac{x^{2n}+x'^{2n}}{x^n x'^n}=\frac{1}{A^n_m}\,\Sigma(x^{2n}+x'^{2n})x''^n x'''^n x^{\text{iv}n}\ldots\ldots$$

$$\Sigma(x^{2n}+x'^{2n})x''^n x'''^n\ldots\ldots$$

$$=\Sigma\left\{x^n\left(x^n x''^n x'''^n\ldots+x^n x'^n x'''^n\ldots+x^n x'^n x''^n\ldots+\right)+x'^n(\ldots)+\ldots\right\}$$

Dans la parenthèse qui multiplie x^n, on a la somme des produits $m-1$ à $m-1$ des $n^{\text{èmes}}$ puissances des racines de $f(x)=0$, diminuée du produit $x'^n x''^n x'''^n\ldots$, où n'entre pas le facteur x^n ; il en sera de même pour la parenthèse qui multiplie x'^n, pour $x''^n\ldots\ldots$, donc on a, en désignant par $P_{m-1,n}$ la somme de ces produits

$$\Sigma(x^{2n}+x'^{2n})\,x''^n x'''^n\ldots\ldots$$

$$=\Sigma\left\{x^n P_{m-1,n}-A^n_m+x'^n P_{m-1,n}-A^n_m+x''^n P_{m-1,n}-A^n_m+\ldots\right\}$$

$$=\Sigma x^n P_{m-1,n}-\Sigma A^n_m = P_{m-1,n}S_n - mA^n_m;$$

donc

$$\Sigma\left(\frac{x^n}{x'^n}+\frac{x'^n}{x^n}\right)=\frac{P_{m-1,n}S_n}{A^n_m}-m.$$

Pour avoir $P_{m-1,n}$, on cherche l'équation $\varphi(t)=0$, telle que $t=x^n$; l'équation en t sera du degré m, une somme quelconque Σ_p des racines de $\varphi(t)=0$, sera

$$\Sigma_p = (x^n)^p + (x'^n)^p + \ldots\ldots\ldots\ldots = S_{pn},$$

somme de l'équation de $f(x)=0$, que l'on obtient à l'aide des coefficients.

La question est donc résolue.

Appliquons à $f(x)=x^3-3x+1$; il faut chercher S'_1, S'_2, S'_3 :

$$S'_1=\Sigma\left(\frac{x}{x'}+\frac{x'}{x}\right)=\frac{P_{2,1}S_1}{A_3}-3,$$

$$S'_2=\Sigma\left(\frac{x^2}{x'^2}+\frac{x'^2}{x^2}\right)+\frac{3.2}{1.2}\cdot\frac{2}{1}=\frac{P_{2,2}S_2}{A_3^2}-3+6,$$

$$S'_3=\Sigma\left(\frac{x^3}{x'^3}+\frac{x'^3}{x^3}\right)+3\Sigma\left(\frac{x}{x'}+\frac{x'}{x}\right)=\frac{P_{2,3}S_3}{A_3^3}-3+3S'_1.$$

On trouve

$$\begin{array}{ll} S_1=0 & P_{2,2}=6, \\ S_2=6 & P_{2,3}=-24, \\ S_3=-3, & \\ S_4=18, & \\ S_5=-15, & \\ S_6=57, & \end{array}$$

$$S'_1=-3 \qquad\qquad A'_1=-3,$$

$$S'_2=\frac{9.6}{(-1)^2}+3=57, \qquad \text{d'où} \qquad A'_2=-24,$$

$$S'_3=\frac{-24.-3}{(-1)^3}-3+3.-3=-84 \qquad\qquad A'_3=+53.$$

L'équation en z est, comme par la première méthode,

$$z^3+3z^2-24z-53=0.$$

THÉORÈME A DÉMONTRER.

—

(*) 63. Deux triangles sphériques ABC, A'B'C', situés sur une même sphère, sont tels que les arcs de grand cercle AA', BB', CC', concourent en un point; les intersections de AB avec A'B'; de AC avec A'C'; de BC avec B'C' sont sur un arc de grand cercle. (Finck.)

(*) Le théorème 62 est à la page 96.

NOTE

SUR LES

PARAMÈTRES DES COURBES DU SECOND ORDRE.

PAR M. JACOB,
Capitaine d'artillerie.

On a donné le nom de *paramètre* au double de l'ordonnée qui passe par le foyer.

Dans l'ellipse et dans l'hyperbole, on a

$$2A : 2B :: 2B : 2p,$$

et le paramètre peut être considéré comme une troisième proportionnelle au grand et au petit axe,

$$2p = \frac{2B^2}{A}.$$

Si nous étendons cette définition, et qu'on l'emploie encore dans le cas où, au lieu des axes principaux, on considère des diamètres conjugués, on aura le paramètre des diamètres conjugués

$$2p' = \frac{2B'^2}{A'} \ (*).$$

Regardons cette valeur comme une ordonnée de la courbe par rapport aux deux diamètres conjugués ON et OQ, et

(*) C'est la vraie et unique définition du paramètre, telle qu'elle est donnée par Apollonius. L'ordonnée qui passe par le foyer est égale au paramètre de l'axe principal, mais n'est pas propre à définir le paramètre. Tm.

cherchons le lieu du point R d'intersection du diamètre ON avec son paramètre.

Ce qui revient à traiter cette question générale :

« Quel est le lieu géométrique des intersections des para-
» mètres avec leurs diamètres dans les courbes du second
» degré? »

1° Dans l'ellipse.

Posons (*fig.* 5.) :

$$\mathrm{OA} = \mathrm{A}, \mathrm{OB} = \mathrm{B}, \mathrm{ON} = \mathrm{A}', \mathrm{OQ} = \mathrm{B}', \mathrm{OF} = c, \mathrm{MF} = p$$
$$\mathrm{OP} = x'; \mathrm{PN} = y'; \mathrm{OR} = c', \mathrm{RS} = p', \mathrm{OI} = \alpha, \mathrm{RI} = \beta.$$

C'est donc une relation entre α et β qu'il s'agit de trouver. Remarquons que $c = \sqrt{\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2}$. Nous avons par analogie appelé c' la distance du centre au point R où le paramètre SR coupe son diamètre. Puisque, par hypothèse, $\mathrm{SR} = \frac{\mathrm{B}'^2}{\mathrm{A}'}$, en remplaçant x par cette valeur dans l'équation de l'ellipse rapportée à ses diamètres conjugués ON, OQ

$$\mathrm{A}'^2 y^2 + \mathrm{B}'^2 x^2 = \mathrm{A}'^2 \mathrm{B}'^2,$$

il vient

$$x^2 = c'^2 = \mathrm{OR}^2 = \mathrm{A}'^2 - \mathrm{B}'^2;$$

cela posé, on a les relations suivantes :

$$\mathrm{A}^2 y'^2 + \mathrm{B}^2 x'^2 = \mathrm{A}^2 \mathrm{B}^2 \qquad (1)$$
$$\frac{x'}{\alpha} = \frac{y'}{\beta} = \frac{x'+y'}{\alpha+\beta} \qquad (2)$$
$$x'^2 + y'^2 = \mathrm{A}'^2 \qquad (3)$$
$$\mathrm{A}'^2 + \mathrm{B}'^2 = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 \qquad (4)$$
$$\mathrm{A}'^2 - \mathrm{B}'^2 = \alpha^2 + \beta^2 = c'^2 \qquad (5)$$

La deuxième nous est donnée par la considération des triangles semblables ORI, ONP. Entre ces cinq équations, il nous est facile d'éliminer les quantités x', y', A', B' qui déterminent un système particulier de diamètres conjugués, et une seule position du point R, et il nous restera alors une équation en α et β coordonnées du point R, ce sera le lieu décrit par ce point.

Or de (2) on tire

$$\frac{x'^2}{\alpha^2}=\frac{y'^2}{\beta^2}=\frac{x'^2+y'^2}{\alpha^2+\beta^2}. \qquad (6)$$

Divisons l'équation (3) par $\alpha^2+\beta^2$

$$\frac{x'^2+y'^2}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{A'^2}{\alpha^2+\beta^2}. \qquad (7)$$

La comparaison de (6) avec (7) donne

$$x'^2=\frac{\alpha^2A'^2}{\alpha^2+\beta^2}, \quad y'^2=\frac{\beta^2A'^2}{\alpha^2+\beta^2}; \qquad (8)$$

or, de l'addition de (4) avec (5), il vient

$$A'^2=\frac{1}{2}(A^2+B^2+\alpha^2+\beta^2).$$

Remplaçons A'^2 par cette valeur dans (8), il vient

$$x'^2=\frac{(A^2+B^2+\alpha^2+\beta^2)\,\alpha^2}{2(\alpha^2+\beta^2)}, \quad y'^2=\frac{(A^2+B^2+\alpha^2+\beta^2)\,\beta^2}{2(\alpha^2+\beta^2)}.$$

Reportons ces valeurs dans (1), et l'on aura l'équation du lieu : cette équation simplifiée devient

$$(\alpha^2+\beta^2)(A^2\beta^2+B^2\alpha^2)-(A^2-B^2)(B^2\alpha^2-A^2\beta^2)=0. \quad (9)$$

Il est facile de construire la courbe que représente cette équation. Et d'abord cette équation est satisfaite par $\alpha=0$ $\beta=0$, ainsi la courbe passe par le centre. Elle passe aussi par les deux foyers, car si l'on fait $\beta=0$, il vient $\alpha=\pm\sqrt{A^2-B^2}$. Cette courbe ne coupe l'axe des y qu'au centre de l'ellipse, car si l'on fait $\alpha=0$, il reste $\beta^2(\beta^2+A^2-B^2)=0$, et cette relation ne peut être satisfaite qu'en posant $\beta^2=0$, car la seconde hypothèse $\beta^2+A^2-B^2=0$, donne pour β deux valeurs imaginaires. L'origine est donc un point double.

Si l'on développe l'équation (9), il vient

$$A^2\beta^4+B^2\alpha^4+(A^2+B^2)\alpha^2\beta^2+A^2(A^2-B^2)\beta^2+B^2(B^2-A^2)\alpha^2=0.$$

La limite du rapport $\frac{y}{x}$ ou $\frac{\beta}{\alpha}$, qui donne la valeur de l'inclinaison de la tangente à l'origine, est $\pm\frac{B}{A}$. Ainsi la courbe est tangente à l'origine aux deux diamètres conjugués égaux TT′, UU′ qui sont les diagonales du rectangle circonscrit à l'ellipse. Et cela doit être, car quand les deux diamètres conjugués deviennent égaux, quand $A'=B'$, $c'=\sqrt{A'^2-B'^2}=0$. Et alors le point où le paramètre du premier des diamètres conjugués égaux coupe ce diamètre, coïncide avec le centre. Chacun des quatre demi-diamètres conjugués égaux est donc un demi-paramètre.

Aux points F, F′ la tangente à la courbe est verticale, car le coefficient d'inclinaison de la tangente est

$$-\frac{4B^2\alpha^3+2(A^2+B^2)\alpha\beta^2+2B^2(B^2-A^2)\alpha}{4A^2\beta^3+2(A^2+B^2)\alpha^2\beta+2A^2(A^2-B^2)\beta},$$

et ce coefficient devient ∞ pour $\beta=0$. Le numérateur égalé à zéro donnera les points auxquels la tangente est horizontale.

Enfin il est un moyen très-facile de trouver par une construction géométrique autant de points de la courbe que l'on voudra; il suffit pour cela de supposer l'ellipse décrite.

Pour cela, on se servira des relations (4) et (5), d'où l'on conclut

$$c'^2=2A'^2-(A^2+B^2).$$

Ainsi, pour construire la longueur OR de c' qui correspond au diamètre ON, je construis un triangle rectangle KGH (*fig.* 6) dont les deux côtés de l'angle droit KG et GH sont égaux à $ON=A'$. $KH^2=2A'^2$. Sur KH ..

diamètre, je décris une demi-circonférence, du point K comme centre d'un rayon $KL = A'B = \sqrt{A^2+B^2}$, je décris un arc de cercle qui coupe la demi-circonférence en L, je joins HL, et $HL^2 = \overline{KH}^2 - \overline{KL}^2 = 2A'^2 - (A^2+B^2)$. Donc $HL = c'$, c'est la longueur OR égale à c' qu'il faut porter sur ON. Connaissant ainsi un point, on a les symétriques.

2° Dans l'hyperbole (*fig.* 7).

Posons comme dans l'ellipse

$$c = \sqrt{A^2+B^2}, \quad p = \frac{B^2}{A},$$

$$OA = A,\ OB = B,\ ON = A',\ OQ = B',\ OF = c,\ MP = p,\ (^*)$$
$$OP = x',\ NP = y',$$

$$OR = c' = \sqrt{A^2+B^2}, \quad RS = p' = \frac{B'^2}{A'}\ IO, = \alpha,\ RI = \beta.$$

Puis on a, comme précédemment, les cinq relations

$$A^2y'^2 - B^2x'^2 = -A^2B^2 \qquad (1)$$

$$\frac{x'}{\alpha} = \frac{y'}{\beta} = \frac{x'+y'}{\alpha+\beta} \qquad (2)$$

$$x'^2 + y'^2 = A'^2 \qquad (3)$$

$$A'^2 - B'^2 = A^2 - B^2 \qquad (4)$$

$$A'^2 + B'^2 = \alpha^2 + \beta^2 = c'^2 \qquad (5)$$

qui ne sont autres que celles que nous avions pour l'ellipse, et dans lesquelles B^2 est changé en $-B^2$. Il suffit donc pour avoir l'équation du lieu d'opérer ce changement dans l'équation finale en α et β obtenue pour l'ellipse.

On a ainsi

$$(\alpha^2+\beta^2)(A^2\beta^2 - B^2\alpha^2) + (A^2+B^2)(A\beta^2 + B^2\alpha^2) = 0.$$

(*) Les points F et P sont omis dans la figure.

Cette équation étant satisfaite par l'hypothèse $\alpha=0$, $\beta=0$, on en conclut que l'origine est un point de la courbe.

Mais c'est un point isolé, car tant que α sera >0 et $<c$, β sera imaginaire.

Si, au contraire, on fait seulement $\beta=0$, on trouve

$$\alpha=\pm\sqrt{A^2+B^2}.$$

La courbe cherchée coupe donc l'axe des x aux points F et F', et les deux foyers de l'hyperbole sont les deux sommets de la courbe, comme cela était facile à prévoir.

La courbe ne coupe pas l'axe des y, car l'hypothèse $\alpha=0$ donne pour β deux valeurs imaginaires.

Elle est symétrique par rapport aux axes des x et des y, car son équation résolue donne

$$\beta=\pm\sqrt{-\frac{1}{2}\left\{(A^2+B^2)+\left(\frac{A^2-B^2}{A^2}\right)\alpha^2\right\}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left\{A^2+B^2+\left(\frac{A^2-B^2}{A^2}\right)\alpha^2\right\}^2+\frac{4B^2\alpha^2}{A^2}(B^2\alpha^2-(A^2+B^2))}};$$

pour une même valeur de α, β a donc deux valeurs égales et de signes contraires; qui plus est, β a les deux mêmes valeurs soit que l'on prenne $+\alpha$ ou $-\alpha$. Enfin, à partir de la valeur $\alpha=c$, on peut faire croître α jusqu'à l'infini, β sera toujours réel, partant la courbe cherchée se compose de 4 branches infinies comme celles de l'hyperbole.

Cette courbe admet aussi les mêmes asymptotes que l'hyperbole, car en employant la méthode de M. Cauchy pour déterminer les asymptotes droites, c'est-à-dire en posant $\beta=s\alpha$, on trouve que lem $s=k=\pm\dfrac{B}{A}$. Puis, en posant $\beta=k\alpha+t$, il vient $t=0$.

Les asymptotes sont donc bien $\beta = \pm \frac{B}{A} \alpha$.

Les équations $A'^2 - B'^2 = A^2 - B^2$, $c'^2 = A'^2 + B'^2$ nous donnent un moyen très-simple de construire géométriquement autant de points de la courbe que l'on voudra. En effet, on en conclut

$$B' = \pm\sqrt{A'^2 - (A^2 - B^2)}.$$

Cela posé, sur une droite indéfinie ax (*fig*. 8), je porte des longueurs $ab = A'$, $ab' = A''$, $ab'' = A'''$.........

Sur chacune de ces longueurs je décris une demi-circonférence. Puis d'un rayon $ac = \sqrt{A^2 - B^2}$ du point a comme centre, je décris un arc de cercle qui coupe les circonférences en des points c, c', c''...... tels que $bc = B' = \sqrt{A'^2 - (A^2 - B^2)}$, $b'c' = B'' = \sqrt{A'^2 - (A^2 - B^2)}$....... Enfin élevant les perpendiculaires $bd = bc = B'$, $b'd' = b'c' = B''$......... et joignant ad, ad', ad''....... on aura $ad = \sqrt{A'^2 + B'^2} = c'$..... Si donc, dans la figure (7) je prolonge $ON = A'$ de manière que $OR = ad$ de la figure (8), le point R sera à la courbe. Ayant ainsi déterminé un point R, on aura les symétriques r, R', r'.....

Observation. Les deux courbes construites ici sont celles des deux premiers genres d'Euler (Introd. ad. analys., t. 2, cap. XI). On les simplifie en passant aux coordonnées polaires. Sous cette forme, leur quadrature devient facile. La rectification se ramène aux transcendantes elliptiques. La courbe des paramètres dans la parabole est une seconde parabole, semblablement placée, passant par le foyer et d'un paramètre moitié moindre; ce qu'on peut déduire de l'équation (9), mais la méthode directe est plus simple. Tm.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 50 (page 520).

PAR M. VIDAL,
Élève au Collége de Montpellier.

Une corde étant inscrite dans une parabole, le produit des distances des extrémités de cette corde à un diamètre quelconque est égal à la partie de ce diamètre, interceptée entre la courbe et la corde, multipliée par le paramètre de l'axe principal.

Soit AB la corde donnée (*fig.* 23), et CE un diamètre quelconque de la parabole qui est nécessairement parallèle à l'axe OX. Je désigne par $2p$ le paramètre de l'axe principal, nous devrons avoir, d'après l'énoncé du théorème :

$$BC.AE = DF \times 2p.$$

Les axes étant rectangulaires, je désigne l'équation de la corde AB par $y = mx + n$ et celle du diamètre EC par $y = \beta$; il faut déterminer les coordonnées des deux points d'intersection A et B de la corde donnée avec la parabole. On verra d'ailleurs très-facilement qu'on n'a besoin que de connaître les ordonnées de ces points ; par conséquent, entre les deux équations $y = mx + n$, $y^2 = 2px$, j'élimine x : de la deuxième, je tire $x = \frac{y^2}{2p}$, portant cette valeur dans la première, il vient $y = \frac{my^2}{2p} + n$, d'où $2py = my^2 + 2pn$, et en transposant, il vient

$$my^2 - 2py + 2pn = 0,$$

d'où

$$y=\frac{p\pm\sqrt{p^2-2pmn}}{m},$$

les deux distances BC et AE seront donc

$$\frac{p+\sqrt{p^2-2pmn}}{m}-\beta \quad \text{et} \quad \frac{p-\sqrt{p^2-2pmn}}{m}-\beta,$$

ou bien $\dfrac{p-m\beta+\sqrt{p^2-2pmn}}{m}$ et $\dfrac{p-m\beta\sqrt{p^2-2pmn}}{m}$.

Si nous faisons le produit de ces deux quantités, nous aurons au numérateur le produit de la somme par la différence de deux quantités, ce qui donnera la différence des carrés de ces deux quantités, par conséquent

$$\text{BC}\,.\,\text{AE}=\frac{m\beta^2-2p\beta+2pn}{m};$$

maintenant nous n'aurons plus qu'à chercher la distance DF, pour cela je cherche les coordonnées des deux points D et F. Ces coordonnées seront

$$\text{D}\ldots\ldots\left\{\begin{aligned} y&=\beta \\ x&=\frac{\beta^2}{2p}\end{aligned}\right\}, \qquad \text{F}\ldots\ldots\left\{\begin{aligned} y&=\beta \\ x&=\frac{\beta-n}{m}\end{aligned}\right\}.$$

nous aurons donc

$$\text{DF}=\frac{\beta^2}{2p}-\frac{\beta-n}{m}=\frac{m\beta^2-2p\beta+2pn}{2pm};$$

pour que le théorème soit vrai, il faut qu'en multipliant cette fraction par $2p$, nous obtenions le produit $\text{AE}\times\text{BC}$. Or, on voit qu'effectivement on obtient ce produit : par conséquent le théorème énoncé ci-dessus est vrai.

DE LA RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE DE L'ÉQUATION

$$x^p - 1 = 0,$$

QUAND L'EXPOSANT p EST UN NOMBRE PREMIER.

PAR M. REALIS (S.).

II.

Théorie générale (*).

N. B. Dans tout ce qui suit, la lettre p désignera constamment un nombre premier.

8. *Si dans la suite des cosinus :*

$$\cos\frac{2\pi}{p},\ \cos\frac{4\pi}{p},\ \cos\frac{6\pi}{p},\ \cos\frac{8\pi}{p},\ldots \cos\frac{(p-3)\pi}{p},\ \cos\frac{(p-1)\pi}{p},$$

formée des valeurs que prend $\cos\frac{2\alpha\pi}{p}$ *quand on y fait* α *égal successivement à tous les nombres entiers depuis* 1 *jusqu'à* $\frac{p-1}{2}$ *inclusivement, on multiplie chacun des arcs par un même nombre* m *premier avec* p : *on trouve pour résultat ces mêmes cosinus rangés dans un ordre différent.*

On a d'abord, en indiquant par $\cos\frac{2\alpha\pi}{p}$ un quelconque des cosinus de la suite, et par β le reste de la division de $2m\alpha$ par p,

$$\cos\frac{2m\alpha\pi}{p} = \cos\frac{\beta\pi}{p},\ \text{ou bien}\ \cos\frac{2m\alpha\pi}{p} = \cos\frac{(p-\beta)\pi}{p},$$

(*) Pour la première partie de ce mémoire, voyez pages 5... 16, t. II.

selon que le quotient et le reste de la division sont des nombres pairs ou impairs, ce qui fait voir que $\cos\frac{\beta\pi}{p}$ dans le premier cas, et $\cos\frac{(p-\beta)\pi}{p}$ dans le second cas, est un des cosinus de la suite. Or, tant que 2α sera $< p$, les restes de la division de $2m\alpha$ par p seront tous différents, et ceux, parmi ces restes, qui sont impairs, retranchés de p donneront aussi des résultats différents, entre eux, et avec les restes pairs, ainsi qu'on peut facilement s'en convaincre. Donc, en faisant successivement $2\alpha = 2, 4, 6, 8, \ldots p-3, p-1$, on trouvera pour $\cos\frac{2m\alpha\pi}{p}$ tous les cosinus de la suite.

9. Soit h un diviseur de $\frac{p-1}{2}$, et qu'on fasse successivement dans $\cos\frac{2\alpha\pi}{p}$, $\alpha = 1, m, m^2, m^3, \ldots$ jusqu'à m^{h-1} inclusivement : si m rend entière une des quantités comprises dans l'expression $\frac{m^h \pm 1}{p}$, sans rendre entière aucune des quantités semblables dans lesquelles m est affecté d'un exposant moindre que h : $\cos\frac{2\alpha\pi}{p}$ prendra h valeurs toutes différentes entre elles et comprises dans la suite ci-dessus ; et si l'on continue à donner à α les valeurs m^h, m^{h+1}, $m^{h+2}, \ldots$ on retombera sur les valeurs de $\cos\frac{2\alpha\pi}{p}$ relatives à $\alpha = 1, m, m^2, \ldots$; lesquelles se reproduisent par périodes de h termes.

Cela résulte de ce que $\cos\frac{2m^{h+h'}\pi}{p} = \cos\frac{2m^{h'}\pi}{p}$ conduit à $\frac{m^{h'}(m^h \pm 1)}{p} = \text{entier}$, condition à laquelle la valeur de m satisfait par hypothèse, tandis que $\cos\frac{2m^{h'}\pi}{p} = \cos\frac{2m^{h''}\pi}{p}$

conduirait à une condition à laquelle m ne satisfait pas, si h' et h'' sont $< h$.

Il suit de là que *si* h *est décomposable en deux facteurs* h', h'', *et qu'on veuille arranger les* h *cosinus en* h'' *groupes de* h' *termes, de la forme*

$$\cos\varphi,\ \cos m\varphi,\ \cos m^2\varphi,\ \cos m^3\varphi, \ldots\ldots \cos m^{h'-1}\varphi,$$

on pourra grouper les termes entre eux en h' *manières distinctes, selon qu'on commencera par* $\cos\frac{2\pi}{p}$ *ou par l'un quelconque des* $h'-1$ *termes suivants*. C'est ainsi que dans le n° 4, où $p=13$, $h'=2$, $h''=3$, en prenant $m=2$ on a trouvé deux manières différentes de distribuer les termes par couples.

Mais si, au lieu de prendre le nombre m tel qu'on vient de le dire, on prenait une solution de $\frac{m^{h'}\pm 1}{p}=$ entier, on aurait $\cos m^{h'}\varphi=\cos\varphi$, et les manières de grouper les termes se réduiraient à une seule.

10. *Parmi les nombres entiers* $1, 2, 3, 4, \ldots p-2, p-1$ *compris entre* 0 *et* p, *il y en a toujours* h *qui mis à la place de* m *rendent entière la quantité* $\frac{m^h+1}{p}$, *et* h *qui rendent entière la quantité* $\frac{m^h-1}{p}$, *et parmi ces* 2 h *nombres différents, outre l'unité, il y en a* $h-1$ *qui ne dépassent pas* $\frac{p-1}{2}$; h est, comme ci-dessus, un diviseur de $\frac{p-1}{2}$.

On sait que chacun des nombres $1, 2, 3, 4, \ldots p-2, p-1$ mis à la place de m dans l'expression $\frac{m^{p-1}-1}{p}$, donne pour résultat un nombre entier : cela résulte du théorème de *Fermat*. Si de $m^{p-1}-1$ on sépare le facteur $m^{2h}-1$, on voit que, parmi les $p-1$ solutions de $\frac{m^{p-1}-1}{p}$ = entier, il doit s'en trouver $2h$ qui satisferont à $\frac{m^{2h}-1}{p}$ = entier (*). Ces dernières peuvent à leur tour se partager en deux groupes contenant les solutions de $\frac{m^h+1}{p}$ = entier et de $\frac{m^h-1}{p}$ = entier, respectivement. Il est donc prouvé qu'on satisfera à chacune de ces conditions au moyen de nombres compris entre 0 et p; mais il est bien facile de voir que, parmi ces nombres, il y en aura h qui ne dépasseront pas $\frac{p-1}{2}$. En effet, si pour $m=\alpha$ on a $\frac{\alpha^h-1}{p}$ = entier, pour $m=p-\alpha$ on aura $\frac{(p-\alpha)^h+1}{p}$ = entier, ou bien $\frac{(p-\alpha)^h-1}{p}$ = entier, selon que h est un nombre impair ou pair, ce qui prouve qu'à chaque valeur de m plus grande que $\frac{p-1}{2}$ il en correspond une autre qui ne dépasse pas $\frac{p-1}{2}$, et que par conséquent il ne saurait y avoir plus (ni moins) de h valeurs $>\frac{p-1}{2}$.

11. On peut encore demontrer que *aucune valeur de α comprise entre* 1 *et* $p-1$ *ne pourra donner* $\frac{\alpha^t \pm 1}{p}$ = entier, *si l'exposant* t, *qu'on suppose moindre que* $p-1$, *est premier avec* $p-1$.

Soit en effet $p-1=kt+t'$, k étant le quotient de la division de $p-1$ par t, et t' le reste; et supposons que $\frac{\alpha^t+1}{p}$ soit un nombre entier, il en résultera : $\frac{\alpha^{kt}+1}{p}$ = entier, ou

---

(*) Cela est fondé sur une propriété connue des *congruences*.

$\dfrac{\alpha^{kt}-1}{p}=$ entier, suivant que k sera impair on pair. D'ailleurs, leurs, $\dfrac{\alpha^{p-1}-1}{p}=$ entier donne $\dfrac{\alpha^{kt+t'}-1}{p}=$ entier, puisque $p-1=kt+t'$. Ajoutant $\dfrac{\alpha^{kt}+1}{p}$ et $\dfrac{\alpha^{kt+t'}-1}{p}$ on a $\dfrac{\alpha^{kt}(\alpha^{t'}+1)}{p}$, qui doit être entier si k est impair, d'où $\dfrac{\alpha^{t'}+1}{p}=$ entier; et si k est pair, retranchez $\dfrac{\alpha^{kt}-1}{p}$ de $\dfrac{\alpha^{kt+t'}-1}{p}$, il s'ensuivra $\dfrac{\alpha^{t'}-1}{p}=$ entier. On dmontrera, de même, que si $\dfrac{\alpha^{t}-1}{p}$ est entier, il faut que $\alpha^{t'}+1$, ou $\alpha^{t'}-1$, soit divisible par p.

En opérant sur t' comme on vient de le faire sur t, on parviendra à $\dfrac{\alpha^{t''}\pm 1}{p}=$ entier, t'' étant le reste de la division de t par t'. Or, les nombres $p-1$ et t étant supposés premiers entre eux, un des restes succcessifs t', t'', t'''..., sera égal à l'unité; donc, l'égalité $\dfrac{\alpha^{t}\pm 1}{p}=$ entier conduira à $\dfrac{\alpha\pm 1}{p}=$ entier, condition impossible à remplir, car aucun des deux nombres $\alpha+1$, $\alpha-1$ n'est divisible par p, puisque α doit être compris entre 1 et $p-1$.

12. Je vais maintenant exposer en peu de mots les conséquences qu'on déduit des propositions précédentes relativement à la résolution de l'équation $x^p-1=0$, et parvenir au résultat annoncé au n° 1.

On sait d'abord que l'équation

$$x^{p-1}+x^{p-2}+x^{p-3}+x^{p-4}+\ldots\ldots+x+1=0,$$

qu'on obtient en divisant la proposée par $x-1$, se décompose en $\dfrac{p-1}{2}$ facteurs de la forme x^2-zx+1, au moyen d'une équation en z du degré $\dfrac{p-1}{2}$. Les racines de celle-ci sont représentées par les cosinus de la suite du n° 8, multipliés chacun par 2, et ont entre elles les relations connues du double cosinus d'un arc aux doubles cosinus des différents multiples de cet arc ; en sorte que u, désignant la première de ces racines, les autres se déduiront de l'expression

$$u^m - mu^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2}u^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)}{2.3}u^{m-6} + \frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{2.3.4}u^{m-8} - \text{etc.},$$

en y faisant successivement $m = 2,3,4,5 \ldots \frac{p-3}{2}, \frac{p-1}{2}$. Il est à remarquer que les racines peuvent toutes se déduire ainsi de l'une quelconque d'entre elles, et qu'il n'y a que l'ordre dans lequel elles se trouveront écrites, qui variera selon que u désignera la première racine $2\cos\frac{2\pi}{p}$, ou toute autre racine (8).

Il arrive donc qu'on ne peut immédiatement abaisser l'équation en z à l'aide des relations qui existent entre ses racines, à cause que le commun diviseur que donnerait la méthode ordinaire d'abaissement, contiendrait toutes les racines et reviendrait au premier membre de la proposée elle-même. Pour que l'abaissement ait lieu à l'aide d'équations de degré inférieur à celui de la proposée, il faut décomposer celle-ci en des facteurs contenant un même nombre de racines assujetties dans chacun d'eux à une même relation donnée ; il faut de plus que parmi les différentes manières qu'on peut trouver d'opérer cette décomposition quand on a déterminé le nombre des facteurs et des racines correspondantes, on choisisse celle qu'on n'obtient qu'en combinant d'une seule façon les racines pour les partager en groupes. C'est ce qu'on a fait dans les cas particuliers des nos 4, 5, 6, 7.

Soient h', h'' deux facteurs dont le produit forme le nombre $\frac{p-1}{2}$ et m un nombre compris entre 1 et $\frac{p+1}{2}$, qui ne rende entière aucune quantité $\frac{m^t \pm 1}{p}$, t étant $< \frac{p-1}{2}$. Si l'on veut partager les racines en h'' groupes égaux, de manière qu'une racine étant représentée par $2 \cos \varphi$, les $h'-1$ autres le soient par

$$2 \cos m\varphi, \quad 2 \cos m^2\varphi, \quad 2 \cos m^3\varphi, \ldots . . 2 \cos m^{h'-1}\varphi,$$

on pourra faire ce partage en h' manières différentes, de sorte que pour décomposer l'équation en h'' facteurs contenant ces groupes de racines, on aura une équation du degré $h'h''$ à résoudre. Cela résulte du n° 9, en y supposant $h = \frac{p-1}{2}$.

Mais si l'on choisit pour m une des solutions de $\frac{m^{h'} \pm 1}{p} =$ entier, il n'y aura plus qu'une manière d'effectuer le partage des racines (9), et la décomposition dépendra d'une équation du degré h''. Il est d'ailleurs facile de se convaincre que les solutions de $\frac{m^{h'} \pm 1}{p} =$ entier, comprises entre 1 et $\frac{p+1}{2}$ (10), qui ne satisferont à aucune condition semblable où l'exposant de m soit $< h'$, mèneront toutes au même résultat. Prenant donc pour m une de ces solutions, et appelant y la somme des h'' racines appartenant à un même facteur, on aura deux équations, dont l'une exprimera qu'en retranchant la valeur de y, censée connue, de la somme des h'' racines exprimée en fonction d'une quelconque d'entre elles, on doit avoir zéro pour résultat, et l'autre sera la proposée en z elle-même.

La somme y a h'' valeurs différentes, car on a un pareil nombre de facteurs, et la première de ces deux équations, pour chaque valeur de y, doit être vérifiée par h' valeurs de l'inconnue; ces équations admettent donc un commun diviseur du degré h' déterminé à l'aide d'une équation en y du degré h''.

13. Par ce qui précède, l'équation en z se décomposera en h'' facteurs de la forme

(A) $$z^{h'} - yz^{h'-1} + az^{h'-2} + bz^{h'-3} + cz^{h'-4} + \ldots$$

$a, b, c, \ldots$ étant des fonctions rationnelles de y, susceptibles de h'' valeurs différentes.

Si h' et h'' sont des nombres premiers, la décomposition de l'équation en z s'arrête là; mais si h' est lui-même le produit de deux facteurs i', i'', on peut décomposer à son tour le polynôme (A). Quant au nombre h'', il convient de le supposer premier, afin de parvenir par une méthode simple et uniforme aux décompositions successives, jusqu'à la dernière : il en est de même à l'égard de i'', et en général de tous les nombres qui désignent en combien de facteurs semblables on décompose chaque polynôme en z, qu'on obtient successivement.

Prenant ici pour m une solution de $\frac{m^{i'} \pm 1}{p} =$ entier qui ne satisfasse à aucune condition semblable dans laquelle l'exposant de m soit $< i'$, on peut, d'une manière déterminée et unique, décomposer (A) en i'' facteurs contenant chacun i' racines liées par une relation telle que, la première étant $2 \cos \varphi$, les autres soient $2 \cos m\varphi$, $2 \cos m^2\varphi$, $2 \cos m^3\varphi \ldots\ldots$, $2 \cos m^{i'-1}\varphi$. Par des opérations tout à fait semblables à celles qu'on vient d'indiquer, on trouvera un polynôme de la forme

(B) $$z^{i'} - Sz^{i'-1} + a'z^{i'-2} + b'z^{i'-3} + c'z^{i'-4} + \ldots\ldots,$$

qui divisera (A); S désigne la somme des i' racines, qui pour chaque valeur de y doit avoir i'' valeurs différentes, et dépendra par conséquent d'une équation du degré i''; a', b', c',.... sont des fonctions rationnelles de S, et aussi de y, qu'il n'est pas nécessaire de déterminer dans les calculs relatifs à la décomposition de (A). Le facteur (B), au moyen des h'' valeurs de y, produit donc les facteurs du degré h', qui composent (A), et chacun de ceux-ci, au moyen des i'' valeurs de S, se décompose à son tour en facteurs du degré i'.

Par là, la résolution de l'équation $x^p—1=0$ se trouve maintenant ramenée à celle des équations

$$x^2—zx+1=0\,;$$
$$z^{i'}—Sz^{i'-1}+a'z^{i'-2}+b'z^{i'-3}+c'z^{i'-4}+\ldots\ldots=0,$$

de l'équation du degré i'' en S, et de l'équation du degré h'' en y.

On voit que tant que le degré des facteurs dans lesquels on aura décomposé l'équation en z, est un nombre composé, on peut opérer une nouvelle décomposition; ainsi, si i' était le produit de deux facteurs l', l'', on décomposerait encore le facteur (B), qu'on regarderait comme le produit de l'' facteurs semblables du degré l', etc.

14. Avec le secours des propositions des nos 8, 9, 10 et 11, on peut, sans difficulté, se rendre raison de ce qu'on vient de dire touchant l'abaissement de l'équation $x^p—1=0$, et en conclure que *si* p—1 *se décompose en un nombre* n *de facteurs premiers, y compris les facteurs égaux, la résolution de l'équation* $x^p—1=0$ *pourra se ramener rationnellement à celle de* n *équations dont les degrés seront marqués par ces mêmes facteurs premiers*. Comme les nombres désignés ci-dessus par h'', i'', l'',... peuvent représenter les facteurs premiers de $\frac{p-1}{2}$ dans un ordre quelconque, il s'ensuit qu'on peut généralement opérer l'abaissement de plusieurs manières différentes. On en a vu un exemple dans le cas de $p=13$, traité aux nos 4 et 5.

15. Les racines de l'équation $x^p—1=0$ peuvent se construire géométriquement, par la ligne droite et le cercle, quand les

équations d'où dépend sa résolution, ne dépassent pas le second degré. Cela arrive lorsque l'exposant p est un nombre premier de la forme $2^{\varepsilon}+1$, d'où il suit qu'avec la règle et le compas on peut effectuer la division du cercle en $2_{\varepsilon}+1$ parties égales.

J'observerai que $2^{\varepsilon}+1$ ne saurait être un nombre premier si l'exposant ε n'est pas une puissance de 2. En effet, si ε était impair, $2^{\varepsilon}+1$ serait divisible par $2+1$ ou 3, et si ε était de la forme $\varepsilon'\lambda$, λ étant un nombre impair, $2^{\varepsilon'\lambda}+1$ serait divisible par $2^{\varepsilon'}+1$.

MÉTHODE GÉNÉRALE

Pour déterminer les axes de l'ellipse et de l'hyperbole.

PAR M. CAMUS,
Professeur au Collége royal Bourbon.

Dans l'équation générale des courbes du second ordre

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0,$$

on détermine le centre au moyen des deux équations

$$\left.\begin{array}{l}2Ab+Ba+D=0\\ 2Ca+Bb+E=0\end{array}\right\}(1),$$

a et b étant les coordonnées du centre.

Cela posé, déterminons la plus grande et la plus petite distance de ce point à un point de la courbe.

Une droite quelconque passant par ce point aura pour équation $y-b=\gamma(x-a)$, x et y étant les coordonnées du point d'intersection de cette droite avec la courbe. En appelant z la distance du centre à ce point, on aura

$$z^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2,$$

remplaçant $y-b$ par sa valeur $\gamma(x-a)$, on aura

$$z^2 = (x-a)^2(1+\gamma^2),$$

d'où $x = a + \dfrac{z}{\sqrt{1+\gamma^2}}$, et par suite $y = b + \dfrac{\gamma z}{\sqrt{1+\gamma^2}}$.

Remplaçant x et y par leurs valeurs dans l'équation générale, elle devient, en l'ordonnant par rapport à z,

$$\frac{Az^2\gamma^2}{1+\gamma^2} + \frac{Bz^2\gamma}{1+\gamma^2} + \frac{Cz^2}{1+\gamma^2} + (2Ab+Ba+D)\frac{z\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} +$$
$$+ (2Ca+Bb+E)\frac{z}{\sqrt{1+\gamma^2}} + F' = 0 \ldots\ldots (2).$$

(F' étant égal au premier membre de l'équation dans lequel on a remplacé y par b et x par a).

En vertu des équations (1), les termes qui contiennent les premières puissances de z disparaissent, et F' se réduit à $\dfrac{Db+Ea}{2}+F$. Désignons cette quantité par $-p$, l'équation (2) devient

$$\frac{Az^2\gamma^2}{1+\gamma^2} + \frac{Bz^2\gamma}{1+\gamma^2} + \frac{Cz^2}{1+\gamma^2} - p = 0.$$

Il s'agit de déterminer quelles valeurs on doit donner à γ pour que z soit un maximum, et un minimum. En réduisant l'équation précédente, elle devient

$$\gamma^2(Az^2-p) + Bz^2\gamma + Cz^2 - p = 0,$$

d'où

$$\gamma = \frac{-Bz^2 \pm \sqrt{(B^2-4AC)z^4 + 4p(A+C)z^2 - 4p^2}}{2(Az^2-p)}.$$

En décomposant le polynôme sous le radical en 2 facteurs de la forme $z^2-\alpha$, $z^2-\beta$, on déterminera facilement entre quelles limites z^2 est renfermé, et par suite le maximum et le minimum de z^2.

Nous allons faire les calculs pour l'ellipse; on obtiendrait des résultats analogues pour l'hyperbole.

Dans le cas de l'ellipse B^2-4AC est négatif, et p est positif. En faisant $B^2-4AC=-\delta^2$, le polynôme sous le radical peut s'écrire ainsi

$$-\delta^2\left(z^4-\frac{4p(A+C)}{\delta^2}z^2+\frac{4p^2}{\delta^2}\right),$$

et par suite peut s'écrire ainsi :

$$-\delta^2\left\{\left(z^2-\frac{2p(A+C)}{\delta^2}\right)^2-\frac{4p^2(A+C)^2-4p^2\delta^2}{\delta^4}\right\};$$

faisant :

$$4p^2(A+C)^2-4p^2\delta^2=k^2,$$

on voit, en réduisant, que $k^2=4p^2\left((A-C)^2+B^2\right)$; la quantité sous le radical se décompose donc, dans les deux facteurs suivants :

$$-\delta^2\left(z^2-\frac{2p(A+C)+k}{\delta^2}\right)\left(z^2-\frac{2p(A+C)-k}{\delta^2}\right),$$

ou, en changeant le signe de δ^2 et du premier facteur,

$$\delta^2\left(\frac{2p(A+C)+k}{\delta^2}-z^2\right)\left(z^2-\frac{2p(A+C)-k}{\delta^2}\right);$$

d'où on déduit, pour la valeur maximum de z^2,

$$z^2=\frac{2p(A+C)+k}{\delta^2}, \tag{4}$$

et, pour la valeur minimum,

$$z^2=\frac{2p(A+C)-k}{\delta^2}. \tag{5}$$

On voit facilement que ces valeurs ne sont autre chose que les demi-axes de l'ellipse, obtenus au moyen de l'équation

$$My^2+Nx^2=p,$$

M étant égal à $\frac{1}{2}(A+C)+\frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+B^2}$, et N égal à

$$\frac{1}{2}(A+C)-\frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+B^2};$$

car $$a^2=\frac{p}{N}, \quad \text{et} \quad b^2=\frac{p}{M},$$

ou

$$a^2=\frac{p}{\frac{1}{2}(A+C)-\frac{1}{2}\sqrt{(A-C)^2+B^2}}=$$

$$=\frac{2p\left((A+C)+\sqrt{(A-C^2)+B^2}\right)}{(A+C)^2-(A-C)^2-B^2}=\frac{2p(A+C)+k}{\delta^2},$$

on verra de même que la seconde valeur de z^2 est égale à $b^2=\frac{p}{M}$.

En prenant les valeurs de γ, qui correspondent à ces deux valeurs de z^2, on trouve pour la première, en désignant par α^2 et β^2 les deux valeurs de z^2, c'est-à-dire les racines de l'équation

$$z^4-\frac{4p(A+C)}{\delta^2}z^2+\frac{4p^2}{\delta^2}=0,$$

$$\gamma'=-\frac{B\alpha^2}{2(A\alpha^2-p)}, \quad \gamma''=-\frac{B\beta^2}{2(A\beta^2-p)};$$

d'où

$$\gamma'\gamma''=\frac{B^2\alpha^2\beta^2}{4\left(A^2\alpha^2\beta^2-Ap(\alpha^2+\beta^2)+p^2\right)};$$

observant que $\alpha^2\beta^2=\frac{4p^2}{\delta^2}$, et $\alpha^2+\beta^2=\frac{4p(A+C)}{\delta^2}$, on a

$$\gamma'\gamma''=\frac{B^2}{4A^2-4A(A+C)+4AC-B^2}=\frac{B^2}{-B^2}=-1.$$

Donc, les lignes qui donnent les directions des deux axes sont perpendiculaires l'une sur l'autre.

PROBLÈME

Sur les aires minima (alvéole).

PAR M. JACOB,
Capitaine d'artillerie.

« ABCDEF (*fig.* 4 bis) est un hexagone régulier dont le » côté est donné. Six plans $AaBb$, $BbCc$, $CcDd$, $DdEe$, » $EeFf$, $FfAa$, perpendiculaires au plan de l'hexagone composent la surface convexe d'un prisme hexagonal. Les » arêtes Aa, Cc, Ee, sont égales, leur longueur est déterminée. Les arêtes Bb, Dd, Ff, sont égales, mais leur longueur est inconnue.

» abc, cde, efa, sont trois plans qui se coupent sur l'axe » OS du solide, au point S, tel que la somme des aires des » six trapèzes $AabB$, $BbcC$, $CcdD$, $DdeE$, $EefF$, $FfaA$ et » des trois losanges $abcS$, $cdeS$, $efaS$, est moindre qu'elle » ne le serait si les trois points b, d, f étaient placés plus » haut ou plus bas sur les arêtes Bb, Dd, Ff.

» Quelle est la position du point b, d, ou f pour que la » condition du minimum soit remplie ? »

Tirez bh (*) parallèle à AB, l'inconnue de la question est ah différence des deux arêtes Aa, Bb.

Tirez les diagonales ac et bS et AC, on aura

$$ac = AC = AB\sqrt{3},$$

car AC est le côté du triangle équilatéral inscrit dans un cercle.

(*) La ligne bh est omise dans la figure.

L'aire du trapèze $AabB$ sera égale à

$$AB\left(\frac{Aa+Bb}{2}\right)=AB\left(\frac{2Aa-ah}{2}\right)$$

la somme des six aires des trapèzes $=3$ AB $(2Aa-ah)$. (1)

L'aire du losange $abcS=2aG\times bG$.

Or $2aG=ac=AB\sqrt{3}$; puis

$$bG^2=ab^2-aG^2=bh^2+ah^2-aG^2=AB^2+ah^2-\frac{3}{4}AB^2$$

ainsi :

$$bG^2=\frac{1}{4}AB^2+ah^2.$$

Donc, l'aire $abcS=AB\sqrt{3}.\sqrt{\left(\frac{1}{4}AB^2+ah^2\right)}$, et la somme des trois losanges $=3AB\sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{1}{4}AB^2+ah^2\right)}$. (2)

Ajoutons les expressions (1) et (2) et nous aurons pour l'expression de l'aire qui doit être un minimum :

$$3AB\left\{2Aa-ah+\sqrt{\left(\frac{3}{4}AB^2+3ah^2\right)}\right\}. \qquad (3)$$

Je pose $AB=a$, $Aa=b$, $ah=x$; cette expression (3) se change en

$$3a\left\{2b-x+\sqrt{\left(\frac{3a^2}{4}+3x^2\right)}\right\}. \qquad (4)$$

Or $\sqrt{\left(\frac{3a^2}{4}+3x^2\right)}-x$ est une quantité positive que je représente par y ; l'expression (4) deviendra :

$$3a\{2b+y\},$$

de sorte que l'on pourra représenter l'aire minimum par celle d'un rectangle qui aurait pour base la constante $3a$, pour hauteur la constante $2b$ augmentée de la ligne variable et inconnue représentée par

$$\sqrt{\left(\frac{3a^2}{4}+3x^2\right)}-x=y.$$

Pour que la surface du rectangle soit un *minimum*, il faut que y lui-même soit un minimum.

Cherchons donc quand y sera un minimum.

$$\sqrt{\left(\frac{3a^2}{4}+3x^2\right)}=x+y,$$

d'où $$x^2-xy=\frac{1}{2}y^2-\frac{3}{8}a^2,$$

et enfin $$x=\frac{y}{2}\pm\sqrt{\frac{3y^2}{4}-\frac{3a^2}{8}}.$$

Or, pour que x soit réel, il faut que $\frac{3y^2}{4}$ soit $>\frac{3a^2}{8}$, ou tout au moins que

$$\frac{3y^2}{4}=\frac{3a^2}{8}.$$

Le minimum de y est donc tiré de cette équation, et est

$$y=\frac{1}{2}a\sqrt{2},$$

et à cette valeur minimum de y correspond celle de x :

$$x=\frac{y}{2}=\frac{1}{4}a\sqrt{2}.$$

Ainsi la question est résolue, et ah, différence des deux arêtes Aa, Bb est le quart de la diagonale du carré dont AB est le côté.

L'angle solide S est le quart de l'espace sphérique autour d'un point.

Le résultat est la vérification de la géométrie des Abeilles qui construisent exactement leurs alvéoles d'après ces principes.

NOTE

Sur quelques théorèmes relatifs aux polyèdres et spécialement sur l'égalité de ceux qui ont leurs faces respectivement égales.

PAR M. THIBAULT,

Professeur à Paris, licencié ès sciences mathématiques et ès sciences physiques.

Les beaux théorèmes démontrés par M. *Cauchy* sur l'égalité ou la similitude des polyèdres de faces respectivement égales ou semblables, ont comblé une lacune importante dans la géométrie des corps solides. (Journal de l'École polytechnique, 16^e cahier, et Géométrie de Legendre, note XII.)

Si ces théorèmes n'ont pas encore pris dans l'enseignement la place qu'ils réclament, la raison sans doute en est surtout dans l'extrême longueur des démonstrations qui par là même en deviennent plus compliquées. On a cherché, dans cet article, à présenter les démonstrations de ces théorèmes d'une manière plus concise, en leur donnant aussi la plus grande clarté possible. En outre, on les a rendues indépendantes de la considération des polygones sphériques sur laquelle l'illustre géomètre les a basées ; par là, ces théorèmes peuvent précéder tout ce qui est relatif à la sphère et se trouvent ramenés sans intermédiaire à leur place naturelle dans la théorie des polyèdres.

1. Théorème. *Si, dans un angle trièdre* SABC (fig. 24), *deux faces* ASB, ASC *demeurant constantes, on augmente l'angle dièdre compris* SA, *la face opposée* BSC *augmente aussi. De même pour la diminution.*

Ayant pris sur les arêtes les longueurs égales SA, SB, SC.

joignons les trois points A, B, C. Ensuite, par un point D pris sur SA menons dans les deux faces adjacentes les droites DE, DF perpendiculaires à SA, jusqu'à la rencontre de AB, AC; l'augmentation ou la diminution du dièdre SA n'altère pas les triangles ASB, ASC, ni par conséquent les droites DE, DF, AE, AF; or, l'angle EDF augmente ou diminue en même temps que le dièdre SA dont il est la mesure; il en est de même pour EF côté opposé à cet angle dans le triangle DEF, par conséquent aussi pour BAC angle opposé à EF dans le triangle AEF, pour BC côté opposé à ce dernier angle dans le triangle BAC, et enfin pour BSC angle opposé à BC dans le triangle BSC.

2. Théorème. *Si, dans un angle solide convexe, dont toutes les faces excepté une* ASB (fig. 25) *demeurent constantes, on augmente un ou plusieurs des dièdres* SC, SD...... SN *non adjacents à cette face, sans diminuer d'ailleurs aucun d'eux, cette face augmentera. De même pour la diminution.*

Supposons d'abord qu'un seul de ces dièdres, SI par exemple, ait été augmenté, les autres étant alors demeurés constants. Menons les plans ASI, BSI; les angles solides SBC...I, SIK..... A demeurant constants (*), l'augmentation du dièdre SI n'a pu avoir lieu sans une augmentation égale de la partie de ce dièdre qui appartient à l'angle trièdre SABI. Comme d'ailleurs les faces ASI, BSI n'ont pas changé, la face ASB a augmenté (n° 1).

S'il y avait eu augmentation à la fois de plusieurs dièdres non adjacents à la face ASB, on aurait pu passer du premier au dernier état de l'angle solide en augmentant isolément ces dièdres l'un après l'autre successivement, ce qui aurait donné lieu à des accroissements successifs de cette face.

(*) Car il est facile de prouver par la superposition que deux angles solides sont égaux quand il y a respectivemeut égalité entre toutes leurs faces excepté une, et entre tous les dièdres compris.

De même pour la diminution d'un ou plusieurs dièdres.

COROLL. 1er. *Si toutes les faces sans exception étant demeurées constantes, il n'en a pas été de même de tous les angles dièdres; soit* ASB *une face à laquelle un des dièdres qui ont changé n'est pas adjacent, il y a eu nécessairement un changement contraire pour l'un au moins des autres dièdres non adjacents à cette face.*

COROLL. 2^e. *Une face ne peut augmenter, les autres demeurant constantes, sans qu'il y ait augmentation de l'un au moins des dièdres non adjacents à cette face.* Car c'est la seule hypothèse compatible avec l'augmentation de celle-ci. *De même pour la diminution.*

3. THÉORÈME. *Si, dans un angle solide convexe* (fig. 25), *un certain nombre de dièdres ont éprouvé des changements, toutes les faces demeurant constantes et l'angle solide demeurant convexe; qu'on mette le signe + sur l'arête de chaque dièdre augmenté, et le signe — sur l'arête de chaque dièdre diminué; en faisant le tour entier de l'angle solide on trouvera toujours au moins 4 variations de signes.*

Parmi les dièdres qui ont changé, les uns ont augmenté, les autres diminué (2. coroll. 1). Faisons de gauche à droite le tour de l'angle solide en partant d'un dièdre diminué, ou *affecté de* —, et soit SC le premier dièdre augmenté, ou *affecté de* +, que l'on rencontre (1re *variation de signes*); ce dièdre n'étant pas adjacent à la face ASB que forment les deux arêtes précédentes, il y a eu diminution de l'un au moins des autres dièdres non adjacents à cette face (2. coroll. 1). Soit SI le premier de ces angles diminué, ou *affecté de* —, que l'on rencontrera (2^e *var.*); menons le plan BSI qui partage l'angle solide en deux autres dont il forme une face commune. Dans le premier de ces deux angles SBC.... I, dont toutes les autres faces sont constantes, il y a eu augmentation au moins du dièdre SC, parmi ceux non adjacents à la face BSI, aucun de ces dièdres n'ayant d'ailleurs diminué; la face BSI a donc augmenté (n° 2); mais l'augmentation de cette face n'a pu avoir lieu dans le second angle SIK.... B, dont les autres faces sont demeurées constantes, sans que l'un au moins des dièdres SK...., SN, SA non adjacents à cette face se trouve augmenté, ou *affecté de* + (3e *var.*). Enfin, comme le nombre total de variations doit être pair, puisqu'on revient au signe dont on est parti quand le tour est achevé, il y a donc au moins 4 variations de signes.

4. Théorème. *Si l'on partage la surface d'un polyèdre en un certain nombre* p *de parties formées chacune d'une ou plusieurs faces, désignons par* a *le nombre des arêtes qui séparent les unes des autres ces diverses parties, et par* s *le nombre des sommets situés sur ces arêtes; on aura* $s + p = a + 2$ *si les arêtes sont toutes liées entre elles de manière à ne former qu'un seul réseau continu, et dans tous les cas on aura* $s + p > a$.

Considérons d'abord le cas où les a arêtes sont liées entre elles. L'égalité $s+p=a+2$, ou $s+p-a=2$ est évidente si la surface totale est décomposée en deux parties seulement par une succession d'arêtes formant un circuit fermé. Car alors on a $s=a$, $p=2$. Subdivisons l'une de ces parties en deux autres en joignant deux sommets déjà considérés par une nouvelle ligne de séparation menée suivant des arêtes consécutives. Alors p augmente de 1, mais a augmente aussi d'une unité de plus que s, d'où résulte que $s+p-a$ ne change pas. La même chose se dirait pour chacune des subdivisions nouvelles qu'on opérerait, et comme on peut ainsi effectuer un mode quelconque de subdivision de la surface totale par des arêtes liées entre elles, la première partie du théorème est donc démontrée.

En second lieu, supposons que les a arêtes ne soient pas toutes liées entre elles, de sorte que leur ensemble constitue un certain nombre r de réseaux isolés les uns des autres, Lions entre eux deux quelconques de ces réseaux par une succession d'arêtes intermédiaires, et considérons le nouvel ensemble qui se compose d'un réseau de moins ; p ne change pas, mais a augmente d'une unité de plus que s ; ainsi $s+p-a$ diminue d'une unité. En diminuant ainsi successivement de $r-1$ le nombre des réseaux, on diminuera à la fin $s+p-a$ de $r-1$ unités; mais alors toutes les arêtes sont liées entre elles, donc on a $s+p-a-(r-1)=2$ ou $s+p=a+r+1$, ce qui démontre la 2e partie du théorème (*).

5. Théorème. *Deux polyèdres convexes* P, P′ *sont égaux s'ils ont toutes leurs faces égales chacune à chacune et dans le même ordre.*

Il s'agit de prouver que tous les dièdres homologues sont égaux.

S'il y avait inégalité entre un certain nombre a d'angles dièdres de P et leurs homologues de P′, supposons qu'on eût mis sur les arêtes des premiers le signe + ou le signe —, selon qu'ils seraient plus ou moins grands que leurs homologues; on devrait trouver au moins 4 variations de signes en faisant le tour de chacnn des sommets qui terminent l'une quelconque de ces arêtes (no 3). Ces arêtes affectées de signes, s'assemblant ainsi au moins 4 à 4 par leurs extrémités, formeraient un ou plusieurs réseaux de lignes droites, partageant la sur-

---

(*) L'égalité $s+p=a+r+1$ correspond à tous les cas possibles. Si toutes les arêtes sont liées en un seul réseau, elle devient $s+p=a+2$; c'est le premier cas du théorème. Ce cas lui-même comprend le cas plus particulier où l'on considère toutes les arêtes du polyèdre, et par conséquent tous ses sommets et toutes ses faces; alors l'égalité $s+p=a+2$ constitue le théorème d'Euler.

On lit dans les ouvrages cités au commencement de cet article (Voy. *Géom. de Legendre*, 12e édit., p. 335) que le théorème d'Euler a lieu quand on considère tant d'arêtes qu'on voudra comme n'existant pas. Je remarquerai cependant que cela ne peut être vrai si les autres arêtes ne sont pas toutes liées entre elles. Les démonstrations qui y sont fondées sur ce théorème, considéré comme s'étendant à tous les cas possibles, ne devraient-elles pas être modifiées en y substituant à l'égalité $S+H=A+2$, qui n'est pas applicable à tous les cas, l'inégalité $S+H>A$, qui est générale et qui revient à celle que nous employons dans cet article? Au reste, cela ne changerait rien au fond de ces démonstrations.

face du polyèdre en un certain nombre p de parties ; si donc on désigne par s le nombre des sommets situés sur ces arêtes, on devrait avoir : $s+p>a$, (Théor. 4).

Parmi les p parties de la surface totale, quelques-unes pourraient être terminées par 3 arêtes ; désignons leur nombre par p_3. Désignons de même en général par p_n le nombre de ces parties limitées par n arêtes, ou en d'autres termes par un périmètre de n côtés (*), on aurait :

$$p=p_3+p_4+p_5+\dots (1).$$

On aurait aussi :

$$2a=3p_3+4p_4+5p_5+\dots (2);$$

car chacune des a arêtes affectées de signes servant de côté à 2 périmètres, il faudrait compter 2 fois chaque arête pour avoir le nombre total des côtés de tous les périmètres, qui est exprimé par le second membre de (2).

Actuellement, observons que si on parcourait successivement chaque périmètre, on trouverait le même nombre total de variations de signes qu'en faisant successivement le tour de chacun des s sommets. Car, toute variation de signes observée autour des sommets, résulterait de la succession de deux arêtes de signes différents, donnant lieu aussi à l'une des variations observées sur les périmètres et réciproquement; puis, que deux de ces arêtes, consécutives autour d'un sommet, seraient aussi deux côtés consécutifs de l'un des périmètres, et d'un seul d'entre eux.

Soit ν ce même nombre total de variations. Il serait au plus égal à $2p_3+4(p_4+p_5)+6(p_6+p_7)+\dots$; car, sur chaque périmètre, le nombre des variations devant être au plus égal au nombre des côtés de celui-ci, et ne pouvant être impair,

(*) Ces périmètres se composeraient de plusieurs portions isolées s'il s'agissait des parties de la surface comprises entre plusieurs réseaux.

puisqu'à la fin du tour on reviendrait au même signe dont on serait parti, on ne pourrait trouver plus de 2 variations sur chaque périmètre de 3 côtés, plus de 4 sur chaque périmètre de 4 ou 5 côtés, et ainsi de suite. Ce même nombre v serait d'ailleurs égal au moins à $4s$, puisque autour de chacun des s sommets on trouverait au moins 4 variations. Ainsi on aurait :

$$2p_3+4(p_4+p_5)+\ldots\ldots \geqq v \geqq 4s \ldots\ldots(3)$$

L'inégalité $s+p>a$ ou $4s+4p>4a$ ne serait pas troublée si l'on y remplaçait $4s$ par le 1^er^ membre de (3) ; substituant aussi dans cette inégalité pour p et $2a$ leurs valeurs (1), (2), on trouverait :

$$\left.\begin{array}{l} 2p_3+4(p_4+p_5)+\ldots\ldots \\ +4(p_3+p_4+p_5+\ldots) \end{array}\right\} > 6p_3+8p_4+10p_5+\ldots\ldots$$

résultat dont l'impossibilité est manifeste. Car le terme général du 2^e^ membre est $2np_n$ auquel correspond dans le 1^er^ membre $(n+4)\,p_n$ ou $(n+3)\,p_n$ selon que n est pair ou impair; or aucun de ces deux termes ne peut surpasser $2nP_n$, puisque n est au moins égal à 4 s'il est pair, et à 3 s'il est impair.

L'hypothèse d'une inégalité entre des angles homologues de P, P′ ne peut donc subsister.

6. Théorème. *Deux polyèdres* P, P′ *sont symétriques s'ils ont toutes leurs faces égales chacune à chacune et inversement placées.* En effet, d'après le théorème précédent, le second de ces polyèdres est égal à celui que l'on construirait symétriquement au premier par rapport à un plan quelconque.

7. Théorème. *Deux polyèdres convexes* P, P′ *sont semblables s'ils ont toutes leurs faces semblables et semblablement placées.* Car l'égalité des dièdres et par conséquent des angles solides se démontrerait comme dans le théorème 5.

NORMALES ET CERCLES OSCULATEURS

AUX COURBES DU SECOND ORDRE.

(Voy. pages 72, ..., 79, t. II.)

7. Les propriétés des normales conduisent à la solution de ce problème : *trouver la plus courte distance d'un point à l'ellipse.*

La plus petite et la plus grande des droites menées d'un point au contour d'une ellipse, sont des normales. C'est ce qu'il est facile de voir en décrivant des circonférences tangentes à l'ellipse; on peut encore le reconnaître en déterminant, par le calcul, le point de la courbe auquel il faut mener la droite pour qu'elle soit un *minimum* ou bien un *maximum* (*).

(*) Soient x, y les coordonnées d'un point de l'ellipse, et α, β celles du point donné; la distance δ de ces deux points sera déterminée par la formule

$$\delta^2 = (y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2.$$

Il s'agit de rendre *maximum* ou *minimum* la fonction δ^2 par des valeurs de x, y, satisfaisant à l'équation $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$. Or, si l'on pose $y=b\sin\gamma$, et $x=a\cos\gamma$, l'équation de l'ellipse sera satisfaite, quelle que soit la valeur attribuée à la variable γ. D'ailleurs, par cette substitution on a

$$\delta^2 = (b\sin\gamma-\beta)^2 + (a\cos\gamma-\alpha)^2.$$

Il faut donc trouver pour la variable indépendante γ, une valeur qui annule la dérivée de la fonction $(b\sin\gamma-\beta)^2+(a\cos\gamma-\alpha)^2$, ce qui donne

$$(b\sin\gamma-\beta)b\cos\gamma - (a\cos\gamma-\alpha)a\sin\gamma = 0;$$

d'où

$$c^2\sin\gamma\cos\gamma + b\beta\cos\gamma - a\alpha\sin\gamma = 0.$$

Et, en remplaçant $\sin\gamma$, $\cos\gamma$, par leurs valeurs $\frac{y}{b}$, $\frac{x}{a}$, on obtient

$$c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0;$$

c'est-à-dire que la question revient à mener, par le point que l'on donne, des normales à l'ellipse.

Mais, afin de présenter avec plus de précision la discussion du problème nous indiquerons d'abord quelques remarques sur la situation relative des circonférences tangentes à une ellipse en un point déterminé.

Par un point, R, d'une ellipse (*fig.* 26), menons la tangente SRS′ qui rencontre les prolongements des axes aux points S, et S′. Puis, d'un point quelconque M de la normale RM, décrivons une circonférence dont le centre soit M, et le rayon, MR. Cette circonférence touchera la droite SRS′ au point R, et pour ce motif nous dirons qu'elle est tangente à l'ellipse en ce point. Si, maintenant, on considère sur cette circonférence deux points contigus de R, et de différents côtés de ce dernier point, il peut arriver qu'ils soient tous deux extérieurs à l'ellipse, ou tous deux intérieurs; ou bien encore, l'un d'eux peut être extérieur, et l'autre, intérieur. Dans le premier cas, la circonférence est dite tangente extérieure à l'ellipse, au point R; dans le second, elle est tangente intérieurement; et enfin, le troisième cas se distingue des deux autres, en ce que la circonférence est à la fois sécante et tangente à l'ellipse au point R.

Pour montrer quelle est, dans ces différents cas, la position du centre de la circonférence décrite, je mène à l'ellipse les tangentes ST, S′T′, qui seront parallèles, et le diamètre TOT′, dont la direction divise en parties égales chacune des cordes CD, RE, C′D′, parallèles aux tangentes ST, S′T′. Par les points T, T′, j'élève sur les tangentes, les perpendiculaires T L, T′N, qui rencontreront la normale RM, en des points L, N, situés sur les axes OX, OY; et, aux milieux I, K, I′ des cordes CD, RE, C′D′, j'élève encore des perpendiculaires IH, KP, I′M, dont les directions coupent la normale RM, aux points H, P, M.

Lorsque le centre de la circonférence tangente à l'ellipse au point R, sera situé entre les points P, N, par exemple, en M, la circonférence coupera l'ellipse aux deux points C′, D′ (page 75, t. II); elle sera tangente extérieurement en R; l'arc D′T′C′ de l'ellipse sera extérieur au cercle, et l'arc D′TC′, intérieur. La normale MR est alors plus grande que chacune des droites menées du point M aux points de l'ellipse contigus à R; ainsi, par rapport à ces droites la normale est un *maximum.* Il faut toutefois observer qu'elle n'est pas la plus grande des droites menées de M à tous les points de l'ellipse, car toute droite menée de M à un point de l'arc D′T′C′ est plus grande que le rayon RM de la circonférence décrite.

Si le centre de la circonférence est situé entre P et L, par exemple en H, la corde d'intersection des deux courbes sera la droite CD; la circonférence est tangente intérieurement à l'ellipse au point R; l'arc d'ellipse DT′C est extérieur au cercle, et l'arc DTC, intérieur. La normale HR devient alors un *minimum*, par rapport aux droites menées de H aux points de l'ellipse, voisins de R. Mais, elle n'est pas la plus courte distance du point H à l'ellipse, car toute droite menée du point H à l'arc DTC, est moindre que le rayon HR.

En prenant pour centre le point P, la corde d'intersection sera la droite RE. La circonférence décrite sera à la fois sécante et tangente à l'ellipse au point R. L'arc ET′R de l'ellipse est extérieur au cercle, et l'arc ETR, intérieur. La normale PR est plus petite que les droites menées du point P à l'arc ET′R; et elle est au contraire plus grande que les droites menées à l'arc ETR. Ainsi, elle ne représente plus un *maximum* ni un *minimum* (*).

On voit de même qu'en plaçant le centre au point L, où

(*) Cette circonstance est encore indiquée par le calcul. Car, les coordonnées α, β du point P satisfaisant à l'égalité $(a\alpha)^{\frac{2}{3}} + (b\beta)^{\frac{2}{3}} = (c^2)^{\frac{2}{3}}$, celles du point R annulent à la fois les deux premières dérivées de la fonction $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$, qui représente le carré de la distance du point P à un point de l'ellipse.

la normale coupe le grand axe de l'ellipse, la corde d'intersection des deux courbes se confond avec la tangente TS. La circonférence décrite est alors tangente à l'ellipse aux deux points R, T; et tous les autres points de l'ellipse sont extérieurs au cercle. Que si le centre est au point N, où la normale coupe le second axe, la circonférence touchera l'ellipse aux deux points R, T′; et tous les autres points de l'ellipse sont intérieurs au cercle.

Enfin, si l'on place le centre, en G, dans l'intérieur de l'angle Y′OX des axes, où se trouve le point R, les deux courbes n'auront qu'un seul point commun, R. Le cercle sera entièrement situé dans l'intérieur de l'ellipse, et alors la normale GR est la plus petite de toutes les droites menées du centre G, au contour de l'ellipse. Il en serait de même de la normale G″R. Mais, le contraire a lieu lorsque le centre de la circonférence est en G′ dans l'angle YOX′ opposé au sommet à l'angle Y′OX. L'ellipse est intérieure au cercle, et la normale G′R est la plus grande de toutes les droites menées de G′ au contour de l'ellipse.

Au moyen de ces observations il est facile de reconnaître parmi les normales, la plus grande et la plus petite des droites menées d'un point à l'ellipse.

Supposons que le point donné M (*fig.* 19) soit dans l'angle YOX, et intérieur à la développée de l'ellipse. Il y aura quatre normales. L'une d'elles est tangente à la branche HG′ de la développée, une seconde touche la branche GH′; et les deux autres, la branche GH. La première est la plus grande des droites menées du point M à l'ellipse; car elle est normale en un point de l'arc A′B′, situé dans l'angle des axes, Y′OX′ opposé au sommet à l'angle YOX où se trouve le point donné M. La seconde est la plus courte distance du point M à l'ellipse, puisqu'elle est normale à l'arc AB, situé avec M dans le même angle des axes, YOX. Les deux autres ont des longueurs moyennes. Celle qui touche la développée au point P, entre M et R, est un maximum relatif aux droites menées de M aux points de l'ellipse contigus à R. Et la dernière, dont le prolongement est tangent à l'arc HG de la développée, est un minimum.

8. Les différentes remarques que nous avons faites au sujet des normales à l'ellipse s'appliquent aux normales à l'hyperbole, en ayant toutefois égard à quelques modifications généralement indiquées par le calcul, et qui résultent de ce que l'on passe de l'équation de l'ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ à celle de l'hyperbole $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$ en remplaçant b^2 par $-b^2$.

Si l'on nomme α, β les coordonnées du point M (*fig.* 27), par lequel il faut mener une normale à l'hyperbole ; et x, y les coordonnées du point R, auquel cette droite, MR, est normale à la courbe, on aura, pour déterminer les valeurs des inconnues x, y, les deux équations :

(1)..... $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$, et (2).... $c^2xy-b^2\beta x-a^2\alpha y=0$.

Un calcul absolument semblable à celui qui a été fait (pages 17... 24, nos 1....4) donnera l'équation $(ax)^{\frac{2}{3}}-(by)^{\frac{2}{3}}=(c^2)^{\frac{2}{3}}$, ou

$$(3)\ldots.. \sqrt[3]{a^2x^2}-\sqrt[3]{b^2y^2}=\sqrt[3]{c^4},$$

pour le lieu géométrique des points par lesquels on peut mener trois normales à l'hyperbole. Et, suivant qu'on aura $(a\alpha)^{\frac{2}{3}}-(b\beta)^{\frac{2}{3}}-(c^2)^{\frac{2}{3}}>0$, ou <0, le nombre des normales demandées, sera *quatre* ou *deux*.

La tangente, PD, (*fig.* 27) menée à la courbe que l'équation (3) représente, forme avec l'axe des x, un angle PDX dont la tangente trigonométrique est $\sqrt[3]{\dfrac{a^2y}{b^2x}}$, les coordonnées du point de contact, P, étant y, x. Si, par un point quelconque M, dont les coordonnées sont α, β, on veut mener une tangente MP à la courbe, on aura pour déterminer y et x, les équations :

$$(3) \quad \sqrt[3]{a^2x^2} - \sqrt[3]{b^2y^2} = \sqrt[3]{c^4},$$

et

$$(4) \ldots \quad \sqrt[3]{c^4xy} + \beta\sqrt[3]{b^2x} - \alpha\sqrt[3]{a^2y} = 0.$$

Et, en posant $x = \frac{c^2x'^3}{a^4}$, $y = -\frac{c^2y'^3}{b^4}$, il viendra $a^2y'^2 - b^2x'^2 = -a^2b^2$, et $c^2x'y' - b^2\beta x' - a^2\alpha y' = 0$, (pages 72, 73 ; n° 5). Ces deux dernières équations étant précisément celles qu'il faut résoudre pour mener du point M une normale MR à l'hyperbole, lorsque x', y', représentent les coordonnées du point R, on en conclura que les coordonnées des points P, R, sont liées entre elles, par les relations : $x = \frac{c^2x'^3}{a^4}$, $y = -\frac{c^2y'^3}{b^4}$. Ces relations donnent

$$\frac{y}{x} = -\frac{a^4y'^3}{b^4x'^3}, \text{ ou } \sqrt[3]{\frac{a^2y}{b^2x}} = -\frac{a^2y'}{b^2x'}.$$

C'est-à-dire que les droites MP, MR, forment des angles égaux avec l'axe des x, et par conséquent elles coïncident, puisqu'elles ont un point commun. Donc, *les tangentes à la courbe*

$$\sqrt[3]{a^2x^2} - \sqrt[3]{b^2y^2} = \sqrt[3]{c^4},$$

sont normales à l'hyperbole $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$; *et réciproquement.*

9. La courbe représentée par l'équation

$$\sqrt[3]{a^2x^2} - \sqrt[3]{b^2y^2} = \sqrt[3]{c^4},$$

se compose de quatre branches GH, GL, G'H', G'L', (*fig.* 27) indéfinies, symétriquement placées par rapport à chacun des axes de l'hyberbole, et qui tournent leurs convexités vers l'axe focal. Elle a pour centre le point O, centre de l'hyperbole. Elle coupe l'axe transverse en des points G, G', dont les distances au point O sont égales à $\frac{c^2}{a}$. On sait d'ailleurs que cette courbe est la *développée* de l'hyperbole.

Les tangentes menées aux différents points de la branche GH, forment avec l'axe OX, des angles aigus dont les valeurs sont d'autant plus grandes que le point de contact est plus éloigné de l'axe OY. C'est ce que l'on voit facilement au moyen de la formule $\tan \mathrm{PDX} = \sqrt[3]{\frac{a^2y}{b^2x}}$, en observant que l'équation de la courbe $\sqrt[3]{a^2x^2} - \sqrt[3]{b^2y^2} = \sqrt[3]{c^4}$, donne : $\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}} = \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}} - \sqrt[3]{\frac{c^4}{b^2x^2}}$. Lorsqu'on suppose $x = \infty$, il vient $\frac{y}{x} = \frac{a}{b}$, et par suite : $\tan \mathrm{PDX} = \frac{a}{b}$. Ce qui montre que la tangente PDR est alors perpendiculaire sur l'asymptote OC à l'hyperbole. Ce résultat pouvait être prévu, car le point P étant à l'infini, il en est de même du point R, et la tangente RS à l'hyperbole se confond avec l'asymptote OC. La tangente PDR passant entièrement à l'infini, pour une valeur infinie de x, nous en conclurons que la courbe GH n'a pas d'asymptote.

Les coordonnées α, β d'un point M (*fig.* 27) situé entre les deux branches GH, GL, donnent évidemment $\sqrt[3]{a^2\alpha^2} - \sqrt[3]{b^2\beta^2} - \sqrt[3]{c^4} > 0$; et, il en est de même pour tout point situé entre les branches G'H', G'L'. Si le point considéré est en M', hors de la partie du plan de la courbe comprise entre GH, GL, ou bien entre G'H', G'L', les coordonnées α, β, satisferont, au contraire, à l'inégalité $\sqrt[3]{a^2\alpha^2} - \sqrt[3]{b^2\beta^2} - \sqrt[3]{c^4} < 0$.

Dans le premier cas, on pourra mener du point M quatre normales à l'hyperbole (n° 8); et dans le second, seulement deux normales.

Pour chaque position du point considéré, il sera facile de reconnaître comment les normales sont dirigées, et à quelles branches de l'hyperbole, elles sont normales. En effet, supposons que les coordonnées α, 6, soient positives et satisfassent à l'inégalité $\sqrt[3]{a^2\alpha^2}-\sqrt[3]{b^26^2}-\sqrt[3]{c^4}>0$. Le point donné se trouvera dans l'angle YOX, entre les branches GH, GL. Il y aura quatre normales. Deux seront des tangentes MP, MQ, à la branche GH de la développée; la troisième coïncidera avec la tangente ML à la branche GL, et la quatrième touchera G'L' au point N. Or, les relations $x=\frac{c^2x'^3}{a^4}$, $y=-\frac{c^2y'^3}{b^4}$, qui existent entre les coordonnées x, y, x', y', des points P, R (n° 8), montrent que ces points sont toujours situés d'un même côté de l'axe des y, et de différents côtés de l'axe des x. Donc, les tangentes MP, MQ, seront normales à l'hyperbole en des points R, T de la branche AR. La tangente ML sera normale en un point E de la branche AE; et la quatrième MN, est normale en un point I de A'E'. Les quatre points R, T, E, I, sont les intersections des hyperboles $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$, et $c^2xy-b^26x-a^2\alpha y=0$.

Si les coordonnées α, 6, sont positives, et satisfont à l'équation $\sqrt[3]{a^2x^2}-\sqrt[3]{b^2y^2}=\sqrt[3]{c^4}$, le point donné se trouvera sur l'arc GH de la développée, les normales MR, MT se confondront, et alors l'hyperbole $c^2xy-b^26x-a^2\alpha y=0$, touchera au point R l'hyperbole $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$, et de plus, elle la coupera en deux autres points appartenant aux branches AE, A'E'. Enfin, lorsque les coordonnées positives, α, 6, donneront $\sqrt[3]{a^2\alpha^2}-\sqrt[3]{b^26^2}-\sqrt[3]{c^4}<0$, le point donné sera en M′ extérieur à la partie du plan comprise entre GL, GH. Il y aura seulement deux normales. L'une d'elles sera tangente à GL; et l'autre, à G′L′. Elles rencontreront l'hyperbole en des points situés sur les branches AE, A′E′. Dans ce dernier cas, les hyperboles $a^2y-b^2x^2=-a^2b^2$, et $c^2xy-b^2\beta x-a^2\alpha y=0$, se coupent seulement en deux points.

10. Pour que la développée $\sqrt[3]{a^2x^2}-\sqrt[3]{b^2y^2}=\sqrt[3]{c^4}$, rencontre l'hyperbole $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$, il faut et il suffit qu'on ait $a>b$. La résolution directe des équations des deux courbes conduit à ce résultat, mais on peut aussi faire le calcul de la manière suivante. Supposons que le point P appartienne aux deux courbes, et menons la tangente PR (*fig.* 27) à la développée ; cette droite PR sera normale à l'hyperbole au point R. Soient x, y, les coordonnées de P; et x', y', les coordonnées de R. On aura :

$$x=\frac{c^2x'^3}{a^4},\ y=-\frac{c^2y'^3}{b^4},\ a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2,$$
$$a^2y'^2-b^2x'^2=-a^2b^2.$$

Les trois premières équations donnent :

$$a^{10}c^4y'^6-b^{10}c^4x'^6=-a^{10}b^{10}.$$

De la quatrième, on tire $a^6y'^6=b^6(x'^2-a^2)^3$. Ou,

$$a^{10}c^4y'^6=a^4c^4b^6(x'^2-a^2)^3.$$

Et par suite, on a :

$$c^4(a^4-b^4)x'^6+3c^4a^6(a^2-x'^2)x'^2+a^{10}(b^4-c^4)=0.$$

Si les deux courbes se coupent, cette dernière équation doit admettre une racine plus grande que a, et finie; et cette condition est d'ailleurs suffisante. Or, toute valeur de x' plus grande que a rend négatif le produit $3c^4a^6(a^2-x'^2)x'^2$. De plus, le dernier terme $a^{10}(b^4-c^4)$ est évidemment négatif. Le premier terme $c^4(a^4-b^4)x'^6$, doit par conséquent être positif, pour qu'il soit possible de satisfaire à l'équation proposée, par une valeur finie de x' et plus grande que a. C'est-à-dire qu'on doit avoir $a > b$.

Lorsque $a > b$, le premier terme de l'équation a un coefficient positif. Et, si l'on remplace x' par a le premier membre se réduit à $a^6 b^4 (a^4 - c^4)$, qui est une quantité négative; donc, l'équation admet une racine plus grande que a, et finie.

De là, on conclura les corollaires suivants :

1° Si l'axe transverse d'une hyperbole est plus grand que le second axe, il existe sur l'hyperbole quatre points tels que par chacun d'eux, on peut mener trois normales à la courbe. Ces points se trouvent à l'intersection de l'hyperbole et de sa developpée. Par un point pris sur une des branches de l'hyperbole, et plus éloigné du sommet que les intersections dont il s'agit, on pourra mener quatre normales. Mais si, au contraire, ce point est plus rapproché du sommet que les intersections des courbes, il y aura seulement deux normales.

2° Lorsque l'axe transverse est égal au second axe, ou plus petit, on ne peut, par un point de l'hyperbole, mener plus de deux normales à cette courbe.

11. On peut encore démontrer que la courbe

$$\sqrt[3]{a^2x^2} - \sqrt[3]{b^2y^2} = \sqrt[3]{c^4}$$

est le lieu géométrique des centres des cercles *osculateurs* à l'hyperbole (p. 76). En effet, supposons que par un point R de l'hyperbole (*fig.* 28), on conduise la tangente RS, et la normale RMP. Puis, d'un point M de cette normale, comme centre, décrivons une circonférence tangente à la branche EAR en R, et qui coupe la même branche aux deux points D,C. Quelle que soit la position du centre M sur RM, la corde CD restera parallèle à la tangente BN menée à l'hyperbole par le point B, auquel la tangente RS coupe l'axe transverse. La démonstration de ce principe est semblable à celle qui a été donnée pour l'ellipse (p. 75).

Réciproquement, si la corde DC est parallèle à la tangente BN, la circonférence passant par les points C,D,R, sera tangente à la droite BRS, au point R (p. 76). Lorsque la corde DC coïncide avec la corde RE parallèle à BN, trois des points communs à la circonférence et à l'hyperbole se confondent en un seul R, et le quatrième est E. Alors, le cercle est *osculateur* à l'hyperbole au point R. Ainsi, pour trouver le centre P du cercle osculateur à l'hyperbole en un point donné R, il suffit de tirer la corde RE parallèle à BN, et d'élever sur le milieu de cette corde une perpendiculaire HP, qui coupera la normale RM, au centre cherché. En appliquant le calcul à cette construction graphique (p. 76...78), on obtiendra, pour l'équation du lieu géométrique des centres des cercles osculateurs: $\sqrt[3]{a^2x^2}-\sqrt[3]{b^2y^2}=\sqrt[3]{c^4}$.

Le *rayon de courbure* de l'hyperbole au point R, est la droite RP. La longueur de cette droite est donnée en fonction de l'abscisse x' de R, par l'égalité $\overline{RP}^2=\dfrac{(c^2x'^2-a^4)^3}{a^8b^2}$ (p. 78).

La valeur de RP augmente avec x', et devient infinie lorsque $x'=\infty$. Si l'on suppose $x'=a$, il en résultera $\dfrac{(c^2x'^2-a^4)^3}{a^8b^2}=\dfrac{b^4}{a^2}$.

Donc (*fig.* 27), $\overline{AG}^2=\dfrac{b^4}{a^2}$; d'où $AG=\dfrac{b^2}{a}$. Pour déterminer le centre G du cercle osculateur au sommet A, de l'hyperbole, il suffit de mener la tangente AK (*fig.* 27.), qui rencontre l'asymptote OB, au point K, et d'élever la perpendiculaire KG à l'asymptote; cette perpendiculaire prolongée rencontrera l'axe transverse au centre G du cercle osculateur. Car, la construction donne $OG=\dfrac{c^2}{a}$, d'où $AG=\dfrac{c^2}{a}-a=\dfrac{b^2}{a}$.

12. Lorsque la courbe du second ordre est une parabole $y^2=2px$, on détermine les normales menées par le point M (*fig.* 29), dont les coordonnées sont α,β, au moyen des équations

$$y^2=2px,\quad yx-(\alpha-p)y-p\beta=0,$$

qui donnent immédiatement

$$y^3-2p(\alpha-p)y-2p^2\beta=0.$$

Le nombre des normales est donc *trois*, *deux*, ou bien *un*, suivant que $27.p\beta^2-8(\alpha-p)^3$ est négatif, nul, ou positif. Par conséquent, le lieu géométrique des points par lesquels on peut mener précisément deux normales, a pour équation: $27.py^2-8(x-p)^3=0$. La courbe, que cette équation représente, se compose de deux branches indéfinies SN, SL (*fig.* 29), qui tournent leur convexité vers l'axe de la parabole; elle est divisée par l'axe en deux parties égales et symétriques. La tangente HM, menée à la branche SL, en un point H dont les coordonnées sont x,y, fait avec l'axe des x un angle qui a pour tangente $\frac{4(x-p)^2}{9.p.y}$, ou $\sqrt[3]{\frac{y}{p}}$. Si l'on observe que $\sqrt[3]{\frac{y}{p}}$ devient $\frac{-y'}{p}$, lorsqu'on remplace y par $\frac{-y'^3}{p^2}$, il sera facile de reconnaître que les tangentes à la courbe

$$27py^2-8(x-p)^3=0,$$

sont normales à la parabole $y^2=2px$, et réciproquement.

En effet, soient y',x' les coordonnées d'un point quelconque, G, de la parabole. Prenons sur SL un point H dont l'ordonnée $y=\frac{-y'^3}{p^2}$. L'abscisse x de H sera donnée par l'équation $27.py^2-8(x-p)^3=0$. Donc, $x-p=\frac{3}{2}\sqrt[3]{py^2}$, ou $x-p=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{y'^6}{p^3}}=\frac{3y'^2}{2p}=3x'$. Ainsi $x=p+3x'$. La tangente de l'angle que la droite GH fait avec l'axe des abscisses est $\frac{y-y'}{x-x'}$. Mais

$$\frac{y-y'}{x-x'} = -\left(\frac{\frac{y'^3}{p^2}+y'}{p+2x'}\right) = -\frac{y'(y'^2+p^2)}{p(p^2+2px')} = \frac{-y'}{p} = \sqrt[3]{\frac{y}{p}}.$$

Par conséquent, la droite GH est, à la fois, normale à la parabole au point G, et tangente à SL au point H. C'est ce qu'il fallait démontrer.

13. La relation $y = \frac{-y'^3}{p^2}$ montre que les points H et G sont toujours situés de différents côtés de l'axe AX de la parabole. D'après cela on voit comment sont dirigées les normales menées d'un point donné M, et à quelles branches de la parabole elles sont normales. Supposons que les coordonnées α, β de M (*fig.* 29), soient positives et satisfassent à l'inégalité $27p\beta^2 - 8(\alpha-p)^3 < 0$. Il y aura trois normales (nº 12). Les deux premières, dirigées suivant les tangentes MH, ML à SL, sont normales en des points G, I de la parabole, situés au-dessous de l'axe AX. La troisième, dirigée suivant la tangente MN à SN, est normale en un point K, situé avec M au-dessus de l'axe AX. Les trois points G,I,K sont les intersections de la parabole donnée et de l'hyperbole

$$yx - (\alpha-p)y - p\beta = 0.$$

Si les coordonnées α, β satisfont à l'égalité

$$27p\beta^2 - 8(\alpha-p)^3 = 0,$$

le point M sera sur SL en H. La droite MI coïncide alors avec MG ; l'hyperbole est tangente à la parabole au point G, et la coupe en un point de la branche AC'. Enfin, lorsque

$$27p\beta^2 - 8(\alpha-p)^3 > 0,$$

le point M a la position M'; les tangentes MG, MI n'existent plus; la tangente MN passe par M′, et son prolongement est une normale à la branche AC′. Dans ce cas, les deux courbes $y^2 = 2px$, et $yx - (\alpha - p)y - p\beta = 0$, se coupent en un seul point sur AC′.

14. Pour trouver les coordonnées des intersections de la parabole et de la courbe LSN, il faut résoudre le système d'équations $y^2 = 2px$, $27py^2 - 8(x-p)^3 = 0$. L'élimination de y donne $27.p^2x - 4(x-p)^3 = 0$. Cette dernière équation admet évidemment pour racine la valeur $4p$. Il en résulte $y^2 = 8p^2$, d'où $y = \pm 2p\sqrt{2}$. Les deux autres racines de

$$27.p^2x - 4(x-p)^3 = 0,$$

sont égales à $\frac{-p}{2}$, et donnent pour y l'expression imaginaire $\pm p\sqrt{-1}$. Ainsi, les points communs à ces deux courbes se trouvent sur une perpendiculaire à l'axe de la parabole, à une distance du *sommet* égale au double du *paramètre*.

15. Si d'un point quelconque de la normale GM, comme centre, on décrit une circonférence tangente à la parabole en G, et qui coupe cette courbe en deux autres points O,C (*fig.* 29); la corde d'intersection OC, fera avec l'axe AX un angle supplémentaire de celui que la tangente GE forme avec le même axe. Ainsi, la corde OC conserve constamment la même direction, quelle que soit la position du centre sur la normale. En effet, prolongeons OC jusqu'à la rencontre de la tangente GE au point E. Puis, menons parallèlement à OC la tangente QB, qui coupe GE en B. On aura, d'après le théorème de *Newton*, $\frac{\overline{QB}^2}{\overline{GB}^2} = \frac{EO \times EC}{\overline{EG}^2} = 1$. Donc, QB=GB; et par conséquent le point B est sur l'axe de la parabole. Il s'en suit que la direction de OC est invariable.

Réciproquement, si la corde OC est parallèle à la tangente BQ, la circonférence passant par C,O,G touchera la droite BG, au point G. Car $\frac{EO \times EC}{\overline{EG}^2} = \frac{\overline{QB}^2}{\overline{GB}^2} = 1$, donc $EO \times EC = \overline{EG}^2$.

Supposons, maintenant, que la corde OC, en conservant une direction parallèle à BQ, se rapproche de plus en plus du point G. Les circonférences passant par C,O,G seront tangentes à la parabole en G, et couperont cette courbe en deux autres points O,C dont l'un, O, se rapproche continuellement de G. Lorsque OC coïncide avec la corde GC', parallèle à BQ, trois des points communs aux deux courbes se confondent en un seul G, le quatrième est en C'; alors, le cercle est *osculateur* à la parabole au point G, son centre est à l'intersection de la normale GM et d'une perpendiculaire élevée au milieu, D, de la corde GC'.

On peut, au moyen d'un calcul très-simple, démontrer que le lieu géométrique des centres des cercles osculateurs à la parabole, a pour équation $27.py^2 - 8(x-p)^3 = 0$. Car, si l'on nomme x', y' les coordonnées du point G, l'équation de la corde GC', parallèle à BQ, sera $y - y' = -\frac{p}{y'}(x - x')$. D'ailleurs, l'équation du diamètre QD est évidemment $y = -y'$. On a donc, pour déterminer l'abscisse du point D,

$$2y'^2 = p(x - x'),\ \text{d'où}\ x - x' = 4x',\quad x = 5x'.$$

D'après cela, l'équation de la perpendiculaire élevée au milieu de GC', devient $y + y' = \frac{y'}{p}(x - 5x')$; l'équation de la normale GM est $y - y' = \frac{y'}{p}(x' - x)$: additionnant, on trouve $y = \frac{-2y'x'}{p} = \frac{-y'^3}{p^2}$, pour l'ordonnée du centre du cercle osculateur. En retranchant l'une de l'autre les mêmes équations, il vient $2y' = \frac{y'}{p}(2x - 6x')$, d'où $x = p + 3x'$. Cette valeur de x est l'abscisse du centre. L'élimination de y', x' entre les trois équations

$$y=\frac{-y'^3}{p^2},\qquad x=p+3x',\qquad y'^2=2px',$$

donne

$$27.py^2-8(x-p)^3=0.$$

16. De la relation $x=p+3x'$, on déduit $x+\frac{p}{2}=3\left(x'+\frac{p}{2}\right)$. C'est-à-dire que la distance de la directrice TR au centre H, du cercle osculateur en G, est triple de la distance de cette droite TR au point G. Il en résulte HR=3GR, et HG=2GR. Ainsi, pour déterminer le centre H du cercle osculateur en un point quelconque G de la parabole, il suffit de prolonger la normale GM jusqu'à la rencontre de la directrice au point R, et de prendre GH=2GR (*).

La longueur de la droite GH, *rayon de courbure* de la parabole au point G, s'exprime en fonction de l'abscisse x' par l'égalité

$$\overline{GH}^2=(y-y')^2+(x-x')^2=\left(\frac{y'^3}{p^2}+y'\right)^2+(p+2x')^2=$$
$$=\frac{y'^2}{p^2}(2x'+p)^2+(p+2x')^2.$$

D'où

$$\overline{GH}^2=(2x'+p)^2\left(\frac{y'^2+p^2}{p^2}\right)=\frac{(2x'+p)^3}{p}.$$

Le rayon de courbure augmente avec l'abscisse x'. Lorsque $x'=0$, on a $\frac{(2x'+p)^3}{p}=p^2$; le rayon AS=p. Si $x'=\infty$, on a de même GH $=\infty$.

17. Nous terminerons cet article en indiquant le moyen de

(*) Cette remarque est due à *M. Poncelet.*— La construction indiquée (p. 79), pour trouver les centres des cercles osculateurs aux sommets de l'ellipse, est consignée dans un recueil de *Tables mathématiques*, ouvrage encore inédit de *M. Barré*, officier supérieur d'artillerie en retraite.

trouver les normales à la parabole menées d'un point quelconque M, par les intersections de la parabole et d'une circonférence.

Pour obtenir les coordonnées des points auxquels les normales rencontrent la parabole, il faut résoudre les équations

$$(1)\ldots.y^2=2px, \qquad yx-(\alpha-p)y-p\beta=0,\ldots.(2),$$

α, β étant les coordonnées de M. Si l'on multiplie par y tous les termes de l'équation (2), il vient $y^2x-(\alpha-p)y^2-p\beta y=0$, ou, (3)....$x^2-(\alpha-p)x-\frac{\beta y}{2}=0$, parce que $y^2=2px$. Ajoutant membre à membre les équations (1), (3), on trouve :

$$y^2+x^2-(\alpha+p)x-\frac{\beta y}{2}=0\ldots(4).$$

L'équation (4) représente une circonférence qui passe par les points communs aux courbes (1) et (2). Cette circonférence coupe aussi la parabole à son sommet ; c'est là une solution étrangère, introduite dans le calcul lorsqu'on a multiplié par y l'équation (2). Si des autres points d'intersection de la circonférence et de la parabole on tire des lignes droites au point donné, M, on aura les normales cherchées. G.

DÉMONSTRATION DE DEUX THÉORÈMES

sur les triangles inscrits dans des sections coniques (*).

—

THÉORÈME 1. *Un triangle rectangle est inscrit dans une section conique, le sommet de l'angle droit est fixe : l'hypoténuse*

(*) Ces théorèmes sont dus à *M. Fregier*.

coupe la normale menée par le sommet fixe, toujours au même point.

Démonstration. Je prends la normale pour axe des x, et la tangente pour axe des y, l'équation de la conique est alors $Ay^2+Bxy+Cx^2+Ex=0$. Soient $y=ax$, et $y=-\frac{x}{a}$ les équations des deux côtés de l'angle droit, le système de ces deux droites est donné par l'équation $(y-ax)(ay+x)$ $=ay^2+xy(1-a^2)-ax^2=0$. Éliminant y^2 entre cette équation et la proposée, le résultat sera divisible par x et on aura pour quotient $y(A-Aa^2-Ba)-ax(A+C)-Ea=0$; équation de l'hypoténuse. Faisant $y=0$, on a $x=\frac{-E}{A+C}$, expression indépendante de a. C'est ce qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME 2. *Un triangle inscrit dans une conique est tel qu'une de ses bissectrices intérieures est normale à la courbe : alors, le côté opposé à l'angle divisé passe constamment par le pôle de la normale.*

Démonstration. Je prends le même système d'axes que dans la démonstration du précédent théorème. $y=ax$, et $y=-ax$ sont les équations des côtés de l'angle divisé. Le système de ces deux droites est donné par l'équation $y^2-a^2x^2=0$; éliminant y^2 entre celle-ci et l'équation de la conique, et divisant le résultat par x, il vient $x(Aa^2+C)+By+E=0$, équation du côté opposé à l'angle divisé; cette droite coupe l'axe des y au point $x=0$, $y=\frac{-E}{B}$. Or, ce point est le pôle de l'axe des x, qui est la normale. Donc, le théorème est démontré.

Tm.

NOTE

SUR LES

PÉRIMÈTRES DES POLYGONES RÉGULIERS,

PAR M. BERTOT (H.),
Elève du Collége royal Louis-le-Grand.

La différence des périmètres des polygones réguliers de 2n *côtés, inscrit et circonscrit à un cercle, est moindre que le quart de la différence des périmètres des polygones réguliers de* n *côtés, inscrit et circonscrit au même cercle.*

Démonstration. Soient AB, A'B' (*fig.* 30), les côtés des polygones réguliers de n côtés, et AC, DE, ceux des polygones de $2n$ côtés. Je mène AF parallèle à OE. A'F est la demi-différence des côtés A'B' et AB; donc, $2n$. A'F est la différence des périmètres correspondants. DL est la différence des côtés DE, et AC; donc, $2n$. DL est la différence des périmètres correspondants. Il s'agit de prouver que

$$2n.\,\mathrm{DL} < \tfrac{1}{4}\,2n.\,\mathrm{A'F}.\ \text{Ou},\ \mathrm{DL} < \tfrac{1}{4}\,\mathrm{A'F}.$$

On a HI$<$GH (*), et par suite : HI $<\frac{1}{2}$ GI. Menons AN parallèle à OG. Dans le triangle NAC, on aura GI $= \frac{1}{2}$ AN. Donc, HI ou son égal AM$<\frac{1}{4}$ AN. Par conséquent, dans le triangle A'AF, la parallèle à la base A'F, menée par le point M, serait$<\frac{1}{4}$ A'F. Et, *à fortiori* on aura DL$<\frac{1}{4}$ A'F, car le point M étant situé sur la bissectrice AN de l'angle A'AF, la droite DML perpendiculaire à AN, est plus petite que toute autre droite menée par M, et terminée aux côtés de l'angle A'AF.

(*) Car, la corde CH étant bissectrice de l'angle GCI, on a $\frac{\mathrm{HI}}{\mathrm{GH}} = \frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{CG}}$.

NOTE

SUR LE TRAPÈZE,

PAR M. CADET,
Enfant de troupe, au 59e.

—

I. *Dans tout trapèze* ABCD (*fig.* 31) *la différence des carrés des deux diagonales*, AC *et* BD, *est à la différence des carrés des côtés non parallèles*, AB *et* CD, *comme la somme des côtés parallèles*, AD *et* BC, *est à la différence de ces mêmes côtés*, *c'est-à-dire qu'on aura :*

$$\overline{BD}^2-\overline{AC}^2:\overline{CD}^2-\overline{AB}^2::AD+BC:AD-BC.$$

Démonstration. Des sommets B et C du trapèze j'abaisse des perpendiculaires BI et CE sur la base AD. Dans le triangle ABD je prends la valeur du carré de la diagonale BD, et j'ai :

$$\overline{BD}^2=\overline{AD}^2+\overline{AB}^2-2AD\times AI.$$

De même du triangle ACD, je tire :

$$\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2-2AD\times ED.$$

Retranchant ces deux égalités membre à membre, j'ai :

$$\overline{BD}^2-\overline{AC}^2=\overline{AB}^2-\overline{CD}^2-2AD\times AI+2AD\times ED$$

$$=\overline{AB}^2-\overline{CD}^2+2AD\,(ED-AI).$$

Cela posé, je fais

$BD=s, AC=s', AD=a, BC=b, CD=c, AB=d, ED=x, AI=y.$

D'où $\quad s^2-s'^2=d^2-c^2+2a\,(x-y)$........ (1).

Or, si je mène par le point C la droite CG parallèle à AB, les deux triangles GEC et AIB seront égaux, comme étant rectangles l'un en E, l'autre en I, de plus CE$=$BI et CG$=$AB comme parallèles comprises entre parallèles ; donc

$$GE = AI = y.$$

Or, on a $\quad GE + ED = GD = AD - AG = AD - BC,$

ou $x+y=a-b$; on a aussi en vertu d'un théorème connu

$$\overline{ED}^2 - \overline{EG}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{GC}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{AB}^2$$

ou $x^2-y^2=c^2-d^2$ ou $(x+y)\ (x-y)=c^2-d^2$. Remplaçant $x+y$ par sa valeur dans la deuxième équation, j'ai

$$(a-b)\,(x-y)=c^2-d^2, \text{ d'où } x-y=\frac{c^2-d^2}{a-b}.$$

Je vais maintenant mettre cette valeur dans l'équation (1). J'ai : $s^2-s'^2=d^2-c^2+\dfrac{2a\,(c^2-d^2)}{a-b}$; additionnant et effectuant dans le deuxième membre, on a :

$$s^2-s'^2=\frac{ad^2-ac^2-bd^2+bc^2+2ac^2-2ad^2}{a-b}$$

et, en réduisant : $s^2-s'^2=\dfrac{a\,(c^2-d^2)+b\,(c^2-d^2)}{a-b}$; mettant c^2-d^2 en facteur commun, j'ai $s^2-s'^2=\dfrac{(c^2-d^2)\ (a+b)}{a-b}$, d'où je tire la proportion $s^2-s'^2 : c^2-d^2 :: (a+b) : (a-b)$, ou

$$\overline{BD}^2 - \overline{AC}^2 : \overline{CD}^2 - \overline{AB}^2 :: AD + BC : AD - BC.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

II. D'après un théorème connu, on a aussi :

$$s^2+s'^2=c^2+d^2+2ab.$$

C'est-à-dire que la somme des carrés des diagonales d'un trapèze est égale à la somme des carrés des côtés non parallèles, plus au double rectangle des côtés parallèles.

Donc, j'ai ainsi, entre les 4 côtés et les 2 diagonales d'un trapèze, deux relations qui permettent, étant données 4 quelconques de ces 6 quantités, de trouver les 2 autres. Ainsi, pour avoir la diagonale s, j'additionne les deux équations et j'obtiens toute réduction faite :

$$s=\sqrt{\frac{a\,(c^2-b^2)+b\,(a^2-d^2)}{a-b}}.$$

Si l'on suppose $b > c$, la formule se mettra sous la forme

$$s=\sqrt{\frac{b\,(a^2-d^2)-a\,(b^2-c^2)}{a-b}}.$$

Ou bien encore,

$$s=\sqrt{\frac{a\,(c+b)\,(c-b)+b\,(a+d)\,(a-d)}{a-b}}.$$

On trouverait de même pour la diagonale s',

$$s'=\sqrt{\frac{a\,(d^2-b^2)+b\,(a^2-c^2)}{a-b}}.$$

Les relations obtenues donnent le moyen de résoudre ce problème : Construire un trapèze connaissant les deux diagonales et les deux côtés non parallèles.

Il faudrait construire le triangle AOB (*fig.* 31). Pour cela, il faut partager chaque diagonale en parties proportionnelles aux bases, on le voit d'après la similitude des triangles BOC et AOD. Or, le théorème démontré ci-dessus fournit le rapport cherché, car on a :

$$s^2-s'^2 : c^2-d^2 :: a+b : a-b.$$

En faisant la proportion par différence, on obtient facilement le rapport de a à b.

ANNONCES.

Application de l'algèbre à la géométrie, suivie de la *discussion des courbes d'un degré supérieur au second* (*). Par C. Jacob, *ancien élève de l'École polytechnique, capitaine d'artillerie.*

Nous indiquerons d'une manière succincte les principales questions que l'auteur a traitées avec plus de développements qu'on ne le fait ordinairement.

La *transformation des coordonnées* a été exposée en remarquant: 1° Que les nouvelles coordonnées doivent être des fonctions du premier degré des coordonnées primitives ; 2° que si l'origine n'a pas été changée, la distance d'un point quelconque du plan à l'origine, conserve la même valeur.

La discussion de l'équation générale du second degré a été immédiatement déduite de la forme sous laquelle on peut mettre cette équation, sans la résoudre par rapport à l'une des inconnues. Tous les points du lieu géométrique représenté par l'équation du second degré, s'obtiennent par les intersections de droites et de circonférences qu'il est facile de décrire; l'auteur en a conclu les propriétés générales des trois courbes du second degré.

L'interprétation géométrique des équations employées pour rapporter l'ellipse à un système de diamètres conjugués a été présentée avec soin. C'est un article que nous recommanderons aux élèves.

Les sections du cône oblique par un plan, ont été examinées dans toutes les positions que l'on peut donner au plan.

La résolution d'un assez grand nombre de problèmes, et la discussion des courbes d'un degré supérieur au second, terminent le traité.

Les élèves trouveront dans cet ouvrage plusieurs observations très-utiles.

(*) Paris, Hachette, libraire, rue Pierre-Sarrazin, 12.—Metz, madame Thiel, éditeur, rue de l'Esplanade, 1.

THÉORÈME DE WILSON.

D'APRÈS M. GAUSS (*).

1. On peut toujours résoudre en nombres entiers, l'équation indéterminée $ax-1=\dot{p}$; où $\dot{p}$ désigne un multiple du nombre premier p, et a un nombre entier positif moindre que p. Les moyens de solution, qu'on doit à *Bachet* (**), sont enseignés dans tous les traités d'algèbre.

2. Il existe toujours un nombre entier x plus petit que p, qui satisfait à la question, mais il n'en existe qu'un seul; car si x est plus grand que p en rejetant les multiples de p, le reste plus petit que p, satisfait à l'équation; s'il y avait deux nombres x', x'', tous deux moindres que p et résolvant chacun l'équation, on aura donc $a(x'-x'')=\dot{p}$, équation impossible puisque les deux facteurs a et $x'-x''$ sont chacun moindres que le nombre premier p.

3. A chaque nombre donné a correspond donc un seul nombre x plus petit que p; ces deux nombres sont dits, *nombres associés*; dénomination qu'on doit à *Euler*. Ainsi le produit de deux nombres associés est de la forme $\dot{p}+1$.

4. Si $a=p-1$, le nombre associé est évidemment aussi $p-1$.

5. Soit le produit continuel $2.3.4.(p-3)(p-2)$. Ce produit peut se décomposer en $\frac{p-3}{2}$ couples, formés chacun de deux nombres associés, car le même nombre ne peut appar-

(*) *Disquisitiones arithmeticæ*, sect. III, art. 76.

(**) Problèmes plaisans et délectables qui se font par les nombres. Lyon, 1624, 2e édit., refondue dans les Recréations mathématiques d'Ozanam.

Meziriac (Claude-Gaspar Bachet, sieur de), né à Bourg en Bresse, 9 oct. 1581; mort le 25 février 1638.

tenir à deux couples (2), mais chaque couple est de la forme $\dot{p}+1$, le produit total est donc de la même forme.

$$\begin{array}{lll} \text{Donc} & 2.\ 3.\ 4\ \ldots\ldots p-2=\dot{p}+1 \\ & 1.\ 2.\ 3\ \ldots\ldots p-2.p-1=\dot{p}-1 \\ \text{et} & 1.\ 1.\ 2\ \ldots\ldots p-1+1=\dot{p} \end{array}$$

ainsi, si l'on ajoute une unité à un produit continuel formé jusqu'au nombre qui précède immédiatement un nombre premier, la somme est un multiple de ce nombre premier.

6. Si p n'est pas un nombre premier, l'équation $1.2.3\ldots$ $\ldots p-1+1=\dot{p}$ devient impossible, car si p n'est pas un nombre premier, il a nécessairement un diviseur plus petit que $p-1$; ce diviseur se trouve donc dans le produit continuel, et comme il divise $\dot{p}$, il devra donc diviser l'unité, ce qui est impossible; donc si l'on ajoute l'unité à un produit continuel formé jusqu'à un nombre qui précède immédiatement un nombre non premier, la somme n'est jamais un multiple du nombre non premier.

7. Les deux propositions précédentes, l'une affirmative, l'autre négative, forment le théorème que Waring (*) attribue à Wilson; il a été démontré pour la première fois par Lagrange (Voir *Nouvelles annales*, tome I, p. 178) et ensuite par Euler (*Opuscul. analyt.*, t. I, p. 329).

8. En admettant l'existence des racines primitives, on peut déduire facilement le théorème de *Wilson* de celui de *Fermat*. Soit r une racine primitive à l'égard du nombre premier p; le théorème de Fermat donne $r^{p-1}-1=\dot{p}$, donc $r^{p(p-1)}-1=\dot{p}$; d'où

$$\left(r^{\frac{p(p-1)}{2}}+1\right)\left(r^{\frac{p(p-1)}{2}}-1\right)=\dot{p};$$

(*) *Meditationes analyticæ*, 3e édit., p. 380. Edit. 1776 et 1784, in-4°. Waring (Edouard), né 1734; mort en 1798.

mais $\frac{p(p-1)}{2}$ n'est pas un multiple de $p-1$, et r étant une racine primitive, il s'ensuit que $r^{\frac{p(p-1)}{2}}-1$ n'est pas divisible par p, l'on a donc

$$r^{\frac{p(p-1)}{2}}+1=\dot{p}; \quad \text{or} \quad r^{\frac{p(p-1)}{2}}=r.r^2.r^3\ldots\ldots r^{p-1};$$

donc par définition de la racine primitive en divisant tous les facteurs r, r^2, r^3 par p, on a pour restes les nombres de 1 à $p-1$; C. Q. F. D.

Cette démonstration est de M. le professeur Verhulst (Quételet, *Correspondance mathématique*, tome III, p. 71; 1827). Je n'avais pas ce renseignement, en écrivant la note du tome I (p. 469).

Tm.

NOTE

Sur la résolution de deux équations du second degré à deux inconnues;

PAR M. L. ANNE,

Ancien élève de l'École polytechnique, répétiteur de mathématiques au Collége royal Louis-le-Grand.

Des applications de cette théorie ont plusieurs fois été proposées au concours général des colléges pour les classes de mathématiques élémentaires et spéciales; elles conduisent à des observations qui peuvent être utiles aux élèves: c'est uniquement sous ce point de vue que j'ai cru devoir donner plus d'extension à la question déjà traitée dans ce Journal, page 34, t. I.

Voici quelques-unes des équations dont la solution a été proposée au concours:

1° $xy+a(x+y)=p, \quad x^2+y^2+2b(x+y)=q.$

L'addition de ces deux équations, donne :

$$(x+y)^2+(2b+a)(x+y)-(q+2p)=0.$$

En prenant pour inconnues $x+y$, et xy, on obtient facilement les valeurs de x, y.

2° $60.y^2+122.xy+62.x^2-216.y-219.x+189=0.$

$$12.y^2+10.xy+2.x^2-48.y-23.x+21=0.$$

La première donne : $y=\frac{61.x-108}{60}\pm\frac{x-18}{60}$

Et la seconde : $y=\frac{24-5.x}{12}\pm\frac{x+18}{12}.$

On reconnaît ainsi que les équations sont décomposables en facteurs rationnels du premier degré ; leur résolution se ramène à celle d'équations du premier degré.

3° $y^2-xy-2x^2+y+4x-4=0.$

$$y^2+xy-6x^2+3y+12.x-2=0.$$

Leur somme est $y^2+2y-4x^2+8x-3=0$

D'où $y=-1\pm2(x-1).$

Leur différence est $y(x+1)-2.x^2+4x+1=0$, etc, etc.

4° $y^2-10xy+5y+16x^2+4=0$

$$3y^2-24.xy-8y+45x^2+30x+5=0.$$

La première donne : $y=\frac{5(2x-1)}{2}\pm\frac{3(2x-1)}{2}$

Et la seconde : $y=\frac{4(3x+1)}{3}\pm\frac{(3x-1)}{3},$

Ce qui montre que les équations proposées sont décomposables en facteurs rationnels du premier degré.

5° $2y^2-5xy+5y+2x^2-x-3=0$

$$3y^2+10xy-5y+3x^2-7x+2=0.$$

On en déduit : $y = \frac{5(x-1)}{4} \pm \frac{3x-y}{4}$

$$y = \frac{5(-2x+1)}{6} \pm \frac{8x-1}{6}.$$

Considérons les équations générales

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$
$$A'y^2 + B'xy + C'x^2 + D'y + E'x + F' = 0$$

dont on demande les solutions.

La marche la plus naturelle à suivre est de s'assurer si l'une d'elles, ou toutes deux peuvent se décomposer en facteurs rationnels du premier degré, et pour cela, il suffit de résoudre chacune des équations proposées par rapport à l'une des inconnues.

La première donne

$$y = -\frac{Bx+D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+(D^2-4AF)}$$

Si le trinôme soumis au radical est un carré, les deux valeurs de y s'expriment en fonction rationnelle de x, de la forme :

$$y' = mx + n, \quad y'' = px + q.$$

La première des équations proposées, peut s'écrire :

$$(y - mx - n)(y - px - q) = 0.$$

Si la seconde peut subir la même décomposition, elle donnera :

$$(y - m'x - n')(y - p'x - q') = 0.$$

Et les solutions demandées s'obtiendront en résolvant chacun des quatre systèmes.

$$1 \begin{cases} y - mx - n = 0 \\ y - m'x - n' = 0 \end{cases} \qquad 2 \begin{cases} y - mx - n = 0 \\ y - p'x - q' = 0 \end{cases}$$

$$3 \begin{cases} y - px - q = 0 \\ y - m'x - n' = 0 \end{cases} \qquad 4 \begin{cases} y - px - q = 0 \\ y - p'x - q' = 0. \end{cases}$$

Remarque. Si, au lieu de résoudre la première équation par rapport à y, on l'avait résolue par rapport à x, il en serait résulté :

$$x=-\frac{By+E}{2C}\pm\frac{1}{2C}\sqrt{(B^2-4AC)y^2+2(BE-2CD)y+(E^2-4CF)}$$

La condition qui doit être remplie pour que le trinôme, lacé sous le radical, soit un carré, est la même que si l'on avait résolu l'équation par rapport à y. C'est ce qu'il est facile d'établir par un calcul direct. En effet, pour que le trinôme, soumis au radical de l'équation résolue par rapport à y, soit un carré, il faut que $(BD-2AE)^2=(B^2-4AC)(D^2-4AF)$. Effectuant le calcul indiqué, supprimant B^2D^2 dans les deux membres, multipliant ensuite par $\frac{C}{A}$, et ajoutant à chaque membre $B^2E^2+4C^2D^2-4ACE^2$, il vient : $(BE-2CD)^2=(B^2-4AC)(E^2-4CF)$; égalité qui exprime précisément la condition nécessaire et suffisante pour que le trinôme $(B^2-4AC)\ y^2+2\ (BE-2CD\ y)+(E^2-4CF)$ soit un carré.

Analytiquement ce résultat est évident, puisque les égalités dont il s'agit sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation générale du second degré représente le système de deux lignes droites.

Si une des équations proposées, par exemple, la première est seule décomposable en facteurs rationnels du premier degré; les solutions du système proposé seront données par celles des deux systèmes :

$$(1)\left\{y-mx-n=0,\ A'y^2+B'xy+C'x^2+D'y+E'x+F'=0.\right.$$

$$(2)\left\{y-px-q=0,\ A'y^2+B'xy+C'x^2+D'y+E'x+F'=0.\right.$$

Si aucune des équations proposées n'est décomposable en facteurs du premier degré, on élimine une inconnue par une des méthodes connues, soit par comparaison, soit par réduction. *

Par comparaison. On résout chacune des équations par rapport à la même inconnue, et on égale les valeurs trouvées, puisqu'elles doivent être communes :

(1) $$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$
(2) $$A'y^2 + B'xy + C'x^2 + D'y + E'x + F' = 0.$$

On déduit des valeurs de y de la forme

(3) $$y = M \pm \sqrt{N} \text{ pour l'équation (1)}$$
(4) $$y = M' \pm \sqrt{N'} \text{ pour l'équation (2)}$$

M et M' sont du premier degré en x, et N et N' sont du second degré : égalant et opérant :

(5) $$M \pm \sqrt{N} = M' \pm \sqrt{N'}$$
(6) $$(M - M')^2 - (N + N') = \pm 2\sqrt{N.N'}$$
(7) $$[(M - M')^2 - (N + N')]^2 = 4\, N.N'$$

Cette équation, si elle ne s'abaisse pas à un degré inférieur, est évidemment du quatrième degré.

A une valeur de x correspondent deux valeurs de y dans chacune des équations proposées, d'où résultent seize systèmes de valeurs, parmi lesquels quatre seulement sont communs aux deux équations proposées.

En effet, soit $x = \alpha_1$ une des racines de l'équation (7); α_1 substitué à x dans l'équation (7) rend le premier membre identiquement égal au second; cette valeur α_1 substituée à x dans l'équation (6) ne rend le premier membre identiquement égal au second, qu'autant qu'on affecte le second membre du signe du résultat donné par le premier, par exemple, le signe $+$; de là une première restriction. Le produit des radicaux étant positif dans l'équation (6), ils sont de signes contraires dans l'équation (5) ; donc α est solution de l'une des équations

$$M+\sqrt{N}=M'-\sqrt{N'}$$
$$M-\sqrt{N}=M'+\sqrt{N'}$$

et d'une seule, puisque chacune d'elles est incompatible avec l'autre. En effet, par une valeur numérique attribuée à x, M, M', N, N' déviennent des nombres et donnent par exemple

$$M+\sqrt{N}=M'-\sqrt{N'}$$

d'où

$$M-\sqrt{N}<M+\sqrt{N}<M'-\sqrt{N'} \text{ et à fortiori}$$
$$M-\sqrt{N}<M'+\sqrt{N'}$$

Ces restrictions proviennent de ce que chacune des quatre équations

$$M+\sqrt{N}=M'+\sqrt{N'} \qquad M-\sqrt{N}=M'+\sqrt{N'}$$
$$M+\sqrt{N}=M'-\sqrt{N'} \qquad M-\sqrt{N}=M'-\sqrt{N'}$$

dans lesquelles doit se décomposer l'égalité

$$M\pm\sqrt{N}=M'\pm\sqrt{N'}$$

donne la même équation finale.

Analytiquement ce résultat s'explique facilement ; deux sections coniques ne peuvent se couper en plus de quatre points et l'équation finale que l'on vient de trouver est l'équation dont les racines sont les abscisses des points communs aux deux courbes; mais à chaque abscisse correspondent généralement sur la courbe deux points, et alors les quatre abscisses

$$x=\alpha_1 \quad x=\alpha_2 \quad x=\alpha_3 \quad x=\alpha_4$$

donnent donc seize points dont quatre seulement sont communs aux deux courbes, c'est-à-dire ont la même ordonnée et la même abscisse.

Par réduction. Reprenons les équations générales :

$$(1)\quad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$
$$(2)\quad A'y^2 + B'xy + C'x^2 + D'y + E'x + F' = 0$$

je représente par $M = 0$ et $M' = 0$ ces deux équations ; entre M et M' j'élimine un des carrés, par exemple celui de y ; pour cela, je multiplie M par A' ; M' par A et je les retranche l'une de l'autre, soit le résultat

$$MA' - AM' = 0 = y\,(ax + b) - (cx^2 + dx + f) = 0$$

alors appliquant aux équations $M = 0$, $M' = 0$ les raisonnements connus, on voit que l'on peut remplacer $M = 0$, $M' = 0$ par $M = 0$, $MA' - AM' = 0$.

L'équation $MA' = AM'$ du premier degré par rapport à y, donnera $y = \dfrac{cx^2 + dx + f}{ax + b}$.... (3). Si cette fraction est irréductible on la substitue dans $M = 0$, et il en résultera une équation $M'' = 0$, qui sera généralement du quatrième degré en x. Chacune des racines de $M'' = 0$, substituée dans (3), donnera la valeur correspondante de y. On aura ainsi les quatre systèmes de valeurs sans ambiguïté.

Si $cx^2 + dx + f$ est exactement divisible par $ax + b$, il en résultera

$$y = \frac{cx^2 + ax + f}{ax + b} = px + q.$$

En substituant $px + q$ à y dans $M = 0$, on aura une équation du second degré qui ne donne plus que deux systèmes de solutions ; cette réduction de la valeur de y, réduction que les règles du calcul prescrivent, semble donc avoir fait perdre deux solutions ; mais il n'en est rien. L'équation (3) peut s'écrire $y\,(ax + b) = cx^2 + dx + f = (ax + b)\,(px + q)$;

d'où $(y-px-q)\,(ax+b)=0$. Donc, les solutions seront données par les systèmes

$$\{y-px-q=0,\ \mathrm{M}=0.\},\qquad \{ax+b=0,\ \mathrm{M}=0.\}.$$

Et ces solutions seront encore au nombre de quatre.

Si l'on n'avait pas fait cette réduction de la valeur de y, le calcul l'aurait indiquée. Car, en substituant la valeur fractionnaire de y dans $\mathrm{M}=0$, on obtient, lorsque $cx^2+dx+f=(ax+b)(px+q)$:

$$(ax+b)^2\left[\mathrm{A}(px+q)^2+(\mathrm{B}x+\mathrm{D})(px+q)+\mathrm{C}x^2+\mathrm{E}x+\mathrm{F}\right]=0,$$

équation dont deux des racines sont égales à $-\frac{b}{a}$.

Cette valeur $-\frac{b}{a}$ de x, substituée dans y, donne $\frac{0}{0}$, ce qui avertit de la présence du facteur commun.

Analytiquement, cela tient à ce que les deux sections coniques, représentées par les équations (1) et (2), se coupent sur deux droites dont une est parallèle à l'axe des y, car l'équation (3)

$$y\ (ax+b)-(cx^2+dx+f)=0,$$

combinaison de (1) et (2) représente une courbe passant par le point commun de (1) et (2), et cette courbe, comme variété d'hyperbole, se réduit à deux droites,

$$y=px+q,\qquad ax+b=0,$$

dont la seconde est parallèle à l'axe des y.

Enfin quelle que soit la méthode employée, elle conduit généralement à une équation du quatrième degré, qui, souvent, ne peut se résoudre sans le secours de la théorie générale des équations. Si l'équation finale en x, à laquelle on arrive, est dans ce cas, alors il faut recommencer les calculs, et éliminer x au lieu de y, parce que l'on peut avoir une équation finale en y que l'on sache résoudre.

Quand une équation du quatrième degré peut se résoudre à la manière du second, ses racines sont de l'une des deux formes,

$$x = \pm\sqrt{a \pm \sqrt{b}} \qquad \text{ou bien } x = c \pm \sqrt{a \pm \sqrt{b}}.$$

Si l'on veut remonter aux équations dont proviennent ces valeurs, on voit que la première provient d'une équation ne contenant que les puissances paires de l'inconnue et de la forme,

$$x^4 + px^2 + q = 0,$$

équation résolue dans toutes les algèbres.

La seconde forme provient d'une équation complète du quatrième degré, mais dont le premier membre est la différence de deux carrés,

$$[(x-c)^2 - a]^2 - (\sqrt{b})^2 = 0,$$

et il est clair que toute équation complète du quatrième degré,

$$x^4 + px^3 + qx^2 + \mathrm{R}x + \mathrm{S} = 0,$$

dont le premier membre pourra se décomposer en deux carrés, soit de la forme

$$(x^2 + ax + b)^2 - c^2 = 0,$$

ou bien de la forme

$$(x^2 + ax + b)^2 - c^2x^2 = 0,$$

pourra se résoudre immédiatement, car elles donnent :

La première, $(x^2 + ax + b + c)(x^2 + ax + b - c) = 0$;

La seconde, $(x^2 + ax + b + cx)(x^2 + ax + b - cx) = 0$.

Premier exemple. $x^4 - 22x^3 + 124x^2 - 33x - 10 = 0$.

Extrayant la racine carrée du premier membre, on a $x^2 - 11x + \frac{3}{2}$ à la racine, et $-\frac{49}{4}$ pour reste ; donc l'équation proposée est identique à

$$\left(x^2-11x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{49}{4}=(x^2-11x+5)\,(x^2-11x-2)=0.$$

Les racines seront données par

$$x^2-11x+5=0 \qquad \text{et } x^2-11x-2=0.$$

Deuxième exemple. $7x^4-40x^3+73x^2-60x+36=0.$

Pour éviter les radicaux, je multiplie par 7,

$$49x^4-280x^3+511x^2-420x+252=0\,;$$

extrayant la racine carrée du premier membre,

on a $7x^2-20x+\dfrac{111}{14}$ à la racine, et $-\left(\dfrac{3660}{14}x-\dfrac{37071}{196}\right)$

pour reste. Comme ce reste n'est pas un carré parfait, le premier membre ne peut subir la décomposition de l'équation précédente, cependant (et cet artifice de calcul est à noter, vu ses nombreuses applications) si l'on retourne l'équation,

$$36-60x+73x^2-40x^3+7x^4=0,$$

et que l'on extraie la racine carrée du premier membre, on trouve $(6-5x+4x^2)$ à la racine, et $-9x^4$ pour reste; donc, l'équation est identique à

$$(6-5x+4x^2)^2-(3x^2)^2=(6-5x+4x^2+3x^2)\,(6-5x+4x^2-3x^2)=0,$$

dont les racines s'obtiennent comme dans l'exemple précédent, en égalant chaque parenthèse à zéro.

Troisième exemple. $x^4-10x^3+23x^2-30x+9=0.$

Dans cet exemple, 30, coefficient de x, est le produit de 10, coefficient de x^3, par 3, racine carrée du terme tout connu. Donc, le premier membre est identique à une expression de la forme $(ax^2+bx+c)^2-d^2x^2=0.$

En effet, complétant le carré, on a

$$(x^2-5x+3)^2-8x^2=0,$$

-5 est la moitié du coefficient de x^3, et 3 la racine carrée du terme tout connu,

$$(x^2-5x+3-2x\sqrt{2})^2(x^2-5x+3+2x\sqrt{2})=0,$$

dont les racines sont données par

$$x^2-(5+2\sqrt{2})x+3=0 \quad \text{et} \quad x^2-(5-2\sqrt{2})x+3=0.$$

Enfin, il est clair que si, par un moyen quelconque, le premier membre de l'équation

$$x^4+px^3+qx^2+\mathrm{R}x+\mathrm{S}=0,$$

se décompose en deux parties quelconques de la forme

$$\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2=0, \qquad \text{ou bien } \mathrm{M}^2-\mathrm{N}^2=0,$$

dans le premier cas, on posera

$$(\mathrm{M}+\mathrm{N}\sqrt{-1})(\mathrm{M}-\mathrm{N}\sqrt{-1})=0,$$

et dans le second, $(\mathrm{M}+\mathrm{N})(\mathrm{M}-\mathrm{N})=0$.

PROBLÈMES D'EXAMEN.

SOLUTIONS DE M. GUILMIN,
Ancien élève de l'École normale, professeur de mathématiques.

—

1. *Inscrire dans une ellipse donnée un triangle maximum.*

Dans un triangle satisfaisant à cette question, chaque côté doit être parallèle à la tangente menée par le sommet opposé.

En effet, soit un triangle HBC (*fig.* 32) tel que le côté BC ne soit pas parallèle à la tangente en H. Menons GA, parallèle à BC, du même côté que H, et tangente à l'ellipse en un point A. Le triangle ABC est évidemment plus grand que HBC. Nous ne pouvons donc chercher un triangle maximum que parmi ceux dont les côtés remplissent la condition énoncée. Tous ces triangles ont même surface : si on le démontre, il sera prouvé que chacun d'eux est un maximum.

Soit ABC l'un d'eux. La tangente au sommet A étant parallèle à BC, le diamètre AOMD passe au milieu, M, de la corde BC. La même observation s'appliquant à chacun des trois côtés, il en résulte que les trois médianes de ABC passent au centre de l'ellipse, qui est, par conséquent, le centre de gravité du triangle. Par suite, $OM = \frac{AO}{2}$.

On a surface $ABC = AM \times MC. \sin AMC$.

Prenons AOD pour axe des y et son conjugué pour axe des x. Soit

$$AO = b'; \ OP = a'. \text{ On a } AM = b' + \frac{b'}{2} = \frac{3}{2} b'.$$

Pour avoir MC, j'observe qne c'est l'abscisse du point d'intersection de l'ellipse avec la droite BC dont l'équation est $y = -\frac{b'}{2}$. L'équation de l'ellipse étant $a'^2 y^2 + b'^2 x^2 = a'^2 b'^2$, en y faisant $y = -\frac{b'}{2}$; il vient

$$\frac{a'^2 b'^2}{4} + b'^2 x^2 = a'^2 b'^2 \quad \text{ou} \quad x^2 = a'^2 - \frac{a'^2}{4} = \frac{3}{4} a'^2,$$

d'où
$$x \text{ ou } MC = \frac{a'}{2} \sqrt{3}.$$

Par suite

$$ABC = \frac{3}{4} a' b' \sqrt{3} \sin AMC.$$

Or, AMC étant l'angle des deux diamètres conjugués, a', b', on a $a' \ b' \sin AMC = ab$, d'où

$$ABC = \frac{3}{4} ab \sqrt{3},$$

valeur constante ; ce qu'il fallait démontrer.

Il y a donc une infinité de triangles maximums.

On peut se donner à volonté l'un des sommets.

Soit proposé d'inscrire dans l'ellipse un triangle maximum ayant pour sommet un point donné A de l'ellipse. On tire le diamètre AOD et son conjugué OP ; on prend le milieu de OD, et, par ce milieu M, on mène la corde BC parallèle à OP ; ce sera la base du triangle ; on joindra AB, AC ; le triangle ABC répond évidemment à la question.

2. *Circonscrire à un triangle donné ABC (fig. 32) une ellipse minimum.*

Il suffit de construire une ellipse pour laquelle ce triangle soit un triangle maximum inscrit, ce qui est facile. Pour cela, on observera qu'il faut, et il suffit, que le centre de cette ellipse coïncide avec le centre de gravité du triangle ; on a donc à construire une ellipse connaissant le centre et trois points ; cette ellipse est évidemment déterminée. Je dis que c'est l'ellipse minimum circonscrite. En effet, concevons qu'on ait circonscrit au triangle une seconde ellipse quelconque ; pour cette nouvelle ellipse, le triangle ne sera pas un triangle maximum inscrit ; car, si cela était, la courbe aurait, comme la première, pour centre, le centre de gravité du triangle, et comme elles ont déjà trois points communs, A, B, C, elles se confondraient ; ce qui est contre l'hypothèse.

Soient a, b, les demi-axes de la première ellipse ; et a', b' ceux de la seconde : on aura

$$ABC = \frac{3}{4} ab\sqrt{3}, \quad \text{et} \quad ABC < \frac{3}{4} a'b'\sqrt{3}.$$

Donc, $a'b' > ab$; ou, $\pi a'b' > \pi ab$.

Donc, la première ellipse est la plus petite des ellipses circonscrites au triangle ABC.

3. *Circonscrire à une ellipse donnée un triangle minimum.*

Tout triangle satisfaisant à cette condition doit être tel que chaque côté soit parallèle à la ligne qui joint les points de contact des deux autres.

En effet, soit un triangle ADE (*fig.* 33) circonscrit à l'ellipse, et supposons que le côté DE ne soit pas parallèle à la corde des contacts GH. Je mène à l'ellipse la tangente BIC, parallèle à GH ; le triangle circonscrit ABC aura une surface moindre que ADE. Pour le démontrer, je ferai d'abord observer que le point de contact I est le milieu de BC ; car si l'on mène du point A au centre O de l'ellipse la droite AO, elle divisera en parties égales toutes les cordes parallèles à GH, et passera par les points de contact des tangentes parallèles à ces cordes. Donc, la droite AO prolongée passe par le point I, et puisque les parallèles GH, BC, sont coupées en parties proportionnelles par AI, le point I est au milieu de BC. La droite ED coupe BC en un point F différent de I, sans cela, ces deux tangentes se confondraient. Les deux triangles ABC, ADE, ayant la partie commune ABFE, il reste pour l'un $CFE = \frac{1}{2}$ EF. CF. sinF, et pour l'autre $BFD = \frac{1}{2}$ BF. FD. sin F. Or, $CF < BF$; et si l'on mène BM parallèle à AC, on trouve EF : FM :: CF : FB ; donc, à cause de $CF < BF$, on a : $EF < FM$, et à fortiori $EF < FD$. Par suite, $EFC < BFD$; donc, $ABC < ADE$. Ainsi, on ne peut chercher le triangle circonscrit minimum que parmi ceux dont chaque côté est parallèle à la droite qui joint les points de contact des deux autres côtés.

Tous ces triangles ont même surface. En effet pour l'un d'eux, par exemple ABC, le triangle GIH formé par les lignes de contact est un triangle maximum inscrit dans l'ellipse, car il est tel que chacun de ses côtés est parallèle à la tangente menée par le sommet opposé. De plus, les trois lignes de contact joignent les milieux des côtés du triangle circonscrit, donc la surface du triangle circonscrit, est quadruple de celle du triangle inscrit. Or celle-ci étant constante et égale à $\frac{3}{4}\, ab\sqrt{3}$, la surface du triangle circonscrit est constante et égale à $3ab\sqrt{3}$.

Chacun des triangles qui satisfait à la condition indiquée est donc un minimum parmi ceux dans lesquels l'ellipse est inscrite.

On peut se donner un des points de contact I. Pour circonscrire à l'ellipse un triangle minimum dont un côté touche l'ellipse en un point donné I, on mènera le diamètre IO et on prendra au delà du centre sur cette ligne, une longueur $AO = 2IO$. Par le point A on mènera deux tangentes. Ces deux lignes formeront avec la tangente en I le triangle demandé. On peut éviter la construction des tangentes en inscrivant un triangle maximum ayant son sommet en I, et menant par chacun des trois sommets une parallèle au côté opposé.

4. *Inscrire dans un triangle donné une ellipse minimum.*

Il suffit de construire une ellipse pour laquelle le triangle proposé soit un triangle circonscrit minimum. Pour cela, il suffit de prendre pour centre de l'ellipse le centre de gravité du triangle et de la faire passer par les milieux des trois côtés. Cette ellipse est déterminée, car on donne son centre et trois points. C'est là l'ellipse maximum inscrite. En effet concevons qu'on ait inscrit dans le triangle une seconde ellipse quelconque. Le triangle proposé ne sera pas un triangle minimum circonscrit à celle-ci; car si cela était, elle se confondrait évidemment avec la première. Soient s la surface du triangle, a, b, les demi-axes de la première ellipse; a', b' ceux de la seconde. On a en même temps $s = 3ab\sqrt{3}$, d'après le théorème précédent, et $s > 3a'b'\sqrt{3}$. Donc $3ab\sqrt{3} > 3a'b'\sqrt{3}$ ou $ab > a'b'$ d'où $\pi ab > \pi a'b'$. Donc la première ellipse est plus grande que toute autre ellipse inscrite dans le triangle proposé.

(*La suite prochainement.*)

NOTE

SUR LES CENTRES,

PAR M. ROGUET,
Professeur de mathématiques.

On nomme *centre* d'une courbe, un point qui jouit de la propriété de diviser en deux parties égales, les cordes qui passent par ce point.

De là résulte, que lorsque l'origine des axes est le centre de la courbe, l'équation ne doit pas changer lorsqu'on y remplace à la fois x et y par $-x$ et $-y$. En effet, supposons que l'origine O, (*fig.* 34), soit le centre de la courbe, les triangles OMP, OM'P' seront égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux : savoir $OM = OM'$ et $MOP = M'OP'$, $OMP = OM'P'$; donc $MP = M'P'$ et $OP = OP'$; donc les coordonnées de l'un des points M, M' sont respectivement égales et de signes contraires à celles de l'autre ; d'ou résulte que s'il y a sur la courbe un point dont les coordonnées soient x', y', il y a nécessairement, aussi sur la courbe un autre point dont les coordonnées sont $-x'$, $-y'$. Réciproquement si l'équation de la courbe ne change pas lorsqu'on y remplace à la fois x et y par $-x$ et $-y$, la courbe a un centre, et ce centre c'est l'origine. En effet (*fig.* 34), les coordonnées du point M, étant x', y', ces coordonnées prises en signe contraire appartiendront à un autre point de la courbe. Soit M' le point dont les coordonnées sont égales et de signes contraires à celles du point M ; les triangles OMP, OM'P' seront égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux, savoir : $P = P'$,

$OP = OP'$, $PM = P'M'$. Donc l'angle $MOP = M'OP'$, et par suite MO et $M'O$ sont en ligne droite; et de plus $MO = MO'$; donc l'origine O est un centre de la courbe.

Il résulte de là, que le centre d'une courbe algébrique de degré impair, est situé sur la courbe, puisqu'en y transportant l'origine, l'équation de la courbe ne doit renfermer que des termes de même parité, et par suite ne doit pas renfermer de terme indépendant des variables. Cette équation est donc satisfaite alors par les coordonnées du centre $x = 0$, $y = 0$.

Le centre d'une courbe de degré pair peut être situé ou non situé sur la courbe.

Théorème 1. Lorsqu'une courbe a plus d'un centre, elle en a une infinité; car, soient O, O' (fig. 35) deux centres d'une même courbe; si l'on prend à droite de O' un point O'' sur la droite OO' à une distance $O'O'' = OO'$; le point O'' sera un centre; en effet, soit M un point de la courbe; tirons la droite MO'' et prolongeons-la d'une longueur $O''M' = O''M$. Il suffit de prouver que le point M' est sur la courbe. Pour cela, tirons MO' et prolongeons d'une longueur $O'P = O'M$, P sera un point de la courbe; tirons PO et prolongeons d'une longueur $ON = OP$, le point N sera un point de la courbe. Tirons enfin les droites $O'N$ et $O'M'$.

Les triangles $O''O'M$ et $OO'P$ sont égaux comme ayant un angle égal $MO'O'' = OO'P$ compris entre côtés égaux, savoir : $OO' = O'O''$, $O'M = O'P$; donc ils sont égaux, et, par suite, les droites PN et MM' sont parallèles, et $OP = O''M$. Les triangles $O'O''M$ et $O'ON$ sont égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux : $O'' = O$ et $OO' = O'O''$, $O''M' = ON$; puisque $O''M' = O''M$ et $OP = ON$; donc, l'angle $OO'N = O''O'M'$; et, par suite, les segments NO' et $O'M'$ sont en ligne droite; de plus ces segments sont égaux; par conséquent le point M' est sur la courbe. Donc, de l'existence de deux centres résulte celle d'un troisième; et, par suite, celle d'une infinité de centres, placés sur la droite qui joint les deux premiers, et placés deux à deux, à une distance égale à OO'.

Théorème. 2. Une courbe *algébrique* ne peut avoir qu'un seul centre ; car (*fig.* 36) si l'on joint un point de la courbe aux différents centres O,O',O'',O''', etc., et qu'on prolonge les droites MO, MO', MO'', MO'''..... de longueurs égales, ON, ON', ON'', ON'''..... les points N, N' N'', N''', etc. seront autant de points de la courbe, tous situés sur une même parallèle à la ligne des centres ; si l'on joint ensuite un des points N,N'... à tous les centres, et qu'on prolonge ces droites NO, NO' NO'' .. de longueurs égales, les extrémités M, P, P', P''... de ces prolongements seront autant de points de la courbe, situés sur une parallèle à la ligne des centres, et les parallèles MP'' et NN''' seront à égale distance de la droite OO'.

Soit $\varphi(x,y)=0$ l'équation proposée. Si l'on prend un nouveau système d'axes, dont l'axe des x soit la droite NN''', et $F(x,y)=0$ l'équation nouvelle ; il faudra, pour déterminer les points communs au lieu représenté par l'équation, et à l'axe des x, supposer $y=0$ dans l'équation $F(x,y)=0$, et on obtiendra une équation en x dont les racines seront les abscisses des points N, N'... de rencontre de la courbe avec la droite NN''', ces points sont en nombre infini ; par conséquent l'équation en x sera satisfaite par des valeurs de x en nombre infini ; ce qui ne peut avoir lieu à moins que les coefficients des différentes puissances de x dans l'équation ne soient tous nuls. L'hypothèse $y=0$ faite dans l'équation $F(x,y)=0$ rend donc nuls les coefficients des diverses puissances de x lorsqu'on ordonne le premier membre de l'équation par rapport à x ; d'où il résulte que y est facteur commun à tous les termes de $F(x,y)$, et, par suite, ce polynôme peut se mettre sous la forme $y.f(x,y)$. Si l'on rapporte la courbe à d'autres axes, son premier membre sera de la forme $(my+nx+p)\psi(x,y)$.

L'équation proposée $\varphi(x,y)=0$ ne peut pas représenter un arc continu, car on trouverait sur cet arc, quelque petit qu'il fût, une infinité de points inégalement distants de OO′ à chacun desquels correspondrait un système de deux droites parallèles à OO′, et situées de part et d'autre à égale distance de OO′. Considérant chacune de ces parallèles comme on vient de le faire pour la droite NN‴; pour chacune d'elles, on sera conduit à mettre en évidence un facteur du premier degré dans le premier membre de l'équation $\varphi(x,y)=0$; d'où il résulterait que le premier membre d'une équation algébrique à deux variables, et d'un degré déterminé, pourrait être décomposé en une infinité de facteurs du premier degré à deux variables.

Pour la même raison, le premier membre de l'équation proposée ne peut pas non plus renfermer de facteurs du premier degré qui, égalé à zéro, représenterait une droite non parallèle à la droite OO′.

Par conséquent, le lieu géométrique représenté par l'équation ne peut être qu'un système de droites parallèles à la ligne OO′.

Si l'on prend pour axe des x, OO′ et pour axe des y une droite quelconque, l'équation sera en y seul, et son premier membre sera le produit de n facteurs de la forme y^2-a^2, $y^2-a'^2$, si l'équation est de degré pair $2n$; et, si l'équation est de degré impair $2n+1$, son premier membre se décomposera en $2n+1$ facteurs, l'un y et les autres $y-a$, $y+a$, $y-b$, $y+b$... etc.

Tout autre facteur qui se trouverait dans le premier membre ne pourrait être qu'un facteur qui, égalé à zéro, fournirait une équation qui ne pourrait être satisfaite que par $x=0$, $y=0$ ou par des valeurs imaginaires des variables.

On peut démontrer par la forme même d'une équation algébrique que s'il existe sur le plan deux points tels qu'étant pris pour origine, l'équation d'un lieu ne change pas lorsqu'on y remplace à la fois x et y par $-x$ et $-y$, cette équation ne peut représenter qu'un système de droites parallèles. En effet soient o et o' ces deux points : supposons qu'en prenant le premier point o pour origine des coordonnées, Ax^py^q soit le terme de l'équation dans lequel x^p soit la plus haute puissance de x multipliée par y^q ; transportons l'origine en O' sans changer la direction des axes ; il faudra remplacer y par $y+o$ et x par $x+d$ en appelant d la distance OO' ; le terme Ax^py^q deviendra $A(x+d)^py^q$ et en développant : $Ax^py^q+p\,Adx^{p-1}y^q+$ etc. ; or le terme $pAdx^{p-1}y^q$ ne doit pas rester dans le premier membre de l'équation puisqu'il n'est pas de même parité que Ax^py^q ; et cependant ce terme $pAdx^{p-1}y^q$ ne peut se réduire avec aucun autre de la nouvelle équation, puisque x^p est la plus haute puissance de x par laquelle soit multiplié y^q dans la première équation. Les autres termes qui contiendront y^q seront au plus du degré $p-2$ en x, d'où l'ont doit conclure que x ne peut pas entrer dans l'équation, si O et O' sont deux centres ; et, par suite, l'équation étant en y seulement ne peut représenter qu'un système de droites parallèles. On suppose que l'équation ne contient aucun facteur qui, égalé à zéro, n'admette que des valeurs nulles ou imaginaires pour les variables, tels que x^2+y^2 ou $x^2+y^2+k^2$.

Détermination du centre. 1° On peut obtenir les coordonnées du centre d'une courbe algébrique par la résolution de deux équations du premier degré à deux inconnues, ou, autrement, on peut déterminer le centre par l'intersection de deux droites. En effet soit m le degré de l'équation, a et b les coordonnées du centre ; a et b doivent avoir des valeurs telles qu'en transportant l'origine au point dont a et b sont les coordonnées, la nouvelle équation ne renferme plus de termes de parité différente à m, et cette condition est suffisante. On substituera donc $x+a$ et $y+b$ à x et y dans l'équation proposée et on égalera à zéro les coefficients des termes de degré $m-1$, $m-3$, $m-5$, — — ce qui fournira autant d'équations entre a et b. Parmi ces équations, il s'en trouvera au moins deux qui seront du premier degré. En effet soit Ax^py^q un terme du degré m, la substitution de $x+a$ pour x et $y+b$ pour y donnera le terme $pAax^{p+1}y^q$; on aura en outre deux autres termes en $x^{p+1}y^q$; savoir : le terme provenant du terme en $x^{p-1}y^{q+1}$ et qui sera de la forme $qA'bx^{p-1}y^q$; et le terme provenant du terme en $x^{p-1}y^q$ lui même, et qui sera de la forme $Bx^{p-1}y^q$; de sorte qu'on aura l'équation.

$$pAa+qA'b+B=0.$$

On aura de même le terme $qAbx^py^{q-1}$, un terme $pA''ax^py^{q-1}$ fourni par le terme $A''x^{p+1}y^{q-1}$, et enfin un terme $B'x^py^{q-1}$ appartenant déjà à l'équation proposée, et par suite l'équation

$$qAb+pA''a+B'=0.$$

On formera donc ces deux équations, au moyen desquelles on déterminera a et b, et les valeurs obtenues ainsi pour ces dernières quantités devront satisfaire à toutes les équations formées de la même manière.

Si l'on applique cette méthode aux courbes du second degré, on trouvera deux équations seulement et pour premiers membres les dérivées prises par rapport à x et y du premier membre de l'équation du second degré, y et x représentant b et a.

2° On peut aussi regarder le centre comme un point commun à tous les diamètres de la courbe, puisque le centre est le point milieu de toutes les cordes passant par le centre. De là résulte un autre moyen de déterminer le centre d'une courbe; en effet soit $y=mx+n$(1) l'équation d'une corde;

$$Am^{\alpha}+Bm^{\beta}+Cm^{\gamma}+..+K=0 \; (2)$$

l'équation du diamètre ordonnée par rapport à m ; A,B,C,...K étant des fonctions de x et y ; le centre sera le point dont les coordonnées satisferont à l'équation (2), quelque valeur qu'on attribue à m ; et par conséquent satisferont aux équations $A=0$, $B=0$, ... $K=0$; on cherchera donc les valeurs de x et y qui satisfassent à la fois aux équations $A=0$, $B=0$, ... $K=0$; ces valeurs seront les coordonnées du centre.

L'équation d'un diamètre des courbes du second degré est $Ym+X=0$; Y est le polynôme dérivé par rapport à y, et X le polynôme dérivé par rapport à x du premier membre de l'équation du second degré ; les équations $Y=0$ et $X=0$ auront donc pour solution commune $x=a$, $y=b$, a et b étant les coordonnées du centre.

NOTE

Sur une limite de l'erreur que l'on commet en remplaçant un arc par son sinus ;

PAR M. LIONNET,
Professeur au Collége royal de Louis-le-Grand.

En partant de la formule $\sin a = 3 \sin \frac{a}{3} - 4 \overline{\sin}^3 \frac{a}{3}$, M. Vincent a obtenu la relation $a - \sin a < \frac{a^3}{2.3}$. Je me propose de montrer dans cette note, 1° que cette formule n'est pas la seule qui puisse conduire au même résultat ; 2° que $\frac{a^3}{2.3}$ est la plus petite fraction du cube d'un arc, par laquelle on puisse exprimer une limite de l'erreur que l'on commet en remplaçant l'arc par son sinus.

1. Si dans la formule

$$\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$$

on remplace

$$\cos \frac{a}{2} \text{ par } 1 - 2\overline{\sin}^2 \frac{a}{4},$$

on aura :

$$\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} - 4 \sin \frac{a}{2} \overline{\sin}^2 \frac{a}{4}.$$

Or, on a

$$\sin \frac{a}{2} < \frac{a}{2}, \sin \frac{a}{4} < \frac{a}{4}, \overline{\sin}^2 \frac{a}{4} < \frac{a^2}{16}$$

et, par suite,

$$4 \sin \frac{a}{2} \overline{\sin}^2 \frac{a}{4} < \frac{a^3}{8};$$

donc

$$(1) \qquad \sin a > 2 \sin \frac{a}{2} - \frac{a^3}{8}.$$

Remplaçant a par $\frac{a}{2}$ dans cette inégalité, dans celle qui en résulte, et ainsi de suite, on a successivement :

$$(2) \qquad \sin \frac{a}{2} > 2 \sin \frac{a}{2^2} - \frac{a^3}{8} \times \frac{1}{2^3}$$

$$(3) \qquad \sin \frac{a}{2^2} > 2 \sin \frac{a}{2^3} - \frac{a^3}{8} \times \frac{1}{2^6}$$

. . . .

. . . .

et, en général,

$$(n) \quad \ldots\ldots \sin \frac{a}{2^{n-1}} > 2 \sin \frac{a}{2^n} - \frac{a^3}{8} \times \frac{1}{2^{3(n-1)}}$$

Multipliant les inégalités (2) (3)... (n) respectivement par $2, 2^2, 2^3 \ldots 2^{n-1}$, faisant la somme des inégalités résultantes et de l'inégalité (1), puis supprimant les termes communs aux deux membres, il vient :

$$\sin a > 2^n \sin \frac{a}{2^n} - \frac{a^3}{8}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{4^{n-1}}\right),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\sin a}{a} > \frac{\sin \frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}} - \frac{a^2}{8}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{4^{n-1}}\right).$$

Cela étant, si l'on suppose que le nombre entier n croisse indéfiniment, le rapport $\dfrac{\sin \frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}}$ et la somme

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} \ldots\ldots + \frac{1}{4^{n-1}}$$

auront pour limites l'unité et la fraction $\frac{4}{3}$; ce qui réduit l'inégalité précédente à

$$\frac{\sin a}{a} > 1 - \frac{a^2}{2.3},$$

d'où l'on tire

$$\sin a > a - \frac{a^3}{2.3}$$

et

$$a - \sin a < \frac{a^3}{2.3}.$$

Donc *l'erreur que l'on commet, en remplaçant un arc positif quelconque par son sinus, est moindre que le sixième du cube de l'arc.*

Remarque. Si, dans la formule

$$\sin a = 5 \sin \frac{a}{5} - 20 \overline{\sin}^3 \frac{a}{5} + 16 \overline{\sin}^5 \frac{a}{5}, \quad (*)$$

(*) Dans cette relation et dans les suivantes, on supposera que le rapport a de l'arc au rayon est moindre que l'unité.

on néglige le dernier terme, qui est positif, et qu'on remplace $\sin\frac{a}{5}$ par $\frac{a}{5}$ dans le second terme, qui est négatif, on aura

$$\sin a > 5\sin\frac{a}{5} - \frac{4a^3}{25}.$$

Remplaçant a par $\frac{a}{5}$ dans cette inégalité, dans celle qui en résulte, et ainsi de suite, on obtiendra, par des calculs analogues à ceux qui ont conduit à la limite $\frac{a^3}{2.3}$, l'inégalité

$$\sin a > 5^n \times \sin\frac{a}{5^n} - \frac{4a^3}{25}\left(1 + \frac{1}{25} + \frac{1}{25^2} + \dots\dots\right),$$

et, par suite, $$\sin a > a - \frac{4a^3}{25} \times \frac{25}{24},$$

ou $$\sin a > a - \frac{a^3}{2.3};$$

comme précédemment.

En général, on peut obtenir cette relation, en partant de toute autre formule qui donne la valeur du sinus d'un arc en fonction des sinus d'arcs sous-multiples du premier. Pour cela, on néglige tous les termes à partir du troisième, qui est positif, et l'on remplace dans le second terme, qui est négatif, chaque sinus par l'arc correspondant. On est ainsi conduit à une première inégalité de la forme

$$\sin a > m\sin\frac{a}{m} - \frac{m^2-1}{6m^2}a^3.$$

Puis on achève le calcul, comme précédemment.

2. Reprenons la formule

$$(1) \qquad \sin a = 2\sin\frac{a}{2} - 4\sin\frac{a}{2}\sin^2\frac{a}{4}.$$

La relation $\sin a > a - \frac{a^3}{2.3}$ donne

$$\sin\frac{a}{2} > \frac{a}{2} - \frac{a^3}{2^4.3}, \quad \sin\frac{a}{4} > \frac{a}{4} - \frac{a^3}{2^7\times 3},$$

et, par suite, $$\overline{\sin}^2.\left(\frac{a}{4}\right) > \frac{a^2}{2^4} - \frac{a^4}{2^8\times 3},$$

en négligeant le dernier terme, qui est positif.

On en déduit

$$\sin\frac{a}{2}\ \overline{\sin}^2\left(\frac{a}{4}\right) > \frac{a^3}{32} - \frac{a^5}{2^9},$$

en négligeant encore le dernier terme, qui est positif. Substituant le second membre de cette inégalité à la place du premier dans la formule (1), il vient

$$\sin a < 2\sin\frac{a}{2} - \frac{a^3}{8} + \frac{a^5}{2^7}.$$

Remplaçant a par $\frac{a}{2}$, et opérant comme pour trouver la relation $\sin a > a - \frac{a^3}{2.3}$, on est conduit à

$$\sin a < 2^n \times \frac{a}{2^n} - \frac{a^3}{8}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \text{etc.}\right) +$$
$$+ \frac{a^5}{2^7}\left(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16^2} + \text{etc.}\right),$$

et, par suite, à

$$\sin a < a - \frac{a^3}{2.3} + \frac{a^5}{2.3.4.5}.$$

Cela étant, supposons que l'erreur commise, lorsqu'on remplace un arc par son sinus, soit moindre que $\frac{a^3}{2.3} - \frac{a^3}{m}$, m étant un nombre donné aussi grand qu'on voudra. On aurait

$$a - \sin a < \frac{a^3}{2.3} - \frac{a^3}{m};$$

on a d'ailleurs, par ce qui précède,

$$a - \sin a > \frac{a^3}{2.3} - \frac{a^5}{2.3.4.5},$$

d'où il résulterait

$$\frac{a^5}{2.3.4.5} > \frac{a^3}{m} \quad \text{ou} \quad a^2 > \frac{2.3.4.5}{m};$$

ce qui est impossible, puisque l'arc a peut être supposé aussi petit qu'on voudra. Donc $\frac{a^3}{2.3}$ *est la plus petite fraction du cube d'un arc par laquelle on puisse exprimer une ltmite de l'erreur que l'on commet en remplaçant l'arc par son sinus.*

Remarque 1. Si, dans l'inégalité

$$\sin a < a - \frac{a^3}{2.3} + \frac{a^5}{2.3.4.5},$$

on change successivement a en $\frac{a}{2}$, a en $\frac{a}{4}$, et qu'on remplace dans la formule (1) $\sin\frac{a}{2}$ et $\sin\frac{a}{4}$ par leurs limites ainsi obtenues, on trouvera, par des calculs analogues à ceux qu'on a faits précédemment,

$$\sin a > a - \frac{a^3}{2.3} + \frac{a^5}{2.3.4.5} - \frac{a^7}{2.3.4.5.6.7}.$$

On voit qu'on peut obtenir, par cette méthode d'approximations successives, autant de termes qu'on voudra de la série

$$\sin a = a - \frac{a^3}{2.3} + \frac{a^5}{2.3.4.5} - \frac{a^7}{2.3.4.5.6.7} \cdots$$
$$\pm \frac{a^{2n+1}}{2.3\ldots(2n+1)} \mp \frac{a^{2n+3}}{2.3\ldots(2n+3)}.$$

Remarque 2. Si, dans la formule

$$\cos a = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2},$$

on remplace $\sin\frac{a}{2}$ successivement par chacun des seconds membres des inégalités

$$\sin\frac{a}{2} < \frac{a}{2},\quad \sin\frac{a}{2} > \frac{a}{2} - \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^3}{2.3},$$
$$\sin\frac{a}{2} < \frac{a}{2} - \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^3}{2.3} + \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^5}{2.3.4.5},\ \text{etc.},$$

on obtiendra les relations

$$\cos a > 1 - \frac{a^2}{2},\quad \cos a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4},$$
$$\cos a > 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4} - \frac{a^6}{2.3.4.5.6},\ \text{etc.};$$

ce qui montre qu'on peut trouver ainsi autant de termes qu'on voudra de la série

$$\cos a = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4} \ldots\ldots \pm \frac{a^{2n}}{2.3.4\ldots 2n} \mp \frac{a^{2n+2}}{2.3.4\ldots(2n+2)}.$$

NOTE

Sur une démonstration des analogies de Néper.

—

Soient A, B, C, les trois angles d'un triangle sphérique ABC(*fig.* 37) et a, b, c, les côtés opposés, nous supposons $a > b$, il faut démontrer que

$$\sin\tfrac{1}{2}(a+b) : \sin\tfrac{1}{2}(a-b) :: \cot\frac{C}{2} : \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-B).$$

Je prends $CD = CA = b$, et le point M milieu de DB; il en résulte $CM = \frac{1}{2}(a+b)$, et $BM = \frac{1}{2}(a-b)$. Au point M j'élève sur BD l'arc perpendiculaire MP; puis, je divise en deux parties égales l'angle ACB, par l'arc CP qui rencontre MP, au point P. Ce point sera un des pôles du petit cercle passant par A, D, B; car l'égalité des triangles ACP, CPD, donne PA$=$PD; et d'ailleurs PD$=$PB. De plus, l'angle PBC$= 90^\circ - \frac{1}{2}$(A—B). En effet, les angles PAB, PBA étant égaux entre eux, on a : PAC — PBC $=$ A — B. Mais, PAC$+$ PBC$=180^\circ$, puisque PAC $=$ PDC et PBC $=$ PDB. Donc PBC $= 90^\circ - \frac{1}{2}$ (A—B).

Cela posé, les triangles rectangles PMC, PMB, donnent : Cotang PCM $=$ cotang PM $\times$ sin CM, cotang PBM $=$ cotang PM $\times$ sin BM. Donc, sin CM : sin. BM :: cotang PCM : cotang PBM, ou

$$\sin \tfrac{1}{2}(a+b) \cdot \sin \tfrac{1}{2}(a-b) :: \cot. \frac{C}{2} : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A-B)\ (^*).$$

On sait que les trois autres analogies se déduisent simplement de cette première. G.

DÉMONSTRATION

D'UN THÉORÈME SUR LES DÉVELOPPÉES DE L'ELLIPSE ET DE L'HYPERBOLE.

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des ponts et chaussées.

—

Soit une ligne droite mobile dans le plan d'un angle donné, de manière que la somme ou la différence des carrés des por-

(*) Cette démonstration diffère peu de celle que *Delambre* a donnée dans ses leçons d'astronomie; elle a été, toutefois, débarrassée de quelques considérations étrangères qui nuisaient à sa simplicité.

tions qu'elle intercepte sur les côtés demeure constante: les coordonnées, rapportées aux mêmes côtés, du lieu géométrique de ses intersections successives, étant multipliées respectivement par deux nombres déterminés, reproduisent celles d'une développée quelconque d'ellipse ou d'hyperbole.

Appelons ξ, η, les distances du sommet de l'angle aux points de rencontre de ses côtés avec la droite mobile, on aura, d'après l'énoncé même de la proposition,

$$\xi^2 \pm \eta^2 = \gamma^2, \qquad (1)$$

γ étant une longueur constante.

Prenons le sommet pour origine, l'équation de la génératrice sera, en désignant par x', y', ses coordonnées courantes,

$$\frac{x'}{\xi} + \frac{y'}{\eta} = 1. \qquad (2)$$

D'une position à l'autre de cette ligne, les paramètres ξ, η, changent à la fois et deviennent respectivement ξ', η'; et l'on a une nouvelle équation

$$\frac{x'}{\xi'} + \frac{y'}{\eta'} = 1, \qquad (3)$$

qui, combinée avec la précédente, donne les valeurs des coordonnées x', y', appartenant au point d'intersection des deux génératrices. L'on trouve facilement

$$x' = \frac{(\eta' - \eta)\xi\xi'}{\eta'\xi - \eta\xi'}, \quad y' = \frac{(\xi - \xi')\eta\eta'}{\eta'\xi - \eta\xi'}. \qquad (4)$$

Si l'on suppose que les différences $\xi - \xi'$, $\eta - \eta'$ s'évanouissent à la fois, les valeurs ci-dessus se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$. Cette indétermination tient à ce que les expressions dont il s'agit ont été établies indépendamment de toute relation particulière entre ξ et η. Il suffit pour la faire disparaître, d'avoir égard à l'équation (1), d'où l'on tire d'abord immédiatement, par sa comparaison avec $\xi'^2 + \eta'^2 = \gamma_1^2$,

$$\xi^2 \pm \eta^2 = \xi'^2 \pm \eta'^2,$$

puis, par une simple transposition de termes,

$$\xi^2 - \xi'^2 = \mp (\eta^2 - \eta'^2),$$

et, par la décomposition de chaque membre en facteurs,

$$(\xi - \xi')(\xi + \xi') = \mp (\eta - \eta')(\eta + \eta')$$

Au moyen de cette dernière égalité, après avoir mis le dénominateur commun de x', y' sous la forme

$$\xi(\eta' - \eta) - \eta(\xi' - \xi),$$

on obtient sans peine

$$x' = \frac{(\xi + \xi')\xi\xi'}{\xi(\xi + \xi') \pm \eta(\eta + \eta')}, \quad y' = \frac{(\eta + \eta')\eta\eta'}{\xi(\xi + \xi') \pm \eta(\eta + \eta')},$$

expressions dans lesquelles les signes supérieurs et inférieurs se correspondent.

Posant enfin $\xi - \xi' = 0$ $\eta - \eta' = 0$, il vient

$$x = \frac{\xi^3}{\xi^2 \pm \eta^2} = \frac{\xi^3}{\gamma^2}, \quad y = \frac{\eta^3}{\xi^2 \pm \eta^2} = \frac{\eta^3}{\gamma^2}. \qquad (5)$$

Les variables x, y, sont ici fonctions des variables ξ, η, dont l'élimination donne sur-le-champ

$$x^{\frac{2}{3}} \pm y^{\frac{2}{3}} = \gamma^{\frac{2}{3}}. \qquad (6)$$

Soient maintenant m, n, deux nombres inconnus : faisons dans cette dernière équation,

$$\alpha = mx, \quad \beta = ny, \qquad (7)$$

elle deviendra

$$\left(\frac{\alpha}{m}\right)^{\frac{2}{3}} \pm \left(\frac{\beta}{n}\right)^{\frac{2}{3}} = \gamma^{\frac{2}{3}}. \qquad (8)$$

D'un autre côté, l'on sait que l'équation

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}} \pm (b\beta)^{\frac{2}{3}} = (c^2)^{\frac{2}{3}}, \qquad (9)$$

dans laquelle a et b représentent les demi-axes d'une ellipse ou d'une hyperbole (a étant $>$ b dans le premier cas) et c la distance du centre au foyer, est, en coordonnées rectangulaires, l'équation de la développée (Voir le bel article de M. *Gerono*, sur les normales aux lignes du 2^e^ ordre, pages 16, 72, 170). Il sera toujours possible de rendre identiques les équations (8) et (9), moyennant une détermination convenable des nombres m, n; car il suffit de poser, pour obtenir ce résultat,

$$\frac{1}{m\gamma} = \frac{a}{c^2}, \qquad \frac{1}{n\gamma} = \frac{b}{c^2} \qquad (10)$$

ou, ce qui est la même chose,

$$m = \frac{c^2}{a\gamma}, \qquad n = \frac{c^2}{b\gamma}. \qquad (11)$$

Or, d'après ce qui précède, les coordonnées α, β, ne sont autre chose que les coordonnées x, y, multipliées respectivement par les nombres m, n, toujours réels et positifs, donc, etc. C. Q. F. D.

Corollaire. — Le théorème précédent, qui rattache à un principe unique la génération des développées, fait voir que toutes ces courbes peuvent se déduire de deux d'entre elles une fois construites; de la même manière que l'on déduirait toutes les ellipses et toutes les hyperboles d'une ellipse et d'une hyperbole données. Si même la construction de ces lignes venait à acquérir une importance pratique, rien n'empêcherait de former des tables des coordonnées des deux courbes représentées par la double équation

$$x^{\frac{2}{3}} \pm y^{\frac{2}{3}} = 1,$$

qui serviraient à calculer, par voie de multiplication, celles de toutes les développées.

Mais il y a plus, de telles tables existent, ce sont celles des sinus, cosinus et tangentes. Nommons en effet ψ un angle auxiliaire, l'on s'assurera que les expressions

$$x = \gamma \cos^3\psi, \quad y = \gamma \sin^3\psi,$$

ou

$$x = \gamma \operatorname{séc}^3\psi, \quad y = \gamma \operatorname{tang}^3\psi,$$

satisfont, à l'équation (6); les deux premières lorsque l'on prend le signe $+$, les deux autres dans le cas contraire. D'où il résulte que les valeurs

$$\alpha = \frac{c^2}{a}\cos^3\psi, \quad \beta = \frac{c^2}{b}\sin^3\psi,$$

$$\alpha = \frac{c^2}{a}\operatorname{séc}^3\psi, \quad \beta = \frac{c^2}{b}\operatorname{tang}^3\psi$$

satisfont aux équations des développées de l'ellipse et de l'hyberbole. L'application des tables de logarithmes aux formules ci-dessus, et leurs constructions graphiques sont trop simples pour insister sur ce sujet; nous nous bornerons à faire remarquer que, dans le cas où les axes des coordonnées sont rectangulaire, l'angle ψ n'est autre chose que l'angle aigu formé par la génératrice avec l'axe des x. Cette simple indication suffit pour montrer comment on a été conduit à faire usage de la variable auxiliaire ψ, car on peut construire les mêmes formules sur les données géométriques de ce cas particulier, et vérifier ensuite leur indépendance en ce qui concerne l'inclinaison des axes l'un sur l'autre.

Scolie. — Les courbes représentées par l'équation (6) pourraient être nommées, lorsque les axes forment un angle droit, les *développées équilatères* de l'ellipse et de l'hyperbole, bien qu'il soit impossible qu'une courbe de cette espèce puisse coïncider avec une développée d'ellipse, les facteurs m, n, étant *essentiellement inégaux*. L'hyberbole n'est point sujette à la même restriction ; la *développée équilatère* de cette courbe est au contraire toujours *la développée d'une hyperbole équilatère*. L'on peut en dire toutefois autant de l'ellipse, en regardant la développée équilatère de cette courbe comme la développée d'une circonférence de cercle ou *ellipse équilatère* dont le rayon serait infiniment grand.

L'on sait que tout point pris sur la droite mobile avec la condition que ses distances aux extrémités demeurent dans un rapport constant, décrit une ellipse lorsque la somme $\xi^2 + \eta^2$ reste invariable. Lorsque c'est la différence $\xi^2 - \eta^2$ qui ne change pas, le point dont il s'agit décrit une hyberbole, et, dans le cas d'axes rectangulaires, si le rapport des distances devient égal à l'unité, l'hyperbole, qui est alors équilatère, a précisément pour normale la droite mobile et par conséquent pour développée le lieu de ses intersections successives.

Cette circonstance remarquable, qui semble au premier abord n'avoir pas d'analogue dans la génération de l'ellipse, s'y retrouve. Cependant si l'on fait attention qu'il existe, en général, sur la génératrice, deux points tels que leurs distances à ses extrémités (désignées par les axes sur lesquels elles se trouvent), soient dans un rapport donné. Lorsque ce dernier devient égal à l'unité, l'un des points dont il s'agit est à l'infini, et décrit une courbe circulaire à laquelle la génératrice peut être regardée comme normale.

P. Breton.

Théorème à démontrer. — Étant donnés deux axes OY, OX, perpendiculaires entre eux, soient construits sur l'angle droit Y OX, autant de rectangles que l'on voudra OACB, OA′C′B′, OA″B″C″...., dont les côtés présentent la même différence de longueur ; si des sommets C, C′, C″.... on abaisse des perpendiculaires sur les diagonales AB, A′B′, A″B″...., opposées à l'angle commun O, et qu'on les prolonge suffisamment, elles iront toutes se couper en un même point.

P. B.

THÉORÈMES

Sur les polygones réguliers inscrits et circonscrits.

PAR M. MOURGUES,
Professeur au collége de Rhodez.

THÉORÈME 1. *Les lignes polygonales régulières inscrites dans un arc de cercle augmentent en périmètre avec le nombre des côtés.* Il en est de même des *aires comprises entre ces lignes et la corde qui joint les extrémités de l'arc.*

THÉORÈME 2. *Les lignes polygonales régulières circonscrites à un arc de cercle et terminées aux prolongements des rayons passant par les extrémités de cet arc, diminuent en périmètre avec le nombre des côtés.* Il en est de même *des aires comprises entre ces lignes et les rayons prolongés qui passent par les extrémités de l'arc.*

Les deux théorèmes précédents peuvent se déduire comme corollaires de deux autres théorèmes dont les énoncés suivent :

THÉORÈME 3. *Parmi les lignes polygonales d'un même nombre de côtés, inscrites dans un même arc de cercle, la plus grande est celle qui est régulière.*

THÉORÈME 4. *Parmi les lignes polygonales d'un même nombre de côtés, circonscrites à un même arc de cercle* *et terminées aux prolongements des rayons extrêmes, la plus petite est celle qui est régulière.*

Admettons pour un instant ces deux théorèmes.

Conséquence du troisième Théorème. Soit inscrite dans un arc de cercle une ligne polygonale régulière de n côtés. Si l'on remplace l'un des côtés par deux cordes, on aura une ligne polygonale irrégulière de $n+1$ côtés, laquelle sera évidemment plus grande que la précédente, et sera plus petite, en vertu du théorème troisième, que la ligne polygonale régulière de $n+1$ côtés. Donc, la ligne polygonale régulière de $n+1$ côtés est plus grande que celle de n côtés.

Conséquence du quatrième Théorème. Soit circonscrite à un arc de cercle et terminée aux prolongements des rayons extrêmes une ligne polygonale régulière de n côtés. Soient (fig. 38) AB, BC deux de ses côtés. Si dans l'angle ABC on mène une tangente EF et qu'on supprime les parties EB, BF, on aura une ligne de $n+1$ côtés, laquelle sera évidemment plus petite que la précédente; et sera plus grande, en vertu du quatrième théorème, que la ligne polygonale régulière de $n+1$ côtés; ce qui conduit à l'énoncé du deuxième théorème.

Démonstration du troisième Théorème. Soit (*fig.* 39) AB un arc de cercle dans lequel on inscrit deux cordes quelconques, AC, CB, qui font un angle constant indépendant de la position du point C. Si l'on prolonge AC d'une quantité $CD=CB$, et qu'on joigne DB, il résultera du triangle isocèle CBD que l'angle D est constant. Le lieu géométrique des points D est donc un segment de cercle AD'DB dont le centre est en O, point milieu de l'arc, car $OD'=OB=OA$. Par suite, le diamètre AD' est plus grand que la corde AD, ce qui donne

$$AO+OB > AC+CB,$$

inégalité qui démontre le théorème pour un polygone de deux côtés.

Cela posé, soit inscrite dans un arc de cercle une ligne polygonale de n côtés. Si elle n'est pas régulière, il y aura nécessairement quelque part deux côtés consécutifs inégaux; en leur substituant deux côtés égaux, la ligne augmentera de périmètre. Toute ligne irrégulière de n côtés peut donc être augmentée sans changer le nombre des côtés. Or, parmi toutes ces lignes, il y a un *maximum* : c'est donc la ligne polygonale régulière.

Démonstration du quatrième Théorème. Soit (*fig.* 40) AB un arc de cercle auquel je circonscris deux cordes quelconques ac, cb, terminées aux prolongements des rayons extrêmes. On sait que parmi les droites inscrites dans un angle, tangentiellement à l'arc intercepté, la plus petite est celle dont le point de contact coïncide avec le milieu de l'arc. Or, si, comme on le suppose, on n'a pas $ac = cb$, les points de tangence I et I' ne sont pas les milieux des arcs AC, CB. Donc, la ligne continue acb de la *fig.* 40 est plus grande que la ligne discontinue formée (*fig.* 41) des longueurs ac, $c'b$, M et M' étant les milieux des arcs AC, CB. Si, en second lieu, je prolonge ac en d, le triangle $cc'd$, dans lequel l'angle c est évidemment plus grand que c', donne $c'd > cd$; et si, à la somme $ac + c'd$, j'ajoute cd et que j'en retranche $c'd$, il viendra

$$ad + db < ac + c'b.$$

La ligne continue adb se trouve dans le même cas que la ligne acb de la fig. 40. Si donc C n'est pas le milieu de AB, c'est-à-dire si adb n'est pas une ligne régulière, on pourra trouver une ligne discontinue plus petite, et puis une ligne continue encore plus petite. Or, il y a un *minimum* parmi ces lignes continues et discontinues : c'est donc la ligne régulière; ce qui démontre le théorème pour le cas d'une ligne de deux côtés. Ce théorème se généralise absolument comme celui qui précède.

QUESTION D'EXAMEN.

Discussion d'une courbe.

PAR M. MIDY,
Ancien professeur dans les Colléges royaux.

On nomme points d'inflexion d'une courbe ceux où sa courbure change de sens et devient contraire. En ces points la tangente traverse la courbe et les deux parties voisines du point de contact ont par rapport à la tangente des convexités opposées. D'où il suit que si par le point d'inflexion on mène une sécante qui fasse avec la tangente un angle suffisamment petit, elle coupera ces deux parties chacune en un point, et si l'on fait tourner cette sécante sur le point de contact pour la ramener sur la tangente, à l'instant où l'un des deux points d'intersection se confondra avec le point de contact, l'autre point coïncidera pareillement avec lui.

On peut donc considérer ces points comme étant ceux où trois points d'intersection d'une droite avec une courbe se confondent en un seul. Il suit de là qu'une courbe doit être au moins du troisième degré pour avoir des points d'inflexion.

La recherche de ces points étant en général délicate et laborieuse, surtout quand on n'emploie que l'algèbre proprement dite ; nous allons appliquer à un exemple remarquable quelques-unes des méthodes dont on peut faire usage pour les trouver.

Soit l'équation

$$x^4 - x^2 - y^2 = 0. \qquad (1)$$

C'est le lieu des points que l'on obtient (*fig.* 42), en projetant continuellement l'intersection d'une tangente variable TP au cercle AB, avec l'axe AX, par une perpendiculaire à cet axe, sur le prolongement du rayon AT qui passe par le point de contact, le rayon du cercle étant pris pour unité.

Il est facile de voir que cette courbe symétrique par rapport aux deux axes AX, AY est composée de deux branches qui touchent le cercle donné aux extrémités du diamètre BB' et qui s'éloignent ensuite indéfiniment de l'axe des y.

En nommant φ l'inclinaison d'une tangente à cette courbe sur l'axe des x, on aura, par la méthode connue,

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}. \qquad (2)$$

Cette tangente toujours positive pour des valeurs de $x > 1$, devient infinie pour $x = 1$ et pour $x = \infty$.

Il suit de là que la tangente à la branche QBR, d'abord parallèle en B à l'axe des y, s'incline ensuite du côté des x positifs, pour redevenir à la limite perpendiculaire sur cet axe. Il y a donc inflexion sur cette branche entre le point B et les points extrêmes Q et R.

Une autre considération, qui d'ailleurs va servir à la détermination de ces points, nous conduira à la même conclusion.

Cherchons les points d'intersection de cette courbe avec une droite quelconque

$$y = ax + b, \qquad (3)$$

située dans son plan.

L'élimination de y conduit à l'équation suivante :

$$x^4 - (1 + a^2)\, x^2 - 2abx - b^2 = 0. \qquad (4)$$

Supposons que l'on ait pris sur la branche QBR deux points arbitraires M et N ayant des abscisses différentes ; le produit de ces abscisses sera positif. Mais on sait que l'équation (4) a au moins une racine réelle négative. Donc il y aura une quatrième racine réelle, qui sera positive, puisque le produit des quatre racines est négatif. La sécante MN aura donc un troisième point commun avec la première branche et un point seulement sur la seconde. Il y aura donc un point d'inflexion entre B et Q, et par suite il y en aura quatre symétriquement placés sur la courbe entière.

Pour chacun de ces points trois des racines de l'équation (4) sont égales. Déterminons a et b de manière que cette condition soit remplie.

Dans cette hypothèse, le polynôme (4) et son dérivé ont un diviseur commun du second degré, et en divisant le second par ce diviseur le reste devra être nul.

Le dérivé, égalé à zéro, donne

$$2x^3 - (1 + a^2)x - ab = 0. \qquad (5).$$

Si de (5) multipliée par x, on soustrait (4) multipliée par 2, on trouve

$$(1 + a^2)\,x^2 + 3\,ab\,x + 2b^2 = 0. \qquad (6).$$

Le premier membre de cette équation est donc le diviseur cherché, et en effectuant la division de (5) par (6), le reste du premier degré, égalé à zéro, donne les deux relations suivantes,

$$b^2\,(14\,a^2 - 4) - (1 + a^2)^3 = 0. \qquad (7)$$

$$12b^2 - (1 + a^2)^2 = 0. \qquad (8)$$

L'élimination de b^2 conduit à

$$a^2 = 8 \quad \text{et par suite} \quad b^2 = \frac{27}{4},$$

d'où $\qquad a = \pm 2\sqrt{2} \quad \text{et} \quad b = \pm \frac{3}{2}\sqrt{3}.$

En substituant ces valeurs dans l'équation (6), celle-ci devient

$$x^2 \pm x\sqrt{6} + \frac{3}{2} = 0,$$

ou $$\left(x \pm \frac{1}{2}\sqrt{6}\right)^2 = 0,$$

d'où $$x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{6}.$$

Il est aisé de s'assurer que cette racine est triple dans (4), et que la quatrième racine est $\mp\frac{3}{2}\sqrt{6}$, égale en signe contraire à la somme des trois autres, comme le veut l'équation. Les valeurs trouvées de x, substituées dans (1) donnent

$$y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Les quantités

$$a = 2\sqrt{2},\ b = \frac{3}{2}\sqrt{3},\ y = \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ et } x = \frac{1}{2}\sqrt{6} \text{ ou } = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

sont toutes faciles à construire géométriquement au moyen du rayon AB du cercle donné et déterminent complétement les points d'inflexion cherchés.

Deuxième méthode. Supposons que l'on ait transporté l'origine au point d'inflexion en laissant les axes parallèles à leurs directions primitives. Désignons par x' et y' les coordonnées de ce point, et cherchons les points d'intersection de la courbe avec une droite quelconque

$$y = mx, \qquad (2)$$

passant par le même point.

Représentons l'équation résultante par

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 = 0. \qquad (3)$$

L'on aura d'abord,

$$A_0 = 0,$$

puisque la nouvelle origine est un point de la courbe, et si l'on détermine m de manière que la droite (2) soit tangente, l'on aura de plus

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0,$$

puisque trois racines de l'équation (3) doivent être nulles à la fois.

Or la transformation que nous avons fait subir à l'équation (1) (page 232) revient à y changer simultanément x en $x' + x$ et y en $y' + m\,x$.

Il suit de ce qui précède que A_0 sera égal à

$$x'^4 - x'^2 - y'^2;$$

que A_1, sera la somme de la dérivée de ce polynôme prise par rapport à x et de la dérivée, prise par rapport à y et multipliée par m, et que A_2 se déduira de A_1, suivant la même loi.

L'on aura donc les deux équations suivantes :

$$2x'^3 - x' - y'm = 0, \tag{4}$$
$$6x'^2 - 1 - m^2 = 0. \tag{5}$$

En éliminant m, il viendra

$$2x'^4 - 3x'^2 = 0,$$

ou, omettant le facteur x'^2,

$$2x'^2 - 3 = 0,$$

d'où
$$x' = \pm \frac{1}{2} \sqrt{6}.$$

comme on l'a trouvé précédemment.

L'équation (4) conduit à $m = \dfrac{2x'^3 - x'}{y'}$,

ou bien
$$m = \frac{2x'^2 - 1}{\sqrt{x'^2 - 1}}; \tag{6}$$

valeur indiquée précédemment.

L'abscisse correspondante à la valeur minimum de ce coefficient angulaire sera celle du point d'inflexion cherché.

Pour trouver cette valeur minimum, élevons au carré les deux membres de l'équation (6) et chassons le dénominateur, il viendra

$$4x^4 - (4 + m^2)\, x^2 + m^2 + 1 = 0. \qquad (7)$$

Considérant x comme l'inconnue et résolvant, la quantité sous le signe radical, sera

$$m^2 - 8.$$

En l'égalant à zéro, l'on aura

$$m^2 = 8\,,$$

valeur qui s'accorde avec le résultat

$$a^2 = 8\,,$$

donné par la première méthode.

En le portant dans (7) l'équation résultante

$$4x^4 - 12x^2 + 9 = 0\,,$$

pourra se mettre sous la forme

$$(2x^2 - 3)^2 = 0\,,$$

et donnera encore

$$x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{6}\,,$$

pour l'abscisse des points cherchés.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 36 (tome I, p. 395).

Propriétés des rayons vecteurs dans l'ellipse et l'hyperbole.

PAR M. YVON (LOUIS),
Elève du Collége royal Charlemagne.

—

Un demi-diamètre d'une ellipse ou d'une hyperbole est moyen proportionnel entre les rayons vecteurs menés des foyers à l'extrémité du demi-diamètre conjugué.

Soient OD, OD′ (*fig.* 44), deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse; x', y', les coordonnées du point D. L'équation de OD′ sera $y = -\frac{b^2x'}{a^2y'}x$, en nommant a, b, les demi-axes de l'ellipse que l'on suppose rapportée à ses axes. On aura les coordonnées y, x, du point D′, en résolvant les équations

$$y = -\frac{b^2x'}{a^2y'}x, \text{ et } a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Ce qui donne

$$x = \sqrt{a^2 - x'^2}, \text{ et } y = -\frac{bx'}{a}.$$

Par suite :

$$\overline{OD'}^2 = x^2 + y^2 = a^2 - \frac{c^2x'^2}{a^2} = \left(a - \frac{cx'}{a}\right)\left(a + \frac{cx'}{a}\right).$$

Mais $\left(a - \frac{cx'}{a}\right), \left(a + \frac{cx'}{a}\right)$ sont les rayons vecteurs DF′, DF, menés du point D, aux foyers F′, F. Donc $\overline{OD'}^2 = \overline{DF'} \times \overline{DF}$.

Cette propriété, qui est également vraie pour l'hyperbole, se démontrerait de la même manière ; elle conduit à une démonstration très-simple du théorème suivant : *la normale et la tangente menées par un point d'une conique interceptent sur un axe principal, une longueur égale au produit des rayons vecteurs, passant par ce point, divisé par la distance du point au second axe. Dans la parabole, cette longueur est égale au double du rayon vecteur* (tome I, p. 395).

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une ellipse (*fig.* 44). Soit DH, la normale menée par le point D ; PDK la tangente ; et DG une perpendiculaire sur l'axe OC. Je dis qu'on aura DG × HK = FD × F′D. En effet, les deux triangles semblables PDG, HDK donnent la proportion DG : DK :: PD : HK; d'où DG × HK = DK × PD. Mais, d'après une propriété connue, on a $DK \times PD = \overline{OD'}^2$; le demi-diamètre OD' étant supposé parallèle à la tangente PDK. Donc,

$$DG \times HK = \overline{OD'}^2 = FD \times F'D.$$

Cette propriété, qui se démontrerait de même pour l'hyperbole, serait facile à modifier, si la perpendiculaire DG, était abaissée sur l'autre axe.

Passons maintenant à la parabole (*fig.* 45).

Je dis que $HK = 2FD$; le point D est un point quelconque de la parabole, F le foyer, EDK la tangente au point D, DH la normale, et KH l'axe.

En effet, on sait que $DF = KF$. Par le point D je mène le diamètre DA. Alors, l'angle $EDA = KDF$; donc,

$$FDH = HDA = DHF.$$

Par conséquent, le triangle DHF est isocèle, et $FD = FH$. Ce qui donne $KH = 2FD$. Le principe est donc démontré.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME

Sur les polygones réguliers,

PAR M. BERTOT (H.),
Elève du Collége royal Louis-le-Grand.

—

La différence des surfaces de deux polygones réguliers de 2n *côtés, l'un inscrit et l'autre circonscrit à un cercle, est moindre que le quart de la différence des surfaces des polygones réguliers de* n *côtés, inscrit et circonscrit au même cercle.*

Soient AB , CD (*fig.* 43), les côtés des polygones réguliers de n côtés. Le rayon OI est perpendiculaire sur le milieu de AE, la droite AK est perpendiculaire sur OE ; donc, si l'on joint le point E au point H d'intersection de OI , et AK , la droite EH sera perpendiculaire au point M sur OA, puisque les trois hauteurs du triangle OAE se coupent en un même point.

La différence ABCD des triangles COD, AOB, sera la $n^{ième}$ partie de la différence des polygones de n côtés. La différence des surfaces de ces deux polygones sera

$$n\,.\,\mathrm{ABCD} = 2n\,.\,\mathrm{AKEC} = 2n\,.\,\mathrm{CEM}\,,$$

car les triangles rectangles AEM, AEK sont égaux.

La différence des surfaces des polygones de $2n$ côtés sera égal à

$$2n\,.\,\mathrm{AEFG} = 2n\,.\,\mathrm{AEN} = 2n\,.\,\mathrm{HEN}.$$

Il s'agit donc de démontrer que $\mathrm{HEN} < \frac{1}{4}\,.\,\mathrm{CEM}$.

Or, si l'on mène par le point L milieu de EA , une parallèle à AC , et terminée à la rencontre des droites EA , EM , il en résultera un triangle dont la surface sera égale à $\frac{1}{4}$ CEM, et qui sera plus grande que celle du triangle NEH. Car, le point L est sur la bissectrice EA de l'angle CEM, et l'on sait que de tous les triangles formés par des droites menées par un point de la bissectrice d'un angle et terminées aux côtés de cet angle, le minimum est le triangle isocèle. Ainsi, le triangle NEH est plus petit que le quart de CEM. C'est ce qu'il fallait démontrer.

DÉMONSTRATION TRÈS-ÉLÉMENTAIRE

De la proposition de Dynamique, connue sous le nom de **Conservation du mouvement du centre de gravité.**

PAR M. FERRIOT,
Recteur honoraire de l'académie de Grenoble.

—

Cette proposition s'énonce ainsi :

« Le centre de gravité d'un système de corps dont chacun » se meut uniformément et en ligne droite, d'une manière » quelconque dans l'espace, se meut lui-même uniformé- » ment et en ligne droite, et la vitesse est exprimée par la » résultante divisée par la masse entière du système. »

En effet, soit un quadrilatère plan ou gauche ABCD dont les côtés AB et CD sont entre eux comme $p : q$; supposons en A un mobile dont la masse est a parcourant uniformément AB, dans le même temps qu'un autre mobile dont la masse est b, placé en D parcourt uniformément DC, et partageons les côtés AD et BC chacun en deux parties, de manière qu'on ait (*fig.* 48)

$$\mathrm{AF} : \mathrm{FD} :: b : a \qquad \text{et} \qquad \mathrm{BE} : \mathrm{CE} :: b : a.$$

Supposons actuellement que les mobiles a et b se mettent en mouvement, et parviennent après l'unité de temps, l'un en G et l'autre en H, de manière qu'on ait

$$\mathrm{AG} : \mathrm{DH} :: p : q.$$

La droite GH coupera la droite EF (*), et cette intersection

(*) Voyez la Géométrie de Legendre, 12e édition, page 147.

aura lieu entre le point F et le point E. Si on remarque actuellement que le centre de gravité des masses a et b partage les droites AD et GH, et toutes leurs analogues, chacune en deux parties qui sont toujours dans le même rapport $b : a$, on verra que le centre de gravité g de ces deux mobiles parcourt uniformément la droite EF.

Supposons un troisième mobile dont la masse est c, placé partout où l'on voudra, parcourant encore uniformément une ligne droite de direction quelconque, on verra, comme précédemment, que le centre de gravité g, des mobiles a et b, combiné avec le troisième mobile c, donnera lieu à un nouveau centre de gravité g', parcourant uniformément une autre ligne droite analogue à EF.

Ce raisonnement pouvant s'étendre à tant de mobiles qu'on voudra, *la première partie du principe énoncé est démontrée.*

Venons maintenant à la vitesse du centre de gravité, qui est évidemment représentée par EF, quand on ne considère que les deux mobiles a et b.

Pour calculer cette ligne, représentons par 1 l'unité de force qui transporte l'unité de masse sur l'unité de ligne ; les forces qui, dans le même temps, transportent a sur AB, b sur CD et $(a+b)$ sur EF seront représentées par $a.\mathrm{AB}$, $b.\mathrm{CD}$ et $(a+b)\,\mathrm{EF}$; or, les forces $a.\mathrm{AB}$ et $b.\mathrm{CD}$, appliquées l'une en A et l'autre en D, produisent le même effet que si elles étaient transportées parallèlement à elles-mêmes au point F ; donc la ligne EF prise $(a+b)$ fois est la diagonale du parallélogramme dont les côtés sont AB pris a fois et CD pris b fois ; donc enfin, en divisant ces trois forces par $(a+b)$, on voit que EF est la diagonale d'un parallélogramme dont les composantes sont respectivement parallèles aux côtés AB, DC et égales l'une à $\frac{a.\mathrm{AB}}{a+b}$, l'autre à $\frac{b.\mathrm{CD}}{a+b}$, la résultante étant $(a+b).\mathrm{EF}$, et la vitesse EF, cette vitesse est donc égale à la résultante divisée par la somme des masses (*).

Voilà donc la seconde partie du principe énoncé démontrée.

Remarque I. Chaque force que nous avons supposée, pouvant être considérée comme la résultante de tant de forces qu'on voudra, on peut concevoir que ces dernières se groupent de toutes les manières possibles, pour former de nouvelles résultantes partielles qui conduiront toujours à la même résultante générale ; ainsi, les solides pourront se heurter, sans que la proposition dont il s'agit cesse d'avoir lieu.

Remarque II. Si le système des corps en mouvement se réduit à deux, la ligne droite qui les joint et qui contient nécessairement leur centre de gravité, décrit un paraboloïde hyperbolique, car cette ligne GKH reste constamment parallèle à un même plan en glissant sur les directrices AB et DC, comme cela est évident d'après la nature de son mouvement.

Remarque III. Si on considère les trois lignes AB, CD, EF, ainsi que la figure (48) qu'elles concourent à former abstraction faite de toute idée de force, de masse et de vitesse, on sera conduit à un *théorème* qui renferme comme cas particulier cette proposition très-connue, savoir : Dans tout trapèze, la ligne menée à égales distances des deux bases est égale à la demi-somme de ces bases.

En effet, posons $a=b$, et imaginons AB parallèle à CD ; la diagonale EF sera, alors, égale à la somme des composantes $\frac{a.AB}{a+b}$ et $\frac{b.CD}{a+b}$ qui se réduisent à $\frac{AB}{2}$ et $\frac{CD}{2}$ et donnent pour EF, $\frac{AB+CD}{2}$.

Le théorème dont il s'agit a donc pour énoncé :

« Si dans un quadrilatère quelconque plan ou gauche, on

(*) Lorsque la résultante est un couple, le centre de gravité reste en repos. Tm.

» partage deux côtés opposés AD et BC, par exemple, chacun
» en deux parties, de manière qu'on ait

$$AF : FD :: BE : EC :: b : a.$$

» La ligne EF sera la diagonale d'un parallélogramme » ayant pour côtés $\frac{a.AB}{a+b}$ et $\frac{b.CD}{a+b}$, l'un parallèle à AB, » l'autre à CD, ou autrement faisant entre eux même angle » que les côté AB et CD. »

SOLUTION DE LA QUESTION 49 (page 520, tome I).

PAR M. ROCHE,
Professeur de l'artillerie navale.

Problème.

Déterminer les racines réelles de l'équation

$$2(1 - \cos x) = x \sin x.$$

Pour résoudre cette équation, il faut la ramener à une forme plus simple, en faisant $x = 2z$, ce qui donne

$$\cos x = 1 - 2\sin^2 z, 1 - \cos x = 2 \sin^2 z, \sin x = 2 \sin z \cos z.$$

Substituant ces valeurs et réduisant, l'équation deviendra $\sin z = z \cos z$, ou, en divisant par $\cos z$,

$$(1) \qquad \tang z = z.$$

Il est évident que si l'on ne considère que des arcs moindres que deux angles droits, il n'y a qu'une solution possible $z = 0$, ou $x = 0$; mais comme tous les arcs qui diffèrent d'un nombre exact de demi-circonférences ayant des tangentes égales à celles des arcs simples, peuvent satisfaire à la question, si, au lieu de z, on substitue $u + n\pi$, u désignant un arc plus petit que le quadrant et n un nombre entier quelconque, on aura, en substituant la valeur $z = u + n\pi$, l'éqtion générale

$$(2) \qquad \text{tang}\, u - u = n\pi = \text{F}\,(u).$$

Cette équation indéterminée fait voir que le problème a une infinité de solutions correspondantes aux valeurs entières et positives de n. Pour résoudre l'équation, je prendrai pour valeur approchée de u, une valeur u' déterminée par l'équation $\text{tang}\, u' = \frac{(2n+1)\pi}{2}$; u' sera plus grand que u, et je déterminerai la quantité δ qu'il faudra retrancher de u' pour avoir u par l'équation

$$\delta = \frac{\text{F}u' - n\pi}{\text{F}'u'} = \frac{\text{F}u' - n\pi}{\text{tang}^2\, u'},$$

Car, en désignant par $\text{F}u' = \text{tang}\, u' - u'$, on a,

$$\text{F}'u' = \frac{d\,(\text{F}u')}{du'} = \text{tang}^2 u', \text{ et } \text{F}u = \text{F}(u' - \delta) = n\pi = \text{F}u' - \delta\text{F}'u' + \text{etc.}$$

En négligeant dans le développement les termes affectés des puissances supérieures de u', on déduit la valeur de δ.

Premier cas. $n = 1$.

Dans ce cas, l'équation (2) devient $\text{tang}\, u \quad u = \pi$. Une première approximation donne $\text{tang}\, u' = \frac{3}{2}\pi$, dont le logarithme 0,6732421 répond à un arc $u' = 78°1'9'' = 280869''$. Cet arc, évalué d'après la longueur de l'arc d'une seconde, donne $u' = 1{,}361692$, $\text{F}u' - \pi = 0{,}209108$. On en déduit

$$\delta = 0{,}009417\,,$$

et par suite,

$$u' - \delta = 1{,}352275.$$

Cette valeur approchée de l'arc réduite en secondes, donne 77°28'47''. Prenant pour u' cette nouvelle valeur, on en déduit $Fu'-\pi=0{,}0092986$ et $\delta=0{,}000459$ et $u=1{,}351816$. Cette valeur, réduite en secondes, donnera $u=77°27'12''$, et $Fu=3{,}141569$, qui diffère très-peu, comme on voit, de la valeur de $\pi=3{,}141592$.

Second cas. $n=2$.

L'équation (2) devient $\tang u - u = 2\pi$. La première approximation donne $\tang u' = \frac{\delta}{2}\pi$. Elle répond à un arc de $82°44'38''$, dont la longueur est $1{,}444153$. On a

$$Fu' - 2\pi = 0{,}126647, \text{ et } \delta = 0{,}002053,$$

et par suite

$$u' - \delta = 1{,}4421.$$

Cette valeur approchée répond à un arc de $82°37'34''$. En la prenant pour u', on aura $Fu' - 2\pi = 0{,}001856$, et $\delta = 0{,}000031$ et $u' - \delta = 1{,}442069$. Cette valeur correspond à un arc de $82°37'28''$. Une dernière approximation donnera $u = 82°37'27''$.

Troisième cas. $n=3$.

L'équation (2) devient $\tang u - u = 3\pi$. La première approximation donne $\tang u' = \frac{7}{2}\pi$. Elle répond à un arc de $84°48'13''$, dont la longueur $u'=1{,}480102$. On a

$$Fu' - 3\pi = 0{,}0906932, \ \delta = 0{,}000750,$$

et par suite,

$$u' - \delta = 1{,}479352.$$

Cette valeur répond à un arc de $84°45'38''$, valeur approchée de l'arc u à une seconde près.

Quatrième cas. $n=4$.

L'équation générale devient $\tang u - u = 4\pi$. La première approximation donne

$\tang u' = \frac{9}{2}\pi$, $u' = 85^\circ 7' 14''$, $Fu' - 4\pi = 0{,}07065$, $\delta = 0{,}0003535$,

et par conséquent

$$u' - \delta = u = 1{,}4997265,$$

et en degrés

$$u = 85^\circ 56' 1''.$$

C'est la valeur de l'arc, à une seconde près.

Résumé.

Des valeurs de u, on déduira celles de $z = u + n\pi$ et celles de $x = 2z$, et l'on aura pour les cas examinés,

$$\begin{cases} u = 77^\circ 27' 12'', & x = \text{circ} + 154^\circ 54' 24'' \\ u = 84^\circ 45' 38'', & x = 3\text{circ} + 169^\circ 31' 16'' \end{cases}$$
$$\begin{cases} u = 82^\circ 37' 27'', & x = 2\text{circ} + 165^\circ 14' 54'' \\ u = 85^\circ 56' 1'', & x = 4\text{circ} + 171^\circ 52' 2'' \end{cases}$$

Les valeurs de u, comprises dans la première accolade, répondant aux valeur impaires de n, donnent des arcs z, compris dans le troisième quadrant ; les autres, qui répondent aux valeurs paires de n, donnent des arcs qui diffèrent de u d'un nombre entier de circonférences et qui se trouvent dans le premier quadrant. Pour les valeurs $n = 5, 6$, etc., on aura par une première approximation, les valeurs de u, à quelques secondes près.

Nota. Cette question a été aussi résolue par Euler, *Introd. ad. analy.*, tom. II, ch XXII, prop. 9. Il y parvient par une voie plus longue, par le développement en séries.

Nous donnerons les valeurs trouvées par Euler dans un article spécialement consacré à toutes les principales valeurs numériques, formules et séries algébriques relatives au cercle et à la circonférence. Tm.

THÉORÈME DE DESCARTES.

I. *Observation essentielle.* Dans tout ce qui suit, les polynômes sont à une seule variable, entiers, à coefficients réels rationnels, et le coefficient du premier terme est positif; les polynômes sont ordonnés suivant l'ordre descendant.

II. Lemme 1. Le nombre des variations que renferme un polynôme est pair ou impair, selon que le dernier terme est positif ou négatif, et réciproquement.

Démonstration. 1er cas. Le dernier terme est *positif :* pour l'objet qu'on a en vue, on peut toujours considérer les termes successifs de même signe comme ne formant qu'un seul terme, et ensuite décomposer chaque terme positif, les deux extrêmes exceptés, en deux autres aussi positifs; alors le polynôme devient une réunion de trinômes de la forme $+-+$; chaque trinôme a deux variations, donc le total des variations est pair.

2e *cas.* Le dernier terme est *négatif:* raisonnant de la même manière, on aura un certain nombre de ces trinômes, plus le binôme terminal $+-$; le nombre total des variations est donc impair.

Ces deux cas démontrés, la réciproque est évidente.

Corollaire. Un polynôme qui n'a aucune racine positive, a nécessairement un nombre pair de variations; car, d'après un théorème connu, le dernier terme d'un tel polynôme est positif, donc.....

Observation. Le nombre pair comprend le zéro, ici et dans ce qui suit.

III. Lemme 2. Un polynôme en x, étant multiplié par le facteur linéaire $x-\alpha$, où α représente une quantité essentiellement positive, le produit acquiert nécessairement et *au moins* une variation de plus.

La démonstration est dans tous les traités élémentaires.

Corollaire. Un polynôme en x étant multiplié par $x-\alpha$, acquiert en plus un nombre *impair* de variations; car le dernier terme du polynôme est de signe opposé au dernier terme du produit; donc, si le nombre des variations de l'un est pair, celui de l'autre est impair, et réciproquement (lemme 1); donc la différence est impaire.

IV. Lemme 3. Le nombre des variations d'un polynôme moins le nombre de ses racines positives donne toujours une différence paire.

Démonstration. 1^er^ *cas.* Le nombre des racines positives est *pair* : décomposons le polynôme en facteurs linéaires; faisant le produit des facteurs linéaires, correspondant aux racines imaginaires et aux racines négatives seulement, on obtient un polynôme réel, ayant un nombre pair de variations (lemme 1, *corol.*); chaque facteur linéaire correspondant a une racine positive introduit un nombre impair de variations; mais comme le nombre des racines positives est pair, le nombre des variations introduites est pair; le nombre total des variations est donc pair; donc.....

2^e^ *cas.* Le nombre des racines positives est *impair* : raisonnant de la même manière, on en déduit que le nombre total des variations est impair; donc.....

V. *Définitions.* Nous appellerons une *lacune paire*, deux termes *successifs* entre lesquels manque un nombre pair de termes. Lorsque ce nombre est zéro, la lacune devient nulle, et les termes sont *consécutifs*; une *lacune impaire* est formée par deux termes entre lesquels manque un nombre impair de termes; lorsqu'une lacune paire forme une permanence, nous dirons pour abréger que c'est une permanence à lacune paire, et ainsi des autres.

VI. Dans une lacune impaire, les exposants des deux termes successifs sont tous deux pairs ou tous deux impairs; dans une lacune paire, des deux exposants, l'un est pair et l'autre impair.

VII. Dans une lacune impaire, permanence ou variation, si l'on remplace x par $-x$, la permanence et la variation ne changent pas; mais si la lacune est paire, la permanence devient une variation, et la variation une permanence; conséquence immédiate de l'énoncé précédent (VI).

VIII. *Notation.* m, degré du polynôme; T, nombre des termes du polynôme; t, nombre des termes manquants; v, nombre total de variations; v', nombre de variations répondant à des lacunes impaires; v'', nombre de variations répondant à des lacunes paires ou nulles; p, nombre total des permanences; p', nombre de permanences répondant à des lacunes impaires; p'', nombre de permanences répondant à des lacune paires ou nulles; O, nombre des racines positives; N, nombre des racines négatives; I, nombre des racines imaginaires.

Observation. Tous ces nombres sont évidemment entiers et positifs.

IX. *Équations.* $m = \mathrm{T} + t - 1 = \mathrm{O} + \mathrm{N} + \mathrm{I}$ (1)

$$\mathrm{T} = p + v + 1 \quad (2)$$

$$v = v' + v'' \quad (3)$$

$$p = p' + p'' \quad (4)$$

$$\mathrm{O} = v - z \quad (5)$$

$$t = p' + v' + z' \quad (6)$$

$$\mathrm{N} = v' + p'' - z'' \quad (7)$$

$$\mathrm{I} = 2p' + z + z' + z'' \quad (8)$$

z, z', z'' sont des quantités entières, positives; paires ou nulles.

X. Les quatre premières équations sont évidentes; la cinquième n'est autre que la transcription du lemme 3; chaque lacune impaire annonçant au moins un terme manquant, rend évidente l'équation (6); t et $p'+v'$, sont simultanément pairs ou impairs, donc z' est pair. En remplaçant dans le polynôme x par $-x$, le nombre des variations du second polynôme est $v'+p''$ (VII); mais les racines positives du second polynôme sont les racines négatives du premier polynôme changées de signe; l'équation (7) n'est donc que l'équation (5) appliquée au second polynôme.

Les équations (1) et (2) donnent $p+v+t=\text{O}+\text{N}+\text{I}$; mettant au lieu de O, N et t, leurs valeurs, on obtient l'équation (8).

XI. Les racines imaginaires sont toujours en nombre pair; c'est ce qu'indique l'équation (8).

XII. L'équation (8) donne cet énoncé : Il y a toujours et au moins autant de couples de racines imaginaires que de permanences répondant à des lacunes impaires.

XIII. Si toutes les racines sont réelles, on a $\text{I}=0$, et par conséquent $p'=z=z'=z''=0$; donc, $\text{O}=v$; $\text{N}=v'+p$. Ainsi, dans ce cas, le nombre des racines positives est égal à celui des variations, et le nombre des racines négatives est égal au nombre des permanences, plus le nombre des variations à lacunes impaires.

Or $t=v'$; il s'ensuit qu'aucune lacune ne peut provenir de plus d'un terme manquant; donc lorsqu'il manque un terme entre une permanence, ou au moins deux termes entre une variation, l'équation a toujours des racines imaginaires.

XIV. Si toutes les racines sont réelles, et si de plus l'équation est complète, il y a autant de racines positives que de variations, et autant de racines négatives que de permanences, parce que, dans ce cas, on a aussi $v'=0$; donc $\text{N}=p''=p$.

XV. Si l'équation est complète, le nombre des racines négatives ne peut jamais dépasser le nombre des permanences, car, dans ce cas, l'équation (7) devient $\text{N}=p-z''$; si l'équation est incomplète, il faut remplacer les termes manquants par des coefficients nuls.

XV. *Note historique.* Le discours sur *la méthode* a paru en juin 1637 (*). Cette immortelle production a été considérée comme la logique du système de notre illustre philosophe, qui a appliqué sa méthode de raisonner à trois objets 1° la dioptrique, 2° les météores, 3° la géométrie. Les équations n'étant, logiquement appréciées, qu'une suite de syllogismes, des espèces de *sorites,* il applique la théorie des équations à l'explication et à la recherche, à l'exégèse, et à la zététique, comme disait Viète, des propriétés de l'espace ; marche qui a été adoptée et suivie par Newton et Euler, et qui a été abandonnée, au détriment de la science, ce me semble, par les auteurs des traités modernes. Car, l'application de l'algèbre à la géométrie, autrement, la résolution des problèmes de géométrie, par les procédés algébriques, est antérieure à Descartes ; ce qui appartient spécialement à l'illustre géomètre, c'est l'interprétation géométrique des propriétés des équations, quant aux racines, quant aux coefficients. C'est dans sa géométrie que Descartes énonce, sans démonstration, ce qu'on est convenu d'appeler la *règle des signes;* il s'exprime ainsi : « On connoît de ceci combien *il peut* y avoir de racines vrayes et combien de fausses en chaque équation, à sçavoir, *il y peut* avoir autant de vrayes que les signes + et — s'y trouvent de fois être changés et autant de fausses qu'il s'y trouve de fois deux signes + ou deux signes moins qui s'entresuivent. »

En 1631 avait paru l'algèbre de Harriot (Thomas) (**) publiée par son ami Walter Warner sous le titre : *Artis analyticæ*

(*) Descartes (René), né à la Haye (Touraine) le 31 mars 1596; mort à Stockholm le 11 février 1650. Les deux éditions latines de la géométrie de Descartes, par F. Schooten, sont de 1649 et 1659.

(**) Harriot, (Thomas), né à Oxford en 1560 ; mort à Londres le 2 juillet 1621.

praxis ad æquationes algebraïcas nova, expedita, et generali methodo resolvendas. — Le célèbre Anglais considère les équations comme le produit de facteurs linéaires, et déduit de là des relations entre les racines et les coefficients ; il est certain que si Descartes a eu connaissance de cet ouvrage, il a pu y puiser, par voie d'induction, sa règle des signes ; aussi un Anglais, lord Cavendish, ayant montré cette algèbre à Roberval, homme d'un mauvais caractère, celui-ci ne manqua pas d'accuser Descartes d'abord d'un plagiat et ensuite d'avoir donné une règle fausse, de s'être emparé d'une erreur ; ce qui serait à la fois une mauvaise action et une bévue. Pour établir l'erreur, Roberval suppose que Descartes dit d'une manière absolue qu'il y a *toujours* autant de racines positives que de variations et autant de racines négatives que de permanences ; et il communiqua à l'Académie des Équations où la règle de Descartes était en défaut ; chose très-facile et manifeste. Retiré au fond de la Hollande, Descartes apprit tard cette perfidie, et, six mois avant sa mort, il écrit à son ami de Carcavi : « Sa seconde objection est une fausseté manifeste ; car, je n'ay pas dit, dans la page 373 (*de sa géométrie*) ce qu'il veut que j'aye dit, à sçavoir, qu'il y a autant de vrayes racines que les signes + et — se trouvent de fois être changez, ny n'ay eu aucune intention de le dire. J'ai dit seulement qu'il y en peut avoir ; et j'ay montré expressément dans la page 380, quand c'est qu'il n'y en a pas tant, à savoir, quand quelques-unes de ces vrayes racines sont imaginaires. » (La Haye (Hollande), 17 août 1699, lettre 77, tome 3.) Quant à l'accusation de plagiat, on peut s'en rapporter au célèbre Wallis (Jean) (*), qui a composé une algèbre historique et pratique, où il donne une longue analyse de l'ouvrage de Harriot, et enthousiaste de cet auteur, comparant ses travaux à

(*) Wallis (Jean), né à Ashford le 23 nov. 1616 ; mort à Londres le 28 oct. 1703 ; précurseur du calcul intégral.

ceux de Descartes, il trouve que le géomètre français a emprunté ou a pu emprunter trente articles divers à son compatriote; mais quant à la règle des signes : *Hanc regulam agnosco in Harrioto non haberi. Cartesianum utique hoc est. Sed falsam est. Habetque Harriotus regulas certiores* (*Algebra*, tome II, page 215, traduction latine de 1693). Les règles *certiores* de Harriot sont insignifiantes et ne se rapportent qu'à des cas particuliers des quatre premiers degrés et le *falsum* est dans le genre de Roberval ; il pose cette équation $x^4+6x^3+111x^2+1993x+35878=0$; et l'ayant multipliée par $x-18$; il vient $x^5-12x^4+3x^3-5x^2+4x-645804=0$; or, dit-il, selon la règle de Descartes, la première équation aurait 4 racines négatives et la seconde 5 racines positives ; ce qui est d'une fausseté évidente ; mais il est évident également que cette prétendue régle n'est pas celle de Descartes.

Ce n'est qu'en 1741, qu'on a donné une démonstration de la règle de Descartes et on la doit à l'abbé Gua (de Malves) Jean-Paul (*). Son mémoire inséré cette année dans ceux de l'Académie des sciences, porte pour titre : *Démonstrations de la règle de Descartes pour connaître le nombre des racines positives et négatives dans les équations qui n'ont pas de racines imaginaires.* Il en donne deux démonstrations ; la première est fondée sur ces deux théorèmes : 1° une équation n'ayant que des racines réelles, si on écrit au-dessous une progression arithmétique quelconque ayant pour raison —1, en allant de droite à gauche, multipliant chaque coefficient par le terme correspondant, on obtient une nouvelle équation dont les racines sont réelles; ce qu'on peut démontrer à l'aide du théorème de Rolle; 2° dans une équation n'ayant que des racines réelles, le carré d'un coefficient quelconque est tou-

(*) Né à Carcassonne en 1712 et mort à Paris en 1786, ayant spéculé sur des mines d'or, dans un état voisin de l'indigence.

jours plus grand que le produit des deux coefficients voisins à droite et à gauche ; ce théorème est de Gua et est un corollaire du premier ; on en trouvera une démonstration plus bas.

La seconde démonstration est fondée sur la considération d'une courbe de genre parabolique ; les propriétés de ces courbes ont servi au même auteur à déterminer le nombre des racines imaginaires ; ses principes ont dirigé depuis les travaux de M. Cauchy et de Fourier ; nous en parlerons en traitant du théorème de ce dernier géomètre. Depuis on a donné plusieurs autres démonstrations ; la plus simple est celle de Segner (*) : elle consiste simplement, dit Lagrange, à faire qu'en multipliant une équation quelconque par $x-a$ on augmente d'une unité le nombre des variations de signe, et qu'en la multipliant par $x+a$, on augmente aussi d'une unité le nombre des permanences, quelle que soit la valeur des coefficients de l'équation (Résolution des équations numériques, note VIII). La première partie de cette proposition est toujours vraie, mais la seconde exige que l'équation soit complète. C'est ce que met d'ailleurs en évidence la multiplication de $x-a$ par $x+a$. Aussi le théorème n'a été énoncé d'une manière suffisamment exacte qu'en 1832, dans l'excellente algèbre de Mayer et Choquet (XIII) ; de là cet énoncé a passé dans tous les traités qui ont aussi admis avec quelques modifications la démonstration de Segner, copiée dans le complément des éléments d'algèbre de M. Lacroix, vénérable doyen des membres de l'académie, le géomètre le plus savant, le plus lettré de France, excellent écrivain dont les ouvrages, propageant les méthodes de l'école de Lagrange, ont régénéré, depuis un demi-siècle, l'enseignement de la science.

(*) Segner (Jean-André de), né à Presbourg le 9 oct. 1704 ; mort à Halle le 5 oct. 1755 ; connu par sa machine à réaction. Sa démonstration du théorème de Descartes est dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1756.

XVI. *Théorème de De Gua.* Dans toute équation complète ou rendue telle, et qui n'a que des racines réelles, le carré d'un coefficient quelconque est plus grand que le produit de deux coefficients voisins.

Démonstration. Soit l'équation complète :

$$(Ax^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+A_3x^{m-3}+..A_{m-2}x^2+A_{m-1}x+A_m=0 \quad (1)$$

où les coefficients peuvent être nuls.

Si toutes les racines sont réelles, il en sera de même de toutes les équations dérivées (theorème de Rolle).

Formons les réciproques de ces dérivées :

$$A_{m-1}x^{m-1}+2A_{m-2}x^{m-2}+3A_{m-3}x^{m-3}+\dots\dots\dots+mA=0$$

$$2A_{m-2}x^{m-2}+2\text{-}3A_{m-3}+^{m-3}+3.4.A_{m-4}x^{m-4}+\text{etc.} \qquad =0$$

$$\vdots$$

$$[m-p-2]A_{p+2}x^{p+2}+[m-p-1]A_{p+1}x^{p+1}+\frac{[m-p]}{1.2}A_px^p+$$

$$+\frac{[m-p+1]}{1.2.3}A_{p-1}x^{p-1}+\dots\text{etc.}=0 \qquad (2)$$

Cette dernière équation est la réciproque de la dérivée de l'ordre $m-p-2$ et doit avoir toutes ses racines réelles ; les quantités renfermées entre crochets, indiquent des produits continuels. La dérivée de l'ordre p, de cette équation (2) est du second degré et aussi à racines réelles ; cette équation est :

$$\frac{1}{2}[p+2][m-p-2]A_{p+2}x^2+[p+1][m-p-1]A_{p+1}x+$$

$$+\frac{1}{2}[m-p][p]A_p=0 \qquad (3)$$

La réalité des racines de cette équation exige que l'on ait la condition, après toute les simplifications opérées,

$$A^2_{p+1}>\frac{p+2}{p+1}\cdot\frac{m-p}{m-p-1}A_pA_{p+2}\,; \qquad (4)$$

Ce signe indique que la quantité qui le précède n'est pas inférieure à celle qui le suit ; d'où a fortiori

$$A_{p+1}{}^2>A_p\ A_{p+2} \quad (5)$$

Cette démonstration est d'Euler, (*M. Ac. Pet.* t. XIII, p. 105) elle fournit, dans l'inégalité (4), un criterium précieux pour établir la possibilité de la réalité de toutes les racines; mais s'il ne s'agit que de l'inégalité (5), on peut y parvenir d'une manière plus courte, en considérant que dans l'équation (2) la somme des carrés des racines devant être positive, l'on en tire

$$A^2_{p+1} > \frac{m-p}{m-p-1} \cdot A_p A_{p+1}.$$

Il ne faut pas oublier que l'absence des racines imaginaires entraîne cette inégalité; mais la réciproque est fausse : l'existence de cette inégalité n'entraîne pas l'absence des racines imaginaires.

XVII. La proposition suivante, peut-être nouvelle, est très-générale : soient

$$A_1 x^p + A_2 x^{p-1} + A_3 x^{p-2} \ldots\ldots + \ldots\ldots A_{n+3} x^{p-n+2}$$

$n+3$ termes consécutifs d'une équation de degré m; formons la suite des différences premières des coefficients, en retranchant chaque coefficient du précédent; de même la suite des différences secondes, jusqu'aux différences du rang n; si l'on a l'équation $\Delta^n A_1 . \Delta^n A_3 = (\Delta^n A_2)^2$,
l'équation a des racines imaginaires, et autant de fois que cette relation se présente, autant l'équation a de couples de racines imaginaires, au moins.

Exemple :

$n=0$; $A_1 A_3 = A_2^2$; $n=1$; $(A_1 - A_2)(A_3 - A_4) = (A_2 - A_3)^2$;
donc si A_1, A_2, A_3, A_4, sont en progression arithmétique, il y a des racines imaginaires, observation qu'on doit à M. Hermite (*Nouvelles annales*, t. I, p. 385);
$n=2$; $(A_1 - 2A_2 + A_3)(A_3 - 2A_4 + A_5) = (A_2 - 2A_3 + A_5)^2$ etc.

On démontre la proposition, en multipliant le polynôme par un facteur linéaire arbitraire $x-\alpha$; si l'on peut déterminer α, de telle sorte qu'il y ait, à la fois, dans le produit une lacune et une permanence, et α étant réel, il est évident que le polynôme donné a des racines imaginaires.

XVIII. Descartes, dont la géométrie a répandu une si vive lumière sur la théorie des racines négatives, a conservé la dénomination ancienne, si vicieuse, de racines *fausses*. C'est un reste d'habitude, mais il est fort singulier de lire dans un ouvrage imprimé à Paris, en 1733, le passage suivant : « Les racines imaginaires sont celles qui sont sous un » signe radical avec le signe —, et dont l'exposant est un nom- » bre pair ; comme $x=\sqrt{-ab}$, et comme la valeur de ces » racines ne peut être exprimée, on les regarde comme nulles, » ou $=0$; de sorte que $x=\sqrt{-ab}$ doit être regardée comme » $x=0$. »

Voir page 7 de l'Application de l'algèbre à la géométrie, par M. Guisnée, membre de l'Académie des sciences, professeur royal.

XIX. M. Gauss a donné une nouvelle démonstration, aussi belle que rigoureuse, de la règle de Descartes (*Journal de Crelle*, t. III, p. 1); cette démonstration ayant été exposée par M. Gergonne (*Annales*, t. XVIII, p. 352. 1837), elle a été depuis introduite dans les éléments ; nous croyons utile de reproduire l'exposition de M. Gergonne qui nous paraît plus claire.

Soit X un polynôme n'ayant aucune racine positive, et soit

$$X=Mx^m+\ldots-Nx^n\ldots+Px^p+\ldots-Qx^q\ldots+Ux^u\ldots+V \quad (1)$$

On peut toujours supposer le premier terme positif ; soit $-Nx^n$ son premier terme négatif ; soit $+Px^p$ le premier terme positif qui se présente à la suite de celui-là ; soit $-Qx_n$ le premier terme négatif qui le suit et ainsi du reste. $+Ux^u$ est le premier des termes consécutifs qui ont le même signe que le dernier, qui est nécessairement positif, vu que le polynôme n'a aucune racine positive.

M, N, P, Q, U, V sont des nombres positifs quelconques, et m, n, p, q, u des nombres entiers continuellement décroissants ; soit α une quantité réelle positive, on aura

$$X(x-\alpha)=Mx^{m+1}\ldots-N'x^{n+1}\ldots+P'x^{p+1}-Q'x^{q+1}.+U'x^{u+1}-V\alpha(2)$$

N′, P′, Q′, V′ étant des nombres positifs, car le terme en x^{n+1} provient de la multiplication de $-Nx^n$ par x plus le produit du terme qui précède celui-ci dans (1) par $-\alpha$; ce terme précédent est positif, donc le produit de ce terme par $-\alpha$ est négatif ; par la même raison P′ est positif et ainsi de suite. Dans (1), il n'y a qu'une variation entre Mx^m et $-Nx^n$; mais dans la suite (2), il y a *au moins* une variation entre Mx^{m+1} et $-N'x^{n+1}$; car entre eux, il peut y avoir encore d'autres variations ; dans la suite (1) il n'y a que deux variations entre Mx^m et $+P'x^p$; dans la suite (2) il y a *au moins* deux variations entre Mx^{m+1} et $P'x^{p+1}$; de sorte que parvenu au terme $+U'x^{u+1}$, on aura rencontré autant de variations au moins qu'on en avait rencontré dans (1) lorsqu'on était parvenu au terme Ux^u ; mais comme le signe du dernier terme $-\alpha V$ est contraire à celui du terme $+U'x^{u+1}$ tandis que celui du dernier terme $+V$ est semblable à celui du terme Ux^u, il s'ensuit que finalement parvenu au dernier terme de (2), on aura rencontré tout au moins une variation de plus qu'on n'en avait rencontré dans (1) ; c'est-à-dire que dans X $(x-\alpha)$, il y a au moins une variation de plus que dans X. Par un raisonnement tout à fait semblable, et qui est indépendant du signe de V, il y aura tout au moins dans X $(x-\alpha)$ $(x-\beta)$ une variation de plus que dans X $(x-\alpha)$, et par conséquent deux variations de plus que dans X, et ainsi de suite.

Depuis la rédaction de cet article, M. Lacroix nous a été enlevé. C'était un honnête homme, un philosophe pratique. Nous ne connaissons point de plus bel, de plus rare éloge ni de mieux mérité. Tm.

QUESTION D'EXAMEN.

PAR M. MIDY,

Ancien Professeur de mathématiques spéciales dans les Colléges royaux.

Problème. *Trouver le lieu des foyers des hyperboles qui ont une asymptote commune et un sommet commun.*

1re *Solution.* Supposons les hyperboles rapportées à des axes rectangulaires. Prenons l'asymptote commune pour axe des y et la perpendiculaire abaissée du sommet commun sur cette droite pour axe des x. Nommons d la distance du sommet à l'asymptote et désignant par α et β les coordonnées variables du foyer, nous aurons

$$x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(px+qy+r)^2=0 \quad (1)$$

pour l'équation des courbes considérées. Pour exprimer que l'axe des y est une asymptote commune à toutes ces courbes, nous ferons $x=0$ dans cette équation, et nous écrirons ensuite que les deux valeurs de y données par l'équation résultante sont infinies.

Cette équation est

$$(1-q^2)y^2-2(\beta+qr)y+\beta^2-r^2=0.$$

Nous y ferons

$$1-q^2=0$$
$$\beta+qr=0$$

Par suite, $q=1$ et $r=-\beta$

Ce qui change l'équation (1) en

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(px+y-\beta)^2=0$$

En la développant, elle se réduit à

$$2pxy+(p^2-1)x^2+2(\alpha-p\beta)x=\alpha^2 \quad (2)$$

Le sommet commun dont les coordonnées sont $y=0$; $x=d$, étant sur chacune des hyperboles, l'on a

$$(p^2-1)d^2+2(\alpha-p\beta)d=\alpha^2 \quad (3)$$

Mais le sommet est toujours aussi sur la perpendiculaire abaissée du foyer sur la directrice dont l'équation est ici

$$px+y-\beta=0.$$

L'équation de la perpendiculaire est donc

$$y-\beta=\frac{1}{p}(x-\alpha)$$

et la condition de passer par le sommet donne

$$p\beta=\alpha-d \quad (4).$$

L'élimination de p entre (3) et (4) donnera donc le lieu cherché.

Pour faciliter cette élimination, nous remarquerons que (4) donne

$$d=\alpha-p\beta$$

par suite (3) devient

$$(p^2-1)d^2+2d^2=\alpha^2$$

et se réduit à

$$d^2(p^2+1)-\alpha^2=0$$

En y substituant la valeur de p tirée de (4), on trouve en ordonnant par rapport à β

$$\beta^2(\alpha^2-d^2)-d^2(\alpha-d)^2=0$$

ou

$$(\alpha-d)\left[\beta^2(\alpha+d)-d^2(\alpha-d)\right]=0.$$

Supprimant le facteur $\alpha-d$, évidemment étranger à la question, on trouve enfin

$$\beta^2=\frac{d^2(\alpha-d)}{\alpha+d}$$

pour l'équation du lieu cherché.

2ᵉ SOLUTION (*Fig.* 49).

Mais la considération des propriétés géométriques de la figure donne une solution beaucoup plus prompte. En effet, l'on sait que si l'on mène SE perpendiculaire sur SF, CE sera égal à CF. C est le centre, S le sommet et F le foyer. Le point cherché sera donc à la fois sur la droite CF et sur la circonférence CE, et sera par conséquent donné par leur intersection.

Or, la droite SF a pour équation

$$y=m(x-d) \qquad (1)$$

et celle de la perpendiculaire SE sur cette droite est

$$y=-\frac{1}{m}(x-d). \qquad (2)$$

Par suite, les coordonnées du centre C sont

$$x=0, \quad y=-md$$

et celles du point E

$$x=0, \quad y=\frac{d}{m}.$$

D'où il suit que la circonférence décrite du rayon CE a pour équation

$$(y+md)^2+x^2=\frac{d^2(1+m^2)^2}{m^2}. \qquad (3)$$

L'élimination de m entre (1) et (3) donnera le lieu cherché.

Or (1) donne

$$y+md=mx$$

par suite (3) se simplifie et devient

$$m^2(x^2-d^2)-d^2=0$$

équation qui, par la substitution de la valeur de m, donne, comme précédemment,

$$y^2(x^2-d^2)-d^2(x-d)^2=0$$

ou $$y^2 = \frac{d^2(x-d)}{x+d}.$$

La comparaison des triangles semblables de la figure conduit plus aisément encore au même résultat ; soit que l'on s'appuie sur l'égalité des droites CE et CF, ou sur celles des perpendiculaires ES, FK abaissées de l'extrémité de chacune d'elles sur l'autre.

Dans la première hypothèse, les triangles semblables SFP, SCO donnent

$$SF : SC :: SP : SO$$

ou

$$SF : SC :: x - d : d$$

d'où $$SC : CF :: d : x$$

Mais les triangles semblables SFP, SCE donnent aussi

$$SC : CE :: FP : SF :: y : \sqrt{y^2 + (x-d)^2}.$$

Donc

$$d : x :: y : \sqrt{y^2 + (x-d)^2},$$

d'où on tire

$$y^2 = \frac{d^2(x-d)}{x+d}.$$

En s'appuyant sur la seconde égalité, les triangles semblables SFP, SOE donnent immédiatement

$$SE : SO :: SF : FP$$

ou

$$x : d :: \sqrt{y^2 + (x-d)^2} : y,$$

proportion déjà obtenue.

La discussion de cette courbe ferait connaître que conformément à la figure (49), elle se compose de trois branches distinctes qui ont pour asymptotes les droites GH, G'H', I' L' parallèles aux axes et menées à des distances de ces axes égales à OS, et que, tandis que le centre C de l'hyperbole variable parcourt l'asymptote donnée OY, le second sommet S′ mobile parcourt l'asymptote I′L′ de la courbe; les foyers F et F′ décrivant, le premier, les branches situées à droite de l'axe OY, et le second, les deux branches situées à gauche. On peut de la même manière trouver le lieu géométrique du sommet, un foyer et une asymptote étant fixes (voir tome I, pag. 158).

SOLUTION DU PROBLÈME 15 *des questions d'examen* (page 321, t. I).

PAR M. YVON (LOUIS),
Elève du Collége royal Charlemagne.

Trouver le lieu des sommets des paraboles qui ont un point commun et le foyer commun.

On pourrait mettre le problème en équation en partant de l'énoncé, mais on peut le résoudre plus simplement en cherchant une autre génération du lieu.

Soit A le point commun et F le foyer commun (*fig.* 50).

La distance du point A à la directrice étant égale à AF dans toutes les positions de la parabole, il s'ensuit que si du point A comme centre avec AF comme rayon, on décrit une circonférence, la directrice, dans ses diverses positions, sera une tangente à cette circonférence, et si on imagine que, dans chaque position de la tangente au cercle, on abaisse une perpendiculaire sur cette dernière, le point milieu de cette perpendiculaire sera un point du lieu.

Ainsi, pour résoudre la question, on cherchera le lieu des projections du point F sur toutes les tangentes au cercle et on remplacera dans l'équation x par $\frac{x}{2}$ et y par $\frac{y}{2}$ (*). Je prends

(*) Ainsi le lieu cherché est une ligne *aplanétique*. Nous en traiterons prochainement. Tm.

le point F pour origine des coordonnées rectangulaires, et AF pour axe des x.

Soit $AF = R$. L'équation d'une tangente est

$$y = m(x - R) \pm R\sqrt{1+m^2},$$

m étant la tangente de l'angle que fait la tangente au cercle avec l'axe des x.

L'équation de la perpendiculaire est $y = -\frac{1}{m}x$. De cette dernière équation on tire $m = -\frac{x}{y}$; substituant cette valeur dans la première équation et remplaçant y et x, par $\frac{y}{2}$ et $\frac{x}{2}$, il vient

$$\left.\begin{array}{r} y^4 + 2x^2 \\ -4Rx \\ -4R^2 \end{array}\right| \begin{array}{r} y^2 + x^4 \\ -4Rx^3 \\ \end{array} = 0. \qquad (a)$$

On pourrait résoudre cette équation par rapport à y et discuter la courbe; mais les coordonnées polaires permettant de trouver une équation beaucoup plus simple, on a $FE = R - AG = R - R\cos\omega = R(1 - \cos\omega)$; mais $FE = 2\rho$, donc $\rho = \frac{R}{2}(1 - \cos\omega)$ou $\omega = FEN$; si on fait $\omega = 0$, on a $\rho = 0$; donc la courbe passe au point F. Si on on fait croître ω de $0°$ à $180°$, ρ va continuellement en augmentant de 0 à R. Si on fait $\omega = 90$, on aura $\rho = \frac{R}{2}$, ce qui donne le point B.

On peut se proposer de trouver le point le plus éloigné de la ligne FR. Or, si on désigne par δ la distance d'un point quelconque de la courbe à cette ligne, on a $\delta = \rho\cos\omega$; remplaçant ρ par sa valeur, il vient $\delta = \frac{R}{2}\cos\omega\,(1 - \cos\omega)$, expression dont il faut trouver le maximum; or les deux facteurs variables $\cos\omega\,(1 - \cos\omega)$ ayant une somme constante et égale à 1, le maximum correspondra au cas où les deux facteurs seront égaux, auquel cas $\cos\omega$ sera $=\frac{1}{2}$ et $\omega=60^\circ$, et par suite il viendra $\delta=\frac{R}{8}$ et $\rho=\frac{R}{4}$. On connaît donc les distances de ce point à la droite FR et au point F; on pourra donc déterminer ce point. Si maintenant on fait croître ω au delà de 90°, ρ augmente, et pour $\omega=180$ on a $\rho=R$.

On peut aussi trouver le point le plus éloigné de AF. Soit donc δ' la distance d'un point quelconque à AF; on aura $\delta'=\rho\sin\omega=\frac{R}{2}(1-\cos\omega)\sin\omega$, expression dont il faut trouver le maximum : mais ici la somme n'est pas constante, il faut donc tâcher de la rendre telle; il est clair que pour trouver le maximum de $(1-\cos\omega)\sin\omega$, il suffit de trouver le maximum de

$$(1-\cos\omega)^2\sin^2\omega=(1-\cos\omega)^2(1-\cos^2\omega)=(1-\cos\omega)^3(1+\cos\omega);$$

ici la somme des facteurs égale $4-2\cos\omega$, il faudrait donc augmenter cette somme de $2\cos\omega$, ce qui pourra se faire en multipliant le facteur $(1+\cos\omega)$ par 3, la question reviendra donc à trouver le maximum de $(1-\cos\omega)^3(3+3\cos\omega)$. Or, la somme étant constante et égale à 6, la valeur de $\cos\omega$ correspondante au maximum sera donnée par $3+3\cos\omega=\frac{3}{2}$, d'où $\cos\omega=-\frac{1}{2}$; $\omega=120$; par suite $\sin\omega=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, ce qui donne $\delta'=\frac{3}{8}R\sqrt{3}$ et $\rho=\frac{3R}{4}$. On pourra donc aussi déterminer ce point. Si on donne à ω des valeurs comprises entre 180° et 360°, on repasse par les mêmes valeurs de ρ, donc la courbe est symétrique par rapport à la ligne AF. Prenons $FI=\frac{R}{8}$ et $AN=AN'=\frac{3}{8}R\sqrt{3}$, et par les points I, N, et N' menons des parallèles, la première à BR, les deux autres à AF, on formera un rectangle qui renfermera la courbe et dont tous les côtés seront des tangentes, car on pourrait s'assurer facilement que AN est une tangente. On pourrait voir de plus que AF est tangente au point F.

On voit que la courbe est limitée, ce que l'on pouvait prévoir, car EF est plus petit que le rayon, et si la tangente s'incline de l'autre côté E'F est plus petit que 2R, donc dans tous les cas ρ est $<$ 2R. Donc la courbe est limitée. La perpendiculaire abaissée du point F sur la tangente en ce point est nulle; donc le point F est un point du lieu. La ligne F'D étant tangente au point F', il s'ensuit que le point A, milieu de FF', devait appartenir à la courbe; ce qui vérifie les résultats trouvés par le calcul.

Observation. Cette courbe a été construite par Euler (*Introd. ad Analys.*, tome II, § 415). On l'obtient en portant sur le rayon mobile d'une circonférence, à partir du centre, la moitié du sinus-verse de l'arc compris entre ce rayon et un rayon fixe.

Le périmètre de toute la courbe est égal au double du diamètre de la circonférence. L'aire de la courbe est égale aux $\frac{3}{8}$ de l'aire du cercle.

Comment démontrer par des moyens quelconques, cette proposition de Newton, qu'il n'existe aucune courbe algébrique *fermée* carrable. Cette proposition comprend-elle les courbes fermées qui font partie des courbes à branches infinies?

Comment démontrer par des moyens quelconques, cette proposition d'Euler, qu'il n'existe aucune courbe algébrique dont le périmètre puisse être égal à un arc de cercle? tandis qu'il existe une foule de courbes algébriques dont le périmètre est rectifiable. Au premier aperçu on est plutôt tenté d'admettre le contraire; nouvel exemple, qui montre combien il faut se défier des premiers aperçus! Tm.

THÉORÈME SUR LES CONIQUES SEMBLABLES,

et démonstration du théorème 4 de la pag. 57, t. I.

Soient deux coniques concentriques, semblables et semblablement situées dans un même plan; si, par un point quelconque pris sur une de ces coniques, on mène trois droites respectivement conjuguées aux côtés d'un triangle inscrit dans la seconde conique; les points où les droites rencontrent, chacune, le côté correspondant, sont les sommets d'un triangle dont l'aire est constante.

Démonstration. Considérons la proposition inverse.

Soit ABC, un triangle inscrit dans une conique; prenons AB pour axe des x et AC pour axe des y; l'équation de la conique est donc de la forme :

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = 0; \qquad (1)$$

Aucune des quantités A, C, D, E n'est nulle.

Soit MNP un triangle inscrit dans le triangle ABC; M est sur le côté AC; N sur le côté AB; et P sur le côté BC.

Coordonnées du point M; $x = 0$; $y = y'$;

Id. N; $x = x''$; $y = 0$;

Id. P; $x = x'''$; $y = y'''$.

Si on désigne par T une quantité constante donnée, on exprime que l'aire du triangle MNP est invariable, en écrivant la relation connue :

$$y'x''' + x''y''' - x''y' + T = 0. \qquad (2)$$

Les équations des droites respectivement conjuguées aux côtés AC, AB, BC et passant par les points M, N, P, sont :

$$2Ay + Bx = 2Ay' \qquad (3)$$

$$By + 2Cx = 2Cx'' \qquad (4)$$

$$Ak'y - Ckx = Ak'y''' - Ckx'''. \qquad (5)$$

(Voir l'équation 5 du t. I, p. 495).

Le point P étant sur la droite BC, on a de plus l'équation

$$AEy''' + CDx''' + DE = 0. \qquad (6)$$

Eliminant y', x'', x''', y''' entre les cinq équations (2), (3), (4), (5), (6), on obtient $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + \frac{4ACLT}{DEm} = 0$ (7), calcul facile, au moyen des *identités* (p. 489, t. I).

Cette équation est celle du lieu géométrique du point de rencontre des trois droites conjuguées, et c'est l'équation d'une conique semblable à la conique donnée par l'équation (1), semblablement située et concentrique; de l'inverse on passe facilement à la proposition directe.

Corollaire 1. Si la seconde conique est la même que la première, on a $T = 0$; alors les trois points M, N, P sont sur une même droite. Ce qui démontre le théorème 4 de la p. 57 (vol. I).

Observation. Dans la parabole on a constamment $m = 0$ et $T = 0$; la proposition est d'une évidence intuitive.

Corollaire 2. On a

$$y' = \frac{2Ay + Bx}{2A};\quad x'' = \frac{By + 2Cx}{2C};\quad x''' = \frac{E}{2CL}(Ckx - Ak'y - Dk')$$

$$y''' = \frac{E}{2AL}(Ak'y - Ckx - Ek)$$

Donc lorsqu'on a une relation quelconque entre les quatre quantités y', x'', x''', y''', le lieu géométrique du point d'intersection des trois droites conjuguées est toujours donné par une équation de même degré que la relation, en considérant les quatre quantités comme autant de variables.

Corollaire 3. Transportant l'origine au centre, les équations de la conique donnée et de la conique semblable deviennent :

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+\frac{L}{m}=0 \quad \text{(page 492, t. I)}$$

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+\frac{t^2L}{m}=0,$$

où t désigne le rapport linéaire de similitude.

On a aussi $\frac{t^2L}{m}=\frac{L'}{m}$; L' étant ce que devient L dans la seconde conique; mais $L'=L+m.\ \frac{4ACLT}{DEm}$, donc

$$T=(t^2-1)\frac{DE}{4AC}=(t^2-1)\frac{S}{2\sin\gamma}$$

où S est l'aire du triangle ABC et γ l'angle CAB.

Corollaire 4. Si le centre d'une ellipse est le centre de gravité du triangle inscrit ABC, le théorème de M. Steiner est applicable (théorème 2, p. 57, t. I); c'est ce qu'on voit de suite par la méthode projective; il est facile aussi d'établir directement cette propriété; en effet, les coordonnées du centre de gravité du triangle sont : $\frac{-E}{3C}$ et $\frac{-D}{3A}$; on doit donc avoir $\frac{-E}{3C}=\frac{k}{m}$; $\frac{-D}{3A}=\frac{k'}{m}$; ayant égard à cette relation, l'équation de la courbe prend cette forme :

$$B\,(D^2y^2+DExy+E^2x^2)+DE\,(Dy+Ex)=0; \quad (1)$$

on a ensuite

$$\frac{k}{m}=\frac{-D}{3B};\ \frac{k'}{m}=\frac{-E}{3B};\ y'=\frac{2Dy+EX}{2D};\ x'=\frac{2EX+EY}{2E};$$

X et Y désignant les coordonnées courantes de la conique, la droite qui passant par les points M, N, P, a pour équation :

$$y\,[3BX+D]-x\,[3BY+E]=DY-EX;$$

le diamètre qui passe par le point (X, Y) a pour équation :

$$2D[2EX+DY]y+2E[2DY+EX]x=[2EX+DY][2DY+EX];$$

éliminant x et faisant attention à l'équation (1), il vient

$$y=\frac{Y}{2}-\frac{E}{6B};\ x=\frac{X}{2}-\frac{D}{6B}$$

coordonnées du milieu du demi-diamètre qui aboutit au point (X, Y).

Observation. Dans l'hyperbole, il est impossible que le centre soit le centre de gravité d'un triangle inscrit.

Nota. MM. Querret et Sturm ont démontré le théorème, pour la circonférence seulement (Annales de Gergonne, t. 14, p. 280 et 390, 1823). Le théorème est, je crois, de Lhuillier. La méthode projective peut servir à reconnaître cette propriété dans l'ellipse, mais non dans l'hyperbole. M. Vidal, élève du collége de Montpellier, nous a adressé une démonstration du théorème 4 (p. 57) au moyen de la méthode projective dans l'ellipse; ensuite il démontre directement ce théorème pour l'hyperbole équilatère; et de là, encore par la méthode projective, dans une hyperbole quelconque.

Tm.

THÉORÈME 59 (page 48).

MM. Vidal, élève du collége de Montpellier, et Lestorey, élève du collége de Rouen, démontrent ce théorème par la considération évidente que, dans le prisme oblique, la hauteur de chaque face est plus grande que dans la face correspondante du prisme droit.

SUR LA

DÉTERMINATION D'UNE COURBE DU 2e ORDRE,

donnée par son équation.

PAR M. B. AMIOT,

Professeur de mathématiques au Collége de Saint-Louis.

---

1. Soit une courbe du deuxième ordre représentée par l'équation générale

(A) $$Ay^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0,$$

que nous supposerons rapportée à deux axes de coordonnées rectangulaires.

Si nous posons

(1) $$(y-y')^2+(x-x')^2=(my+nx+p)^2$$

nous aurons l'équation d'une certaine courbe du deuxième ordre que nous supposerons rapportée aux mêmes axes de coordonnées. Le point qui a pour coordonnées x', y' est un foyer de cette courbe, et la droite qui a pour équation

(2) $$my+nx+p=0$$

en est une directrice. D'ailleurs si l'on pose $k^2=m^2+n^2$, k représente la valeur constante du rapport des distances d'un même point quelconque de la courbe au foyer et à la directrice (*).

2. Or on peut toujours disposer des quantités x', y', m, n et p de manière que la courbe représentée par l'équation (1)

(*) Voyez Théorie des foyers, par M. Roguet, page 131 du 1er volume de ce recueil. Tm.

coïncide avec la courbe donnée (A). Pour cela, après avoir développé et ordonné l'équation (1), ce qui donne

$$(3)\ y^2(1-m^2)-2mnxy+x^2(1-n^2)-2y(y'+mp)-2x(x'+np)+y'^2+x'^2-p^2=0;$$

je la multiplie par un facteur indéterminé S, que j'appellerai *coefficient de réduction* et je l'identifie avec l'équation (A). J'obtiens ainsi, entre les six inconnues x', y', m, n, p et S les six équations.

$$(a)\ \begin{cases} S(1-m^2)=A \\ S(1-n^2)=C \\ Smn=-B \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} S(y'+mp)-=D \\ S(x'+np)=-E \\ S(y'^2+x'^2-p^2)=F \end{cases}$$

et par conséquent le problème est généralement déterminé.

3. Des équations (a) on déduit

$$(c)\ m^2=\frac{S-A}{S}, \qquad n^2=\frac{S-C}{S} \text{ et par suite,}$$

$$(d)\ (S-A)(S-C)=B^2, \text{ ou bien } S^2-(A+C)S+AC-B^2=0,$$

d'où l'on déduit $S=\frac{1}{2}\left(A+C\pm\sqrt{(A-C)^2+4B^2}\right)$.

Il est à remarquer que ces deux valeurs de S sont toujours réelles et que l'une au moins est différente de zéro; car si l'on avait à la fois $A+C=0$ et $B^2-AC=0$, il s'ensuivrait $A=0$, $C=0$ et $B=0$, et partant l'équation proposée cesserait d'être du deuxième degré.

Les valeurs de S, m et n étant ainsi connues, on pourrait tirer des équatious (b) x', y' et p; mais, au lieu de résoudre ces équations, éliminons p entre les deux premières, ce qui nous donne :

$$(e)\quad \frac{Sy'+D}{\sqrt{S-A}}=\frac{Sx'+E}{\sqrt{S-C}} \text{ ou bien } \frac{Sy'+D}{S-A}=\frac{Sx'+E}{B},$$

m et n étant d'ailleurs remplacées par leurs valeurs (c).

Or si l'on considère dans cette équation x' et y' comme des coordonnées courantes, on aura, pour chacune des valeurs de S, une certaine droite qui sera un axe de la courbe. En effet si l'on suppose cette droite prise pour axe des x, on doit avoir $y' = 0$ quel que soit x', et par suite il faut que l'on ait $B = 0$, $D = 0$, et réciproquement.

4. Une fois que l'on aura déterminé une valeur du coefficient de réduction S en fonction des coefficients donnés A, B, C, cette valeur rendra l'équation (3) identique avec (A), et les deux courbes représentées par ces deux équations, continueront de coïncider quel que soit le système d'axes de coordonnées auquel on les rapporte ensuite simultanément. Or je suppose que, sans déplacer l'origine, on donne aux axes de coordonnées une direction telle que l'équation (A) soit débarrassée du rectangle des variables et devienne

$$\text{(M)} \qquad My^2 + Nx^2 + Py + Qx + F = 0\,;$$

alors l'équation (3), rapportée aux mêmes axes de coordonnées, devra aussi être débarrassée du rectangle des variables, et par conséquent on aura $mn = 0$, d'où résultera

$$(S - M)(S - N) = 0,$$

et par conséquent

$$S_1 = M \text{ et } S_2 = N.$$

Ainsi *les deux racines de l'équation* (d) *ne sont autre chose que les valeurs des coefficients des carrés* x^2 et y^2 *lorsque l'on suppose la courbe rapportée à un système de coordonnées parallèles à ses axes.*

5. Cela posé, nous distinguerons deux cas, suivant que les deux valeurs du coefficient de réduction S_1 et S_2 sont différentes de zéro, ou que l'une de ces valeurs est nulle, c'est-à-dire suivant que l'on aura $B^2 - AC \gtrless 0$ ou bien $B^2 - AC = 0$. Dans le premier, si l'on substitue successivement à S les deux valeurs S_1 et S_2 dans l'équation générale (e) on aura pour les équations des deux axes de la courbe,

$$(f)\qquad \frac{S_1 y' + D}{S_1 - A} = \frac{S_1 x'}{B} \text{ et } \frac{S_2 y' + D}{S_2 - A} = \frac{S_2 x' + E}{B}.$$

Il est aisé de vérifier que ces deux droites sont perpendiculaires, car on a

$$\frac{S_1 - A}{B} \times \frac{S_2 - A}{B} =$$

$$= \frac{\left(C - A + \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}\right)\left(C - A - \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}\right)}{4B^2} = 1.$$

Pour obtenir le centre de la courbe, on éliminera successivement x' et y' entre les deux équations (f), ce qui donnera pour les deux coordonnées de ce point

$$x_1 = \frac{BD - AE}{S_1 S_2} = \frac{BD - AE}{AC - B^2}$$

$$y_1 = \frac{BE - CD}{S_1 S_2} = \frac{BE - CD}{AC - B^2}.$$

Si nous supposons la courbe rapportée à son centre et à ses axes, elle aura pour équation

$$(g)\qquad S_1 y^2 + S_2 x^2 + F_1 = 0,$$

F_1 étant déterminé par la relation

$$F_1 = F + Dy_1 + Ex_1 = F + \frac{2BDE - CD^2 - AE^2}{AC - B^2}.$$

Si l'on a $F_1 = 0$, la courbe se reduira à un point dans le cas de S_1 et S_2 de même signe, et à deux droites, dans celui de S_1 et S_2 de signe contraire. Dans ce dernier cas, les deux droites auront pour équations

$$y = \pm x \sqrt{\frac{-S_2}{S_1}}.$$

Si F_1 est différent de zéro la courbe sera une ellipse ou une hyperbole suivant que S_1 et S_2 seront de même signe ou de signe contraire, et les valeurs des axes seront données par les deux relations

$$a^2 = -\frac{F_1}{S_2} \quad \text{et} \quad b_2 = -\frac{F_1}{S_1}.$$

Dans le cas où S_1 et S_2, étant de même signe, seraient de signe contraire à F_1, la courbe serait visiblement imaginaire.

6. Passons à la 2^e hypothèse et supposons que l'une des deux valeurs du coefficient de réduction, soit nulle. On aura pour l'autre $S_1 = A + C$, et l'équation générale de l'axe (e) deviendra.

$$(h) \quad [x'(A+C)+E]\sqrt{C} = [y'(A+C)+D]\sqrt{A},$$

en supposant $B = -\sqrt{AC}$; si B était positif, on devrait changer le signe de l'un des deux membres.

Transportons les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes en un certain point de l'axe (h), par exemple en celui qui a pour coordonnées

$$x_1 = -\frac{E}{A+C} \quad \text{et} \quad y_1 = -\frac{D}{A+C}.$$

Pour cela nous substituons dans l'équation (A) à x et à y

$$x - \frac{E}{A+C} \quad \text{et} \quad y - \frac{D}{A+C},$$

et nous avons

$$(k) \quad Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 - 2\left(\frac{BE-CD}{A+C}\right)y - 2\left(\frac{BD-AE}{A+C}\right)x + F_1 = 0$$

avec la relation $F_1 = F - 2\left(\frac{D^2+E^2}{A+C}\right) + \left(\frac{D\sqrt{A}-E\sqrt{C}}{A+C}\right)^2.$

L'équation de l'axe rapporté aux mêmes axes de coordonnées devient $y' = x'\sqrt{\frac{C}{A}}$, et l'on trouve pour les deux coordonnées du point d'intersection, avec la courbe, qui est le sommet de celle-ci,

$$\alpha = -\frac{F_1\sqrt{A}}{2(E\sqrt{A}+D\sqrt{C})}, \quad \beta = -\frac{F_1\sqrt{C}}{2(E\sqrt{A}+D\sqrt{C})},$$

La courbe se réduirait à un système de deux droites parallèles, si ces valeurs de α et β étaient infinies, et à une droite unique si elles étaient indéterminées.

Dans le cas contraire, la distance de l'origine des coordonnées au sommet de la courbe sera donnée par la formule

$$\delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{F_1 \sqrt{A+C}}{2(E\sqrt{A} + D\sqrt{C})}.$$

Or si nous supposons que, sans déplacer de nouveau l'origine, on prend l'axe de la courbe pour axe des x, l'équation de celle-ci devient

$$S_1 y^2 + Qx + F_1 = 0.$$

et si l'on y fait $y=0$, on a $x = \delta = -\frac{F_1}{Q}$, d'ou $Q = -\frac{F_1}{\delta}$, et

comme le paramètre $2p = -\frac{Q}{S_1}$, on trouve

$$p = \frac{E\sqrt{A} + D\sqrt{C}}{(A+C)\sqrt{A+C}}.$$

Dans le cas de $B > 0$, on aurait

$$p = \frac{E\sqrt{A} + D\sqrt{C}}{(A+C)\sqrt{A+C}},$$

et l'on a pour l'équation de la parabole rapportée à son axe et à son sommet

$$y^2 = 2px,$$

l'axe, le sommet et le paramètre étant complétement déterminés par les formules précédentes

---

ANNONCE.

Théories nouvelles de la division et des extractions de racines, à l'usage des candidats aux Écoles du gouvernement, aux baccalauréats ès sciences et ès lettres; par M. Chevillard, ancien élève de l'école polytechnique. Paris, 1843. In-8° de 60 pages.

BIOGRAPHIE.

Lévy (*Abélard Servedieu*) , né à Paris le 14 novembre 1795, entra à l'École normale en 1813, après avoir obtenu les plus grands succès dans ses classes de mathématiques, au lycée Napoléon, et notamment le premier prix de mathématiques spéciales, au concours général. A sa sortie de l'École normale en 1816, l'intolérance alors régnante refusa d'accorder une place de professeur en France au jeune lauréat israélite, auquel l'Empire avait noblement et *constitutionnellement* ouvert les portes de l'Université.

Lévy fut obligé, vers la fin de 1816, d'accepter une place de professeur à l'île Bourbon. A peine sorti de Rochefort, le navire sur lequel il était embarqué fut assailli par la tempête, et, détourné de sa route, fut jeté sur les côtes de Plymouth.

Lévy, touchant cette terre hospitalière, résolut de s'y fixer. De nombreuses et puissantes recommandations pour les plus grandes notabilités scientifiques de l'Angleterre lui arrivèrent immédiatement de la part des savants les plus illustres de Paris.

La minéralogie avait été l'objet de ses études de prédilection. L'illustre Haüy le recommandait comme étant un des hommes qu'il s'honorait le plus de compter parmi ses élèves.

Lévy passa dix années en Angleterre, vivant honorablement du produit de ses leçons; parcourant et étudiant toutes les belles collections minéralogiques qui abondent dans ce pays, il inséra d'importantes recherches cristallographiques dans les revues scientifiques d'Édimbourg, dont quelques-unes furent traduites dans les Annales de chimie.

Marié et père de famille, il voulut enfin se rapprocher de la France, en acceptant une position plus stable dans l'Université de Liége, où, en qualité de *lecteur* pour les sciences naturelles et mathématiques, il professa pendant deux années la géologie et les mathématiques.

Enfin, après la révolution de juillet, il put reprendre en France, la carrière de l'enseignement. Vainement la Belgique émancipée voulut le rappeler, en lui offrant notamment la direction du Musée de Bruxelles, avec des émoluments considérables; revenu dans la patrie, au sein de ses amis, il ne voulut plus les quitter !

Veuf en 1834, il épousa en 1838 une sœur de son ami de collége, d'un géomètre de renom, de M. O. Rodrigues, auquel nous devons ces renseignements. Et quand, maître de conférences à l'École normale, professeur de mathématiques au collége Charlemagne, il venait au 1er mai 1841, d'obtenir la croix d'honneur; quand l'unanime opinion l'appelait pour occuper, à la première vacance, une chaire à la faculté, et qu'il allait bientôt trouver sa place à l'Institut, il fut enlevé subitement à sa famille, à ses amis, par une attaque d'hypertrophie du cœur, le 21 juin 1841.

Nous pouvons le dire avez assurance, Lévy a été un professeur de mathématiques très-distingué. Aimant et comprenant les arts, n'étant resté étranger à aucune science, d'une conversation instructive et variée, Lévy se montra constamment, dans les relations sociales, homme du caractère le plus bienveillant, le plus conciliant.

Ainsi s'exprimait M. Thénard, presidant la distribution de prix du collége Charlemagne, quelques semaines après sa mort :

«... Je veux rendre aussi un dernier et triste hommage à la mémoire du célèbre professeur qui naguère succomba presque sous vos yeux, au milieu de sa brillante carrière. Il vous aimait, jeunes élèves. Il vous consacrait ses veilles. Plus d'une fois, ses savantes leçons vous ont valu des couronnes. Donnons tous ensemble quelques larmes à sa cendre.

» Puisse sa veuve, puissent ses enfants qui ont tout perdu en perdant un tel père, trouver dans l'expression publique de nos communs regrets un adoucissement à leur trop juste douleur.

» Puisse enfin le collége Charlemagne retrouver un professeur qui, doué du talent d'enseigner, contribue comme Lévy, à la prospérité et à la gloire de ce grand établissement. »

Voici la liste de ses principaux travaux :

1° Découverte et description de *dix-huit* espèces nouvelles en minéralogie. C'est le trentième environ des espèces dont l'ensemble forme la matière des études minéralogiques.

2° Description de la collection de M. Turner-Heulard, trois volumes in-8° avec atlas, où il a décrit environ 1200 nouvelles variétés de formes, etc. (Cette riche collection contenant tous les minéraux connus est à l'école des mines.)

3° *Differential and integral calculs*, by A. Lévy. *Lectures on natural philosophy and mathematics in the University of Liege.* (Inséré dans l'Encyclopédie métropolitaine de Londres, 1833.)

4° Plusieurs mémoires dans la correspondance mathématique de Quételet.

Lévy était membre de l'Université de France, de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles, de la Société philomatique de Paris, des Sociétés géologiques de Londres et de France, de la Société des sciences naturelles de Liége et chevalier de la Légion d'honneur. Tm.

LA CONCHOÏDE,

PAR M. MIDY,

Ancien Professeur de mathématiques spéciales dans les Colléges royaux.

—

1. On suppose que sur toutes les droites issues d'un même point A dans un plan, on a pris, à partir de la droite BC, (*fig.* 51), une longueur constante NM $=$ NM$'$ $=c$.

La suite des points ainsi déterminés sera une courbe que l'on a nommée conchoïde.

2. Si l'on prend pour axe des x la droite donnée BC et pour celui des y la perpendiculaire AO sur cette droite, en appelant d la distance du point à la droite, l'équation du lieu sera

$$xy=\pm(d-y)\sqrt{c^2-y^2}, \qquad (1)$$

ou, en faisant disparaître le radical,

(*) $$x^2y^2-(d-y)^2\;(c^2-y^2)=0. \qquad (2)$$

On voit sous cette seconde forme que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des y, et que de plus l'axe des x est une asymptote, puisque l'hypothèse $y=0$ rend x^2 infinie. Si l'on suppose $y>c$, abstraction faite du signe, le radical de (1) devient imaginaire et par conséquent la valeur de x l'est aussi, et comme $y=\pm c$ donne $x=0$, il en résulte que si l'on mène deux parallèles LG, L$'$ G$'$ à la droite BC, à des distances égales à $+c$ et $-c$, elles seront des limites de la courbe qu'elles rencontreront sur l'axe des y en K et K$'$.

3. En nommant m la tangente trigonométrique de l'angle

(*) Voir la Géométrie analytique de M. Comte, page 77.

que fait avec l'axe des x une tangente à la courbe, on aura

$$m = \pm \frac{y^2\sqrt{c^2 - y^2}}{y^3 - dc^2}. \qquad (3)$$

En faisant $y = \pm c$, si l'on n'a pas en même temps $d = c$; c'est-à-dire si le point A ne se confond pas avec le point K, les valeurs de m seront nulles et les droites LG, L′ G′ seront des tangentes à la courbe.

Pour distinguer les différentes formes qu'affecte cette courbe, nous ferons successivement les trois hypothèses $d < c$, $d = c$, $d > c$; ce qui revient à supposer le point A au-dessous de LG, sur cette droite, ou au-dessus.

4. *Premier cas* (*fig.* 52). $d < c$. Mettons la valeur de x tirée de (1) sous la forme

$$x = \pm (d - y)\sqrt{\frac{c^2}{y^2} - 1} \qquad (4)$$

et ne considérons pour plus de simplicité que le signe supérieur de cette expression.

Quand on fera décroître y depuis c jusqu'à d, le premier facteur sera négatif et sa valeur absolue décroîtra depuis $c - d$ jusqu'à 0; le second croîtra depuis 0 jusqu'à $\sqrt{\frac{c^2}{d^2} - 1}$. Il suit de là que dans cet intervalle x sera négative et comprise entre les valeurs extrêmes 0 et 0. Il y aura donc entre ces limites une valeur maximum de x qui correspondra à la valeur de y qui rend m infinie, ou qui est donnée par la condition

$$y^3 - dc^2 = 0.$$

Il suit de là que la valeur correspondante de y est

$$y = \sqrt[3]{dc^2}.$$

Mettons la valeur de x sous la forme

$$x = \left(\frac{d}{y} - 1\right)\sqrt{c^2 - y^2} \qquad (5)$$

et faisons décroître y depuis d jusqu'à zéro.

Le premier facteur, devenu positif, croît sans cesse ainsi que le second. Donc la valeur de x croît depuis zéro jusqu'à l'infini. En adoptant le second signe dont est affectée la valeur de x, on trouvera en signes contraires les mêmes résultats que l'on vient d'obtenir.

En changeant y en $-y$, (5) devient

$$x = \pm\left(\frac{d}{y} + 1\right)\sqrt{c^2 - y^2}.$$

Alors depuis $y = c$ qui est l'ordonnée maximum jusqu'à $y = 0$, les valeurs de x sont continuellement croissantes depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pm\infty$. La courbe a donc dans cette première hypothèse $d < c$, la forme indiquée par la figure (52) : c'est-à-dire qu'elle est composée de deux branches distinctes et de formes différentes, séparées par la droite donnée BC et qui ont cette droite pour asymptote commune.

Le point A de la branche supérieure correspondant à $y = d$ est un point double auquel doivent correspondre deux tangentes différentes. En effet, cette hypothèse introduite dans (3), donne

$$m = \pm\frac{d}{\sqrt{c^2 - d^2}}.$$

Donc, si l'on prend sur BC deux points R et R′ dont les distances au point A soient égales à c, les droits AR, AR′ toucheront en A les deux parties KHAV, KH′AV′ de la courbe.

5. *Deuxième cas.* Soit $d = c$ (*fig.* 53). Supposons que d croisse depuis la valeur que nous avons considérée précédemment jusqu'à la valeur actuelle $d = c$. Le point A se rapprochera constamment du point K. La partie fermée KHAH′ diminuera sans cesse et tendra à s'anéantir; et, à la limite $d = c$, cette partie se trouvera réduite à un point. Mais alors les points R et R′ seront venus se confondre avec le point O. Il ne restera donc de la branche supérieure que les deux parties AV, AV′ qui seront tangentes en A à

l'axe OY et par conséquent convexes à l'égard de cet axe.

Pour mettre hors de doute ce double contact en A de la branche supérieure avec l'axe des y, nous recourrons à la formule (3), devenue

$$m = \pm \frac{y^2 \sqrt{(c^2 - y^2)}}{c^3 - y^3}$$

que nous mettrons sous la forme suivante

$$m = \pm \frac{y^2 \sqrt{c+y}}{(c^2 + cy + y^2)\sqrt{c-y}}.$$

En y faisant $y = c$, il vient

$$m = \pm \frac{c^2 \sqrt{2c}}{3c^2 \times 0} = \pm \infty,$$

d'où il suit que la tangente est devenue parallèle à l'axe des y, ou qu'elle est confondue avec cet axe.

6. *Troisième cas.* Soit enfin $d > c$, c'est-à-dire en revenant à la figure primitive (*fig.* 51), supposons le point A au-dessus de la droite LG. La partie fermée AHKH′ n'existe plus, ou ses points sont imaginaires. Alors les deux branches supérieure et inférieure sont convexes vers leurs tangentes respectives LG, LG′ et ensuite vers l'asymptote commune BC : d'où il suit qu'elles ont chacune deux points d'inflexion, et c'est par la recherche et la détermination de ces points que nous allons terminer cette discussion.

7. En cherchant quelles sont les valeurs de y qui rendent la formule (3) un maximum, on trouve qu'elles sont données par l'équation (*)

$$y^3 - 3dy^2 + 2dc^2 = 0. \qquad (6)$$

Son dernier terme étant positif, elle a toujours une racine réelle négative dont la valeur absolue est moindre que c. Il y a donc aussi toujours un point d'inflexion sur la branche

(*) En faisant $y = dx$, l'équation en x devient numérique, et c'est alors seulement qu'on peut y appliquer les diverses propositions qui sont relatives aux équations numériques. Tm.

inférieure ; ce qui devait être puisque les deux parallèles L'G' et BC sont l'une une tangente et l'autre une asymptote de cette partie de la courbe.

Les deux autres racines de (6), quand elles sont réelles, sont nécessairement positives, puisque le terme affecté de la première puissance de y manque dans l'équation.

D'ailleurs la dérivée de (6) est

$$y^2 - 2dy = 0, \qquad (7)$$

et ses racines sont

$$y' = 0, \qquad y'' = 2d.$$

Or, on sait qu'elles doivent séparer les racines de (6) quand celles-ci sont réelles ; donc l'une des deux racines positives doit, dans ce cas, tomber entre 0 et $2d$, et l'autre être plus grande que $2d$, à moins qu'elles ne soient l'une et l'autre égales à cette dernière quantité. D'ailleurs elles seront réelles, égales ou imaginaires, selon que l'on aura

$$d > \text{ou} = \text{ou} < \frac{1}{2}c\sqrt{2}.$$

8. L'équation (6), quand on y fait $y = 0$, donne un résultat positif, et comme elle peut se mettre sous la forme

$$y^2(y - d) - 2d(y^2 - c^2) = 0,$$

quand on y fera $y = c$, le résultat sera

$$c^2(c - d).$$

Il sera donc négatif, nul, ou positif, selon que l'on aura

$$d > c, \text{ ou } = c, \text{ ou } < c,$$

c'est-à-dire, comme nous l'avons déjà remarqué, suivant que le point A sera au-dessus de LG, ou sur LG, ou au-dessous.

Dans le premier cas (*fig.* 51), il y aura donc une racine réelle positive, comprise entre 0 et c, et par conséquent un point d'inflexion situé de chaque côté de l'axe des y, sur la branche supérieure ; puis une autre racine réelle positive, mais plus grande que c, puisqu'elle est plus grande que $2d$, et à laquelle il ne peut correspondre aucun point de la courbe, puisque l'abscisse est imaginaire.

Dans la seconde hypothèse, c est racine de (6) et les deux autres racines sont

$$y = c\left(1 \pm \sqrt{3}\right).$$

La première racine $c = 0$ indique le point A comme un des points cherchés, ce qui devait être. En effet, le point A de la figure 53 est un point double, et dans l'hypothèse actuelle, il est confondu avec le point K; l'axe tangent OY a donc en ce point A trois points communs avec la courbe, et les deux parties AV, AV′ y ont, par rapport à cet axe, des convexités opposées. C'est donc avec raison que le calcul indique ce point A en même temps que les points d'inflexion que l'on cherchait, puisqu'il a les propriétés qui les caractérisent.

Le point correspondant à la deuxième racine

$$c\left(1 + \sqrt{3}\right)$$

est imaginaire, puisque $y > c$.

Celui qui correspond à la troisième racine

$$-c\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

est sur la seconde branche, puisque son ordonnée est négative et $< c$.

Enfin dans la troisième hypothèse $d < c$ (*fig.* 52), les résultats de nos deux substitutions étant de même signe, il ne peut tomber de racine unique entre 0 et c. Quand on aura $d < \frac{1}{2} c\sqrt{2}$, les racines seront imaginaires; quand $d = \frac{1}{2} c\sqrt{2}$, elles sont égales à $2d$, ou égales à $c\sqrt{2}$. Ainsi elles correspondent à des points imaginaires, et quand $d > \frac{1}{2} c\sqrt{2}$, alors les deux racines sont réelles, mais l'une est plus grande que $2d$, c'est-à-dire plus grande que $c\sqrt{2}$, et à plus forte raison plus grande que c; donc l'autre est aussi plus grande que c; donc les deux points correspondants de la courbe sont imaginaires. Il n'y a donc alors d'autre point d'inflexion que celui qui correspond à la racine négative et qui est situé sur la branche inférieure. Le premier cas que nous avons examiné est donc le seul où il y ait deux inflexions sur chacune des deux branches.

9. Quand on donnera le rapport de d à c, le calcul fera connaître la position particulière de chaque point d'inflexion. Soit donné, par exemple,

$$d=2c,$$

en faisant $c=1$, l'équation (6) devient

$$y^3-6y^2+4=0.$$

Cette équation a une racine positive comprise entre 0 et 1, une autre comprise entre 5 et 6 et une racine négative comprise entre 0 et -1; et l'on pourra, par les méthodes connues, trouver les valeurs aussi approchées qu'on voudra de la première et de la troisième racine.

Mais il sera souvent plus court et surtout plus convenable, dans une question toute géométrique, de déterminer les racines de (6) par des intersections de courbes du second degré. On les obtiendra, par exemple, en augmentant de d les ordonnées communes au cercle dont l'équation est

$$y^2+x^2-4dx-2\frac{d^2-c^2}{d}y=0,$$

et la parabole donnée par

$$y^2=dx.$$

10. Remarquons qu'il suffira de connaître l'ordonnée d'un point d'inflexion pour déterminer la position exacte de ce point.

Proposons-nous, en effet, de déterminer, dans le cas de la figure 53, la position de ce point, donnée, comme nous l'avons vu, par la valeur

$$y=c(1-\sqrt{3}).$$

Sur AK′, comme diamètre, décrivons une demi-circonférence : faisons $AS' = AS = \sqrt{3}$, et la parallèle S′I à BC contiendra les points d'inflexion cherchés. Faisons $OK'' = OK'$, et menons par le point A une parallèle à cette droite, elle déterminera sur S′K″ le point d'inflexion I. Si nous joignons ensuite I au point Z, déterminé par la rencontre des perpendiculaires en N et en A sur BC et sur AI, la perpendiculaire en I sur la droite ZI sera, par une construction connue (*), tangente à la courbe au même point.

Note sur la conchoïde et autres courbes de ce genre.

1. Supposons qu'une droite mobile, de longueur constante, soit inscrite dans la zone formée par deux cercles concentriques, situés dans le même plan, il est évident, 1° que chaque point de la droite décrit un cercle concentrique aux deux cercles donnés; 2° si du centre on abaisse une perpendiculaire sur la droite, dans une quelconque de ses positions, le pied de la perpendiculaire est le point de contact de la droite mobile avec son enveloppe; 3° si par chaque extrémité de la droite on mène une tangente au cercle sur lequel se trouve cette extrémité, le lieu du point de rencontre des deux tangentes est un cercle concentrique; 4° les normales de tous les cercles décrits par les points de la droite, et relatives à une même position, se coupent toutes en un même point, centre de tous les cercles.

2. Supposons qu'une droite mobile, de longueur constante, soit inscrite dans la zone limitée par deux lignes quelconques, continues ou discontinues, même tracées à la main libre et situées dans un même plan, soient M et M′, les deux extrémités de la droite, dans une quelconque de ses positions, et soit menée par M une normale à la première ligne, et

---

(*) Voir page 290.

par M′ une normale à la deuxième ligne, les normales se rencontreront, généralement parlant, en un point O. Du point O comme centre avec les rayons OM, OM′, décrivons deux cercles ; comme ils sont tangents aux deux lignes, la droite MM′ dans la position infiniment voisine peut être considérée comme si elle se mouvait entre les deux cercles ; donc, en conséquence de ce qui précède (1) : 1° les normales de toutes les lignes décrites par les points de la droite mobile, et relatives à une position donnée, se coupent en un même point ; 2° en abaissant de ce point de rencontre une perpendiculaire à la droite, on a le point de contact de la droite avec son enveloppe ; 3° en menant par les extrémités de la droite des tangentes aux lignes données, la normale du lieu géométrique du point d'intersection des tangentes passera encore par le point de rencontre des normales.

3. Les applications sont nombreuses ; indiquons-en quelques-unes : *a*) Les cordes, de longueur constante, inscrites dans une conique, touchent, généralement parlant, une ligne du huitième ordre ; le point de contact pour chaque corde est la projection sur cette corde du point de rencontre des deux normales qui passent par les extrémités de la corde. Le système de deux droites représentant une section conique, le problème traité pag. 265, t. Ier, et pag. 225, t. II, est un cas particulier. Chaque point de la droite décrit une ellipse, proposition déjà connue de Proclus. Ce qui donne un moyen de mener une tangente à l'ellipse ainsi décrite.

b) La conchoïde est une courbe telle que les cordes inscrites, d'égale longueur (module) ont pour enveloppe un point (pôle) ; donc ce pôle est constamment la projection sur les cordes, du point de rencontre des deux normales qui passent par les extrémités de la corde. Tous les points de la corde mobile décrivent des conchoïdes de divers modules ; lorsque le module est nul, la conchoïde devient une droite (base). Ainsi, pour mener une tangente à la conchoïde par un point donné sur cette ligne, on cherche l'intersection de la base avec le rayon vecteur qui passe par le point donné ; par ce point d'intersection on élève une perpendiculaire à la base, et par le pôle une seconde perpendiculaire au rayon vecteur ; la droite qui joint le point d'intersection des deux perpendiculaires, et le point donné, est une normale à la conchoïde ; on a donc aussi la tangente. Il est à remarquer que le lieu géométrique du point d'intersection est une parabole passant par le pôle, et dont le paramètre est égal à quatre fois la distance du pôle à la base.

4. En prenant pour base un cercle, plaçant le pôle sur le cercle, et opérant avec un module comme pour la conchoïde, on obtient une ligne nommée le *limaçon* de Pascal, à laquelle on peut mener des normales et des tangentes par la méthode précédente ; chaque ligne peut servir de base, et on obtient la conchoïde correspondante. On se sert de cette espèce de conchoïdes dans les arts du dessin pour mener une tangente à une ligne quelconque, par un point situé sur la ligne.

5. Proclus, philosophe platonicien du v^e siècle, attribue la découverte de la conchoïde à Nicomède, dont les ouvrages sont perdus, et qui vivait, selon les uns, 150 ans avant l'ère vulgaire, et selon les autres un ou deux siècles après. C'est au moyen de cette courbe que Nicomède résolvait les deux problèmes, si célèbres chez les anciens, de la trisection de l'angle et des deux moyennes proportionnelles. Viète est le premier qui ait remarqué qu'on pouvait ramener à ces deux problèmes la résolution des équations du troisième et du quatrième degré. Voici ses paroles : « Generaliter, id verum est, opere saltem alterutro, vel constructionis duarum mediarum continue proportionalium interdatas, vel sectionis anguli in tres partes æquales, omnia problemata, alioqui non solublia, explicari, in quibus cubi solidis, vel quadrato-quadrata plano planis sine adfectione vel cum adfectione adæ-

quantur. » (Pag. 256, édition de Schooten, 1646, *Supp. geom.*, prop. XXV.)

Viète se sert du mot *affectio* pour exprimer qu'une puissance est augmentée ou diminuée d'autres puissances de degré moindre; ainsi il dira que dans ce binôme $x^2 + dx$, le terme x^2 est *affecté* de la racine x multipliée par d.

Newton, le premier qui ait donné de si admirables conseils, et de plus admirables exemples pour la solution analytique des problèmes, établit une distinction très-importante entre la simplicité *algébrique* et la simplicité *mécanique*. La première consiste à obtenir des lignes dont les équations soient du degré le moins élevé et renfermant le plus petit nombre de termes possibles; la seconde consiste à n'avoir besoin que du moindre nombre d'instruments, et les moins compliqués pour tracer les lignes nécessaires à la solution. Ainsi la parabole réductible à deux termes est *algébriquement* plus simple que le cercle, qui exige au moins trois termes; mais *mécaniquement* considéré, le cercle est d'une description plus facile que la parabole; de même la conchoïde, ligne du quatrième degré, est moins simple, algébriquement parlant, que la parabole, ligne du second degré; mais, mécaniquement, elle est plus simple que la parabole. C'est ce qui a engagé Newton à adopter la conchoïde, de préférence aux coniques, pour construire les équations du troisième et du quatrième degré. Nous engageons à lire la *Construction linéaire des équations* dans la traduction française que l'on doit à Noël Beaudeux de l'*Arithmétique universelle* (*). C'est surtout aux élèves de l'École normale que nous recommandons la lecture assidue de cet ouvrage et celle de l'introduction à l'analyse des infinis d'Euler, deux productions qui font tant d'honneur à l'esprit humain. C'est dans l'étude des grands maîtres qu'ils trouveront les principes

(*) Arithmétique universelle de Newton, traduite du latin en français, avec des notes explicatives. 2 vol. in-4. Paris, 1802. (Tome II, p. 52.)

philosophiques de la science ; là et nulle part ailleurs, et non pas dans les écrits parfumés de nos petits-maîtres qui, simulant la grandeur des idées, la profondeur de la pensée par des périodes tudesques, d'une longueur, d'une obscurité étudiées, essayent d'introduire dans la plus limpide, la plus simple des dialectiques, le langage précieux, dont un des plus judicieux philosophes du grand siècle, dont Molière a déjà fait bonne justice. Les élèves qui auraient le malheur d'entrer dans cette prétendue voie philosophique, auraient découvert positivement le moyen le plus certain de se fausser systématiquement l'esprit. En leur donnant cet avis, en les prémunissant contre les dangers d'une telle direction, je crois remplir un devoir de conscience, et, s'ils s'égarent, ce ne sera pas faute d'avertissements.

6. La considération du mouvement, pour apprendre à mener les tangentes, imaginée par Descartes pour les trochoïdes (roulettes), employée aussi par Roberval, a été dans ces derniers temps très-généralisée par M. Chasles (Voy. Aperçu historique pour l'origine et le développement des méthodes en géométrie, p. 548 (1837). Tm.

PROBLÈMES D'EXAMEN.

(Fin, v. p. 205.)

SOLUTIONS DE M. GUILMIN,
Ancien élève de l'École normale, professeur de mathématiques.

Du parallélogramme inscrit à une ellipse.

1. Les diagonales d'un parallélogramme inscrit à une ellipse sont des diamètres, car ce sont deux cordes se coupant mutuellement en deux parties égales ; ce qui ne peut arriver qu'à deux diamètres.

La réciproque est vraie. On obtient un parallélogramme inscrit à l'ellipse en joignant deux à deux les extrémités de deux diamètres; en effet la figure est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en deux parties égales.

2. Les côtés adjacents d'un parallélogramme inscrit sont toujours parallèles à deux diamètres conjugués dirigés suivant les lignes qui joignent deux à deux les milieux des côtés opposés. En effet, chacune de ces lignes est un diamètre puisqu'elle joint les milieux de deux cordes parallèles, et les deux diamètres sont conjugués, car chacun divise en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre.

3. Les côtés d'un rectangle inscrit sont parallèles aux axes. En effet, les diamètres conjugués auxquels ils sont respectivement parallèles, devant être perpendiculaires entre eux, ne sont autres que les axes de l'ellipse. De là, un moyen bien simple d'inscrire un rectangle; chacun des axes divise les deux côtés qu'il traverse en deux parties égales.

4. Si la figure est un carré, chaque sommet est à égale distance des deux axes. On obtiendra donc un carré inscrit dans une ellipse en menant les diamètres bissecteurs des angles des axes et joignant deux à deux leurs extrémités. Ce carré est le seul que l'on puisse inscrire.

5. Deux rectangles inscrits peuvent-ils avoir même surface? Soient R, R′ deux rectangles qui satisfassent à cette condition, connaissant R, il faut construire R′; soient x,y, les coordonnées d'un sommet de R ; x',y' les coordonnées d'un sommet de R′; on a $R = 4xy$, $R' = 4x'y'$. On devra avoir $xy = x'y'$ (1) avec $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ (2), $a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$ (3). L'égalité (1) revient à $x^2y^2 = x'^2y'^2$. De (2) on tire

$$y^2 = \frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2}, \text{ d'où } x^2y^2 = \frac{b^2x^2(a^2 - x^2)}{a^2};$$

de même

$$x'^2y'^2 = \frac{b^2x'^2(a^2 - x'^2)}{a^2},$$ on doit donc avoir $x^2(a^2 - x^2)$

$= x'^2(a^2 - x'^2)$, d'où $a^2x^2 - x^4 = a^2x'^2 - x'^4$ qui revient à $a^2(x^2 - x'^2) - (x^4 - x'^4) = 0$, égalité qui sera satisfaite en prenant $x^2 = x'^2$, d'où $x = \pm x'$, ou $a^2 - (x^2 + x'^2) = 0$, car elle peut s'écrire $(x^2 - x'^2)(a^2 - (x^2 + x'^2)) = 0$. En prenant $x' = \mp x$, on ne fera que passer d'un sommet de R à un autre sommet du même ; nous choisirons x' tel que $a^2 - (x^2 + x'^2) = 0$, d'où $x'^2 = a^2 - x^2 = \frac{a^2y^2}{b^2}$. On trouverait de même $y' = \frac{b^2x^2}{a^2}$. Ainsi, en partant du rectangle R pour en trouver un autre qui ait même surface, on en trouvera un et rien qu'un ; car $x' = \pm\frac{a}{b}y$, $y' = \pm\frac{b}{a}x$, ne donnent qu'un rectangle ; les permutations des signes faisant simplement passer d'un sommet à un autre du rectangle construit avec les premières valeurs adoptées.

Du losange inscrit.

6. Il suffit de tracer deux diamètres rectangulaires et de joindre les quatre extrémités deux à deux. Tous les losanges inscrits sont équivalents deux à deux, il y en a un maximum et un minimum, qui est le carré inscrit.

Du quadrilatère maximum inscrit.

7. On appelle ainsi un quadrilatère inscrit ayant la plus grande surface possible.

Dans une telle figure chaque diagonale doit être parallèle aux deux tangentes menées par les sommets opposés.

En effet soit IADC (*fig.* 46) un quadrilatère ne remplissant pas cette condition, la diagonale AC, par exemple, n'étant pas parallèle à la tangente en I. Je construis la tangente EF parallèle à AC et soit B son point de contact qui est par hypothèse différent de I ; joignons BA, BC ; le triangle BAC a évidemment une surface plus grande que IAC et le quadrilatère BADC est donc plus grand que IADC ; donc celui-ci qui ne remplit pas la condition indiquée n'est pas maximum. Cette condition est donc nécessaire.

Supposons que le quadrilatère BADC la remplisse ; les tangentes EF, GH menées aux sommets opposés B et D étant parallèles à la même droite AC, sont parallèles entre elles, par suite BD est un diamètre; il en est évidemment de même de AC ; tout quadrilatère qui remplit les conditions indiquées est donc un parallélogramme.

Mais la ligne BOD joignant le centre au point de contact d'une tangente est le diamètre des cordes parallèles à cette tangente EF, laquelle est parallèle à AC ; donc pour un pareil parallélogramme les diagonales sont des diamètres conjugués. Soit BOA $= \gamma$. La surface du parallélogramme équivaut à quatre triangles tels que BOA. Donc si l'on pose BO$=b'$ AO$=a'$, on a $\text{ABCD}=4.\dfrac{a'b'\sin\gamma}{2}=2a'b'\sin\gamma=2ab$; (a,b), étant les demi-axes de l'ellipse. Les surfaces de tous les parallélogrammes satisfaisant à la condition indiquée sont égales ; donc chacun d'eux est un maximum (*).

Il est facile de voir que cette condition est remplie lorsque les deux diagonales du parallélogramme sont deux diamètres conjugués. La réciproque vient d'être prouvée, donc on peut dire : pour qu'un quadrilatère inscrit soit maximum, il faut et il suffit que les deux diagonales soient deux diamètres conjugués.

8. *Remarque*. Les quatre tangentes aux sommets d'un parallélogramme maximum forment un parallélogramme, et chacune d'elles est divisée en son milieu par le point de contact. En effet, EFGH est un parallélogramme, et DG $=$ FB ; de même, DG$=$BE, donc FB$=$BE.

La réciproque est vraie.

Si les côtés d'un parallélogramme circonscrit sont divisés

(*) De tous ces parallélogrammes équivalents, quel est celui dont le périmètre est un minimum ou un maximum? Tm.

en deux par les points de contact, le quadrilatère intérieur, formé en joignant ceux-ci deux à deux, est un parallélogramme maximum inscrit. En effet, en se servant toujours de la même figure, si l'on tire AC, on voit que FACE est un parallélogramme, puisque $AF = EC$. AC est donc un diamètre parallèle à FE et GH; donc le parallélogramme ABCD est tel que chacune de ses diagonales est parallèle aux tangentes menées par les sommets opposées; donc, etc....

9. Les diagonales d'un rectangle étant égales, on obtiendra un rectangle maximum en employant un système de diamètres conjugués égaux. Comme ce système est unique, il n'y a qu'un rectangle maximum inscrit.

10. Le parallélogramme qui a les axes pour diagonales est un losange maximum.

11. Si on emploie les formules que nous avons trouvées pour chercher un rectangle équivalent au rectangle maximum, on trouve ce rectangle lui-même:

Il est à remarquer que deux rectangles quelconques inscrits équivalents entre eux ont leurs sommets placés symétriquement deux à deux, par rapport aux côtés de ce rectangle maximum.

12. Circonscrire à un parallélogramme une ellipse minimum.

Il suffit pour cela de construire une ellipse pour laquelle notre parallélogramme soit un parallélogramme inscrit maximum, et conséquemment, d'après ce qui a été dit, de construire nne ellipse pour laquelle les deux diagonales du parallélogramme soient deux diamètres conjugués.

Soit s la surface du parallélogramme; a, b les demi-axes de l'ellipse dont nous venons de parler; on a $s = 2ab$. Cette courbe étant déterminée par la condition qui a servi à la construire, le parallélogramme ne sera plus maximum pour aucune des autres ellipses circonscrites. Soit a', b' les demi-axes de l'une de ces dernières, on a $s < 2a'b'$, qui serait la surface de l'un des parallélogrammes maximum inscrits dans cette courbe. Donc $2ab < 2a'b'$, d'où $\pi ab < \pi a'b'$.

Donc la première ellipse est plus petite que la deuxième; donc, etc.

Du parallélogramme circonscrit.

13. Soit ABCD (*fig.* 47) un parallélogramme circonscrit. La ligne des contacts EH de deux tangentes parallèles est un diamètre; il en est de même de GF; donc le quadrilatère EFHG, obtenu en joignant deux à deux les points de contact des côtés adjacents, est un parallélogramme inscrit. La ligne IK qui joint les milieux de deux de ses côtés opposés EF, GH, est dirigée suivant un diamètre, puisqu'elle joint les milieux de deux cordes parallèles. Mais KOI, prolongée au delà du point I, ira passer au point B, puisque le point de concours de deux tangentes, le milieu de la ligne de leurs points de contact et le centre de l'ellipse sont toujours en ligne droite; KOI, prolongée au delà de H, ira de même passer en D. Donc la diagonale BD de ABCD est dirigée suivant un diamètre; il en est de même de AC. Mais GE, FH sont parallèles à BIKD, donc le diamètre dirigé suivant AC est le diamètre des cordes parallèles à celui qui est dirigé suivant BD; donc ces deux diagonales sont dirigées suivant deux diamètres conjugués.

Calculons la surface de ABCD. Soit $AOB = \gamma$, on a

$$ABCD = 4ABO = \frac{4.\,BO.\,AO}{2}\sin\gamma = 2BO\,.\,AO\sin\gamma.$$

Or, si nous désignons par a', b' les demi-diamètres conjugués dirigés suivant AO, BO, nous aurons

$$AO = \frac{a'^2}{OP},\ BO = \frac{b'^2}{OI};$$

donc $\quad \text{ABCD} = \dfrac{2a'^2b'^2 \sin\gamma}{\text{OI.OP}} = \dfrac{2a'^2b'^2\sin^2\gamma}{\text{OI.OP}\sin\gamma} = \dfrac{2a^2b^2}{\text{OI.OP}\sin\gamma}.$

Le dénominateur est la surface du parallélogramme IOPE, qui est contenu quatre fois dans le parallélogramme EGHF ;

donc $\text{ABCD} = \dfrac{2a^2b^2}{\left(\dfrac{\text{EGHF}}{4}\right)}$, d'où

$$\text{ABCD} \times \text{EGHF} = 8a^2b^2,$$

ce qui fait voir que le produit de la surface du parallélogramme circonscrit à une ellipse par celle dn parallélogramme inscrit formé par les lignes de contact est un nombre invariable pour une ellipse donnée.

14. Par suite, ABCD sera minimum quand EFHG sera maximum ; donc, pour avoir un parallélogramme circonscrit minimum, il suffit de mener des tangentes aux extrémités de deux diamètres conjugués quelconques, car alors le parallélogramme inscrit correspondant est un maximum.

Soient R et r ces deux parallélogrammes, on a $R \times r = 8a^2b^2$; mais nous avons trouvé $r = 2ab$, donc $R = 4ab$. Donc la surface d'un parallélogramme circonscrit minimum quelconque est égale au rectangle des axes.

Du rectangle circonscrit.

15. Les côtés d'un tel rectangle étant des tangentes rectangulaires entre elles, les sommets en sont situés sur la circonférence décrite du centre de l'ellipse avec le rayon $\sqrt{a^2+b^2}$. On construira donc cette circonférence. Par un point A quelconque de cette ligne, on mènera deux tangentes à l'ellipse, puis deux tangentes respectivement parallèles à celles-là ; les trois autres sommets se trouveront d'eux-mêmes sur la circonférence.

La surface d'un rectangle circonscrit est évidemment

$2(a^2+b^2)\sin\gamma$, en désignant par γ l'angle des demi-diagonales, dont chacune est égale à $\sqrt{a^2+b^2}$.

16. Le rectangle sera maximum pour $\sin\gamma = 1$, alors les diagonales sont dirigées suivant les axes. Le parallélogramme inscrit correspondant ayant alors ses côtés parallèles aux axes est un rectangle.

On a ici $R = 2(a^2+b^2)$, d'où $r = \frac{8a^2b^2}{2(a^2+b^2)} = \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$, ce qui est la surface du carré inscrit à l'ellipse. Il n'en faut pas conclure que ledit rectangle est le carré lui-même, il est facile de vérifier que c'est au contraire le rectangle inscrit de même surface que ce carré, et dont un sommet a pour coordonnées $x' = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y' = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

17. Le rectangle circonscrit sera minimum quand $\sin\gamma$ aura la valeur qui convient au plus petit angle de deux diamètres conjugués, c'est-à-dire $\frac{2ab}{a^2+b^2}$. Par suite, la surface de ce rectangle est $2(a^2+b^2)\times\frac{2ab}{a^2+b^2} = 4ab$. On retrouve ici la surface d'un parallélogramme circonscrit minimum quelconque, ce qui devait être. On sait que les deux diamètres conjugués qui forment le plus petit angle sont les diamètres conjugués d'égale longueur ; donc le rectangle minimum circonscrit et le rectangle maximum inscrit se trouvent avoir les mêmes diagonales.

18. Le rectangle maximum est un carré, puisque c'est un rectangle dont les diagonales se coupent à angles droits. C'est le seul carré que l'on puisse circonscrire, car les axes étant les seuls diamètres conjugués rectangulaires, un carré circonscrit doit avoir ses sommets sur les axes et en même temps sur la circonférence, lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'ellipse, conditions qui ne peuvent être

remplies que par le rectangle dont nous nous occupons.

19. Inscrire dans un parallélogramme donné ABCD une ellipse maximum. On démontrerait, comme pour les autres problèmes analogues, qu'il suffit de construire une ellipse pour laquelle ABCD soit un parallélogramme circonscrit minimum.

Fig. 47. Supposons cette ellipse construite. Le parallélogramme EFHG, formé par les lignes des contacts consécutifs, doit être maximum; donc ses diagonales doivent être des diamètres conjugués, et les points de contact E, F, H, G doivent être les milieux des côtés du polygone circonscrit. Pour construire cette ellipse, il faut donc joindre les milieux des côtés opposés du parallélogramme donné, et se servir de ces deux lignes comme d'un système de diamètres conjugués

---

RELATIONS D'IDENTITÉ

Et équations fondamentales relatives aux courbes du second degré.

(Suite, voir p. 106.)

Théorie analytique des pôles et polaires; proportions et progressions harmoniques.

XXV. *Définition* 1. La *distance réciproque* de deux points, c'est l'unité divisée par la distance des deux points.

Définition 2. La moyenne *distance réciproque* de plusieurs points en ligne droite à un point fixe sur la même droite, c'est la somme algébrique des distances réciproques divisée par le nombre des points.

Définition 3. Le point de *moyenne distance réciproque*, relativement à un système de points en ligne droite est un point tel que sa distance réciproque est égale à la moyenne distance réciproque du système des points.

XXVI. Théorème. Supposons qu'un nombre quelconque de points se succèdent en ligne droite, et pour fixer les idées ne prenons d'abord que quatre points A, B, C, E. Les distances réciproques des trois derniers points au premier A, considéré comme point fixe, sont $\frac{1}{BA}$, $\frac{1}{CA}$, $\frac{1}{EA}$; prenons sur la même droite le point D de moyenne distance réciproque ; de sorte que d'après la définition 3ᵉ l'on ait $\frac{1}{BA}+\frac{1}{CA}+\frac{1}{EA}=\frac{3}{DA}$ (a) ; si l'on projette *coniquement* le point fixe A et les quatre autres points B, C, D, E, sur une autre droite, la projection D′ du point de moyenne distance D sera le point de moyenne distance des points projetés B′, C′, E′, relativement à A′ projection de A.

Démonstration. Soit O le point de départ des lignes projetantes OAA′, OBB′, OCC′ etc. ; faisons $OA=r$, $OB=r'$, $OC=r''$, $OD=r'''$, $OE=r^{iv}$; $BA=b$, $CA=c$, $DA=d$, $EA=e$; et soit h la perpendiculaire abaissée de O sur la droite AE ; on aura évidemment les égalités, $bh=rr'\sin(r,r')$, $ch=rr''\sin(r,r'')$, $dh=rr'''\sin(r,r''')$, $eh=rr^{iv}\sin(r,r^{iv})$; l'équation (a) devient $cde+bde+bcd=3bce$

$$ce(d-b)+be(d-c)+bc(d-e)=0. \qquad (b)$$

ou

Or $h(d-b)=r'r'''\sin(r',r''')$, $h(d-c)=r''r'''\sin(r'',r''')$; $h(d-e)=r'''r^{iv}\sin(r''',r^{iv})$; substituant ces valeurs et celles de b, c, e dans l'équation (b), les six lignes r, r', r'', r''', r^{iv}, h disparaissent et l'on a cette équation entre les sinus :

$$\sin(r,r'')\sin(r,r^{iv})\sin(r',r''')+\sin(r,r')\sin(r,r^{iv})\sin(r'',r''') = \sin(r,r')\sin(r,r'')\sin(r''',r^{iv}). \qquad (c)$$

La même relation (c) subsistera donc pour la droite A′B′C′D′E′, or, en rétablissant les facteurs on peut, en suivant une marche inverse, revenir de l'équation (c) d'abord à l'équation (b), et ensuite à l'équation (a), donc, etc. La même démonstration subsiste quel que soit le nombre des points. Donc le théorème est démontré généralement.

Observation 1. Lorsque le point O est situé à l'infini, les projections deviennent *cylindriques* et le théorème est d'une évidence intuitive.

Observation 2. Lorsque le point fixe A s'éloigne à l'infini, les distances b, c, d, e deviennent égales et infinies, mais les différences $d-b$, $d-c$, $d-e$ restent finies et l'équation (b) se change en celle-ci $BD+CD-DE=0$; le point D est donc alors le point de moyenne distance directe des points B, C, E. Le point de moyenne distance inverse est dans ce cas le même que le point de distance directe.

Observation 3. Soit toujours A le point fixe ; B et D deux autres points, et C leur point de moyenne distance réciproque, de sorte que les équations (a) et (b) deviennent $\frac{2}{AC}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}$ et $AB.CD=AD.BC$; c'est-à-dire le segment moyen BC multiplié par la droite entière AD est égal au produit des deux segments extrêmes AB et CD : ainsi la droite AD est divisée *harmoniquement*, et lorsque le point A s'éloigne à l'infini on a $BC=CD$.

Observation 4. Les points A et C sont dits points *conjugués;* de même B et D.

XXVII. Théorème. Si par un point fixe A situé dans le plan d'une conique, on mène une droite quelconque, coupant cette conique en deux points B et D; si l'on prend le point C, harmoniquement conjugué du point A, relativement aux points B et D le lieu géométrique du point C est une droite.

Démonstration. 1^er^ Cas. Le point fixe A est l'origine ;

et soit $y+rx=0$ l'équation de la droite mobile ; alors l'équation (17) (XX) des points d'intersection devient $(Ar^2-Br+C)x^2+(E-Dr)x+F=0$.

Désignons par X et Y les coordonnées du point C harmoniquement conjugué ; On a donc $X=\frac{2F}{Dr-E}$; et $Y+rX=0$; d'où $r=-\frac{Y}{X}$. En remplaçant Y et X par y et x, éliminant r, on obtient pour le lieu géométrique cherché $Dy+Ex+2F=0$ qui est l'équation d'une droite.

2ᵉ Cas. Le point fixe A a pour coordonnées x', y' ; transportons l'origine au point A. L'équation de la conique devient $Ay^2+Bxy+Cx^2+D'y+E'x+F'=0$; $D'=2Ay'+Bx'+D$; $E'=2Cx'+By'+E$; $F'=Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2+Dy'+Ex'+F$; donc l'équation du lieu géométrique des points conjugués sera $D'y+E'x+2F'=0$; revenant à la première origine, l'équation de cette droite sera $D'(y-y')+E'(x-x')+2F'=0$; mettant à la place de D', E', F' leurs valeurs et en faisant les réductions, on a finalement

$$y(2Ay'+Bx'+D)+(2Cx'+By'+E)+Dy'+Ex'+2F=0\,;$$

cette droite est la *polaire* du point A, qui est lui-même le *pôle* de la droite : nous verrons plus bas les raisons de ces dénominations.

Observation. Lorsque le point fixe A est sur la courbe, l'équation de la polaire est identique avec l'équation (17) de la tangente en ce point.

XXVIII. Théorème. Si par un point extérieur pris sur la polaire, on mène deux tangentes à la conique, la droite de contact, passe par le pôle.

Démonstration. Soient x', y' les coordonnées du pôle, x'', y'' un point pris sur la polaire, de sorte qu'on a

$$y''(2Ay'+Bx'+D)+x''(2Cx'+By'+E)+Dy'+Ex'+2F=0,$$

ou bien

$$y'(2Ay''+Bx''+D)+x'(2Cx''+By''+E)+Dy''+Ex''+2F=0;$$

le point x', y' est donc sur la droite qui a pour équation

$$y(2Ay''+Bx''+D)+x(2Cx''+By''+E)+Dy''+Ex''+2F=0,$$

mais cette droite est celle qui réunit les deux points de contact des tangentes menées par le point x'', y'' (XXIII bis); donc, etc.

Observation 1. Ce théorème peut s'énoncer ainsi : si plusieurs points sont en ligne droite ; leurs polaires se coupent en un seul point, *pôle* de la droite ; c'est ce qui a porté M. Servois à donner le nom de pôle à ce point, parce que la polaire tourne autour de ce point ; et depuis, M. Gergonne a donné le nom de *polaire* à la droite tournante ; dénominations généralement admises et même transportées dans la géométrie à trois dimensions.

Observation 2. La polaire d'un point et la droite lieu géométrique du point conjugué harmoniquement à ce point, relativement aux points d'intersection, sont une seule et même ligne. Cette coïncidence n'a lieu que dans les lignes du second degré et pas dans les lignes de degré supérieur, comme nous verrons à la fin de cet article où nous étudierons les propriétés des courbes en général. Mais nous devons déjà expliquer que par polaire, d'une ligne de degré m, on entend une certaine ligne de degré $m-1$, passant par les points de contact des $m(m-1)$ tangentes qu'on peut mener par un point fixe à une ligne de degré m.

XXIX. *Coordonnées du pôle, connaissant l'équation de la polaire.*

Soit $dy+ex+f=0$ l'équation de la polaire ; x', y' les coordonnées du pôle ; on aura

$$\frac{e}{d}=\frac{2Cx'+By'+E}{2Ay'+Bx'+D}$$

$$\frac{f}{d}=\frac{Dy'+Ex'+2F}{2Ay'+Bx'+D}$$

d'où l'on tire
$$x'=\frac{-nd+le+kf}{k'd+ke+mf}$$
$$y'=\frac{l'd-ne+k'f}{k'd+ke+mf} \qquad (22)$$

XXX. Théorème. Le diamètre qui passe par un point est conjugué à la polaire de ce point.

Démonstration. En supposant que ce point est l'origine des coordonnées, on ne limite pas la généralité du théorème; et dans ce cas l'équation du diamètre est $ky-k'x=0$ (IV) et l'équation de la polaire est $Dy+Ex+2F=0$,
$$p=\frac{k'}{k},\ q=-\frac{E}{D},$$
ainsi l'équation (5) (IX) est satisfaite; donc, etc.

XXXI. *Relation entre les coordonnées des points conjugués.* A étant un point situé sur le plan de la courbe et A′ le point d'intersection de la polaire de A avec le diamètre qui passe par A, les deux points A et A′ sont *conjugués*. Soient x', y' les coordonnées de A, et y, x les coordonnées de A′. On a pour équation du diamètre passant par A, $(y-y')(mx'-k)=(x-x')(my'-k')$; l'équation de la polaire peut se mettre sous la forme :
$$(y-y')(2Ay'+Bx'+D)+(x-x')(2Cx'+By'+E)+2F'=0;$$
de ces deux équations, on tire les valeurs de $y-y'$ et de $x-x'$ et enfin
$$x=\frac{Lx'-kF'}{L-mF'};\ y=\frac{Ly'-k'F'}{L-mF'}. \qquad (23)$$

Corol. Lorsque le point A est situé à l'infini, on a
$$x=\frac{k}{m},\ y=\frac{k'}{m},$$
coordonnées du centre; ainsi le centre est le point conjugué de tous les points situés à l'infini, ou en d'autres termes, le centre est le pôle de toutes les droites situés à l'infini et chaque diamètre est la polaire d'un point situé à l'infini sur le diamètre conjugué.

XXXII. *Théorèmes sur les poles et polaires.*

Théorème. Quatre points étant situés harmoniquement sur une droite, les polaires forment un faisceau harmonique, et *vice-versâ* quatre droites formant un faisceau harmonique, les quatre pôles sont situés harmoniquement sur une droite.

Démonstration. Sans rien ôter à la généralité de la proposition, nous pouvons supposer les quatre points A, B, C, D, situés sur l'axe des x, A étant l'origine des coordonnées et l'axe des y étant conjugué à l'axe des x ; soient x', x'', x''', les abscisses des points B, C, D ; les ordonnées sont nulles.

On a donc $$\frac{2}{x'''}=\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''} \qquad (A)$$

On a pour les équations des quatres polaires

Point A.... $Dy+Ex+2F=0$

B.... $Dy+x(2Cx'+E)+Ex''+2F=0$

C.... $Dy+x(2Cx''+E)+Ex''+2F=0$

D.... $Dy+x(2Cx'''+E)+Ex'''+2F=0$

Car, les axes des coordonnées étant conjugués, on a $B=0$; faisant $x=0$, on obtient quatre point ayant pour ordonnées,

$$-\frac{2F}{D};\ -\frac{2F}{D}-\frac{Ex'}{D};\ -\frac{2F}{D}-\frac{Ex''}{D};\ -\frac{2F}{D}-\frac{Ex'''}{D};$$

mais ces quatre points, en vertu de l'équation (A) sont situés harmoniquement, donc le faisceau est harmonique ; la réciproque se démontre de la même manière.

Observation. Lorsque les quatre droites $y=mx$; $y=nx$; $y=px$; $y=qx$ forment un faisceau harmonique, on a la relation $(m+p)(n+q)=2(mp+nq)$ et *vice versâ* (*V. p.*317, t. I).

XXXIII. Théorème. Un quadrilatère convexe ou non convexe, étant inscrit dans une conique, la polaire de l'intersection de deux côtés opposés passe par le point d'intersection de deux autres côtés.

Nous supprimons la démonstration qui est très-facile.

QUESTIONS D'EXAMEN.

PAR M. JACOB,
Capitaine d'artillerie.

—

THÉORÈME.

La perpendiculaire abaissée du foyer sur une corde, rencontre la directrice au même point que le diamètre conjugué de cette corde. (J'ai démontré cette propriété pour les trois courbes, dans ma géométrie analytique.) (*fig.* 62).

L'équation d'une corde CD quelconque étant

$$y = mx + n, \qquad (1)$$

Celle de son diamètre est

$$y = -\frac{b^2}{a^2 m}x. \qquad (2)$$

celle de la perpendiculaire abaissée du foyer sur la corde est

$$y = -\frac{1}{m}(x+c). \qquad (3)$$

L'élimination de y entre (2) et (3), nous donnera l'abscisse du point S où les droites FP et OV se rencontrent. Or, on trouve ainsi que

$$x = -\frac{a^2}{c}.$$

Le point S appartient donc à la directrice. C. Q. F. D.

L'ordonnée du point S est $y = \dfrac{b^2}{cm}$.

Les applications de ce théorème sont fréquentes. Entre autres choses, on en conclut que si du foyer on abaisse une perpendiculaire sur une corde; si l'on joint le point où cette perpendiculaire coupe la directrice avec le milieu de la corde, on aura la direction du diamètre de cette corde.

Considérons le diamètre VZ de la corde CD, comme une corde faisant partie d'un système de cordes parallèles. L'équation de VZ est

$$y = -\frac{b^2}{a^2 m}\, x. \qquad (2)$$

Du foyer F j'abaisse une perpendiculaire sur VZ; son équation est

$$y = \frac{a^2 m}{b^2}\,(x + c). \qquad (4)$$

Cette perpendiculaire FG va couper la directrice en un point U, dont l'abscisse est

$$x = -\frac{a^2}{c}$$

et l'ordonnée

$$y = \frac{a^2 m}{b^2}\left(c - \frac{a^2}{c}\right) = \frac{a^2 m\,(a^2 - b^2 - a^2}{b^2 c} = -\frac{a^2 m}{c}.$$

Donc, en joignant le point O au centre U, milieu de la corde VZ, on aura le diamètre du système des cordes dont VZ fait partie.

Mais l'équation de OU est de la forme $y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}$ $(x - x')$ qui devient, vu que $x' = 0, y' = 0$,

$$y = \frac{\frac{a^2 m}{c}}{\frac{a^2}{c}} \quad \text{ou} \quad y = mx.$$

Donc, le diamètre cherché est parallèle aux cordes que VZ divise en deux parties égales.

SUR LES FORMULES

qui donnent les expressions de sin (a±b), cos (a±b).

PAR M. THIBAULT,
Professeur de mathématiques.

Le but de cette note est de simplifier la discussion des formules qui donnent sin $(a \pm b)$, cos $(a \pm b)$. On n'a besoin d'y considérer aucune relation de grandeur entre a et b. Tous les cas possibles y sont ramenés seulement à trois dont l'enchaînement est des plus simples. Cette discussion d'ailleurs n'exige pas qu'on s'appuie sur les expressions de sin $(a-b)$, cos $(a-b)$ ni, par conséquent, que l'on établisse par une figure ces expressions dans aucun cas particulier.

Les formules qui expriment sin $(a-b)$ et cos $(a-b)$ rentrent dans celles qui donnent sin $(a+b)$ et cos $(a+b)$ en faisant b négatif; il suffit donc d'établir, pour toutes les valeurs possibles positives et négatives de a et b, ces deux dernières formules, qui sont :

$$\begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \end{aligned} \qquad (1)$$

1^er^ CAS. *a et b positifs et $< \frac{\pi}{2}$.*

Si on a $a+b<\frac{\pi}{2}$, les formules s'établissent directement par la figure connue.

Si on a $a+b>\frac{\pi}{2}$, soit $a=\frac{\pi}{2}-a'$, $b=\frac{\pi}{2}-b'$; il en résulte $a+b=\pi-(a'+b')$ et $a'+b'<\frac{\pi}{2}$. On a donc

$$\sin(a+b) = \sin(a'+b') = \sin a' \cos b' + \cos a' \sin b',$$
$$\cos(a+b) = -\cos(a'+b') = -\cos a' \cos b' + \sin a' \sin b';$$

égalités dont les derniers membres deviennent ceux de (1) en y remplaçant les sinus et cosinus de a' b' par les cosinus et sinus de a, b.

2ᵉ CAS. *a et b positifs quelconques.*

Il suffit de prouver que si les formules (1) sont vraies quand on y remplace l'un des arcs a par $a - \frac{\pi}{2}$, elles le sont aussi quand on y laisse a tel qu'il est ; car par là on ferait dépendre de proche en proche les formules (1), a et b étant positifs quelconques, de ces mêmes formules dans lesquelles on aurait diminué a et b de tous les quadrants qu'ils peuvent contenir. Or, comme alors on retomberait sur le premier cas, le deuxième cas se trouvera aussi démontré.

Prenons $a - \frac{\pi}{2} = a'$, on a :

$$\sin(a+b) = \sin(\pi + a' + b) = \cos(a'+b),$$
$$\cos(a+b) = \cos(\pi + a' + b) = -\sin(a'+b);$$

or, d'après notre hypothèse, les derniers membres de ces égalités sont égaux respectivement à

$$\cos a' \cos b - \sin a' \sin b,$$
$$-\sin a' \cos b - \cos a' \sin b,$$

expressions qui reviennent aux seconds membres de (1) à cause de $\sin a = \cos a'$, $\cos a = -\sin a'$.

3ᵉ CAS. *a et b quelconques positifs ou négatifs.*

En prenant les nombres entiers n, n' assez grands on peut toujours rendre positifs les arcs $2n\pi + a$, $2n'\pi + b$ que nous désignerons par a', b' ; on a donc

$$\sin(a+b) = \sin(a'+b') = \sin a' \cos b' + \cos a' \sin b'$$
$$\cos(a+b) = \cos(a'+b') = \cos a' \cos b' - \sin a' \sin b'$$

égalités dont les derniers membres deviennent ceux de (1), en y remplaçant les sinus et cosinus de a', b' par ceux de a, b, qui leur sont équivalents.

PROBLÈME.

Connaissant les rayons des cercles inscrit et circonscrit à un triangle et sa hauteur, trouver les côtés. (*Géométrie analytique de* Lefebure de Fourcy. 4[e] *édition, page* 140.)

PAR M. FAUDOT,
Ancien professeur de mathématiques dans les Colléges royaux, docteur ès-sciences.

Soient

h la hauteur, R le rayon du cercle circonscrit, r celui du cercle inscrit, x, y, z les côtés demandés.

Je fais $x+y+z=2p$; la surface du triangle $=$S, on a

$$\mathrm{R}=\frac{xyz}{4\mathrm{S}}\ (1),\qquad r=\frac{2\mathrm{S}}{x+y+z}\ (2),\qquad \mathrm{S}=\frac{xh}{2}\ (3),$$

$$\mathrm{S}=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}\qquad (4)$$

(1) et (3) donnent $2\mathrm{R}h=yz$, (2) et (3) $\frac{hx}{2r}=p$, (3) et (4)

$$\frac{hx}{2}=\sqrt{\frac{hx}{2r}\left(\frac{hx-2rx}{2r}\right)\left(\frac{hx-2ry}{2r}\right)\left(\frac{hx-2rz}{2r}\right)}$$

$$\frac{h^2x^2}{4}=\frac{hx}{2r}\left(\frac{hx-2rx}{2r}\right)\left(\frac{hx-2ry}{2r}\right)\left(\frac{hx-2rz}{2r}\right)$$

$$4r^4h=(h-2r)(hx-2ry)(hx-2rz),$$

$$4r^4h=h^3x^2-2rh^2xy-2rh^2x^2+4r^2hxy-2rh^2xz+$$
$$+4r^2hyz+4r^2hxz-8r^3yz,$$

$$4r^4=h^2x^2-2rhxy-2rhx^2-2rhxz+4r^2xy+4r^2yz+$$
$$+4r^2xz-8r^3\times 2\mathrm{R},$$

$$4r^4=h^2x^2-2rhx(x+y+z)+4r^2x(y+z)+8hr^2\mathrm{R}-16\mathrm{R}r^3.$$

Mais on a

$$x+y+z=\frac{hx}{r},\qquad y+z=\frac{hx-rx}{r};$$

remplaçant, on a

$$4r^4=h^2x^2-2h^2x^2+4rhx^2-4r^2x^2+8hr^2R-16Rr^3,$$
$$x^2(h^2-4rh+4r^2)=4r^2(-r^2+2Rh)-16Rr^3,$$
$$x^2(h-2r)^2=4r^2(2hR-4Rr-r^2),$$
$$x=\pm\frac{2r\sqrt{2hR-4Rr-r^2}}{h-2r}.$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 39 (page 395, t. Ier).

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des ponts et chaussées.

NOTA. Cet article est disposé de manière qu'on puisse l'intercaler dans le texte du théorème sur les développées des ellipses et des hyperboles, dont il forme un 2e corollaire. (Voir p. 223.)

2e COROLLAIRE. — On peut démontrer ici d'une manière bien simple le théorème 39. Il s'agit de faire voir que *la courbe enveloppe* c'est-à-dire le lieu des intersections successives *d'une droite de longueur constante s'appuyant sur les côtés d'un angle droit est une épicycloïde engendrée par le point d'une circonférence roulant intérieurement sur une circonférence quatre fois plus grande.*

Considérons :

Le rectangle construit sur les longueurs ξ, η interceptées par la droite mobile sur les deux axes ;

La circonférence de rayon γ ayant pour centre l'origine ;

Et celle de rayon $\frac{1}{4}\gamma$ ayant pour diamètre la demi-diagonale aboutissant au sommet opposé à ce point.

On vérifiera sans peine les circonstances suivantes :

1° Les deux circonférences sont tangentes entre elles ;

2° La plus grande est quadruple de l'autre ;

3° Cette dernière rencontre la génératrice en deux points, l'une étant le milieu commun des diagonales du rectangle, et l'autre le pied de la perpendiculaire abaissée du point de contact sur la génératrice ;

4° Ce deuxième point est sur l'enveloppe (*), car on tire des données de la figure (que le lecteur est prié de faire) par la comparaison d'une suite de triangles rectangles, pour valeur de l'abscisse et de l'ordonnée, $x = \gamma\cos^3\psi$, $y = \xi\sin^3\psi$;

5° Les angles compris entre les rayons de la petite circonférence menés aux points correspondants du contact et de l'enveloppe (angles dont la somme équivaut à quatre angles droits) sont doubles des angles supplémentaires l'un de l'autre compris entre les diagonales, et ceux-ci sont doubles des angles formés avec les axes par la diagonale menée au point de contact ;

6° Enfin il résulte des relations ci-dessus entre les angles et du rapport des rayons que les arcs de la grande circonférence interceptés entre les axes et le point de contact, sont respectivement égaux à ceux de la petite interceptés entre le point de contact et celui de l'enveloppe. C. Q. F. D.

La coïncidence entre l'enveloppe et l'épicycloïde résulte de l'égalité et de l'*invariabilité* de longueur des diagonales et de la construction même au moyen de laquelle s'obtient le *point de l'enveloppe* sur chaque génératrice ou *enveloppée*.

Dans le cas où l'on a $\xi^2 - \eta^2 = \gamma^2$, les diagonales du *rectangle* étant encore égales entre elles (ou l'angle des axes étant droit) leur longueur varie d'une position à l'autre de l'enveloppée. Il

(*) Voir p. 289, 3

existe néanmoins alors un mode analogue de construction de l'enveloppe consistant dans le théorème suivant :

La perpendiculaire à la diagonale qui passe par l'origine menée par le sommet du rectangle opposé à ce point, rencontre l'autre diagonale ou l'enveloppée en un point qui appartient à l'enveloppe.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 64 (p. 228),

et recherches de lieux géométriques y relatifs.

PAR M. MERLIEUX (ÉDOUARD).

—

1. *Étant donnés deux axes* OX, OY (*fig.* 55), *perpendiculaires entre eux, soient construits sur l'angle droit* YOX, *autant de rectangles que l'on voudra* OACB, OA′C′B′, OA″C″B″,... *dont les côtés présentent la même différence de longueur; si, des sommets* C, C′, C″,... *on abaisse des perpendiculaires sur les diagonales* AB, A′B′, A″B″,... *opposées à l'angle commun* O, *et qu'on les prolonge suffisamment, elles iront toutes se couper au même point.*

En effet, soient les équations de AC et de BC :

$$y=m,\ x=n,$$

d'où celle de AB :

$$\frac{y}{m}+\frac{x}{n}=1.$$

De même soient représentées les droites A′C′, B′C′, A′B′ par les équations :

$$y=m',\ x=n',\ \frac{y}{m'}+\frac{x}{n'}=1.$$

Les perpendiculaires à AB et à A′B′, respectivement abaissées des points C et C′ seront :

$$y-m=\frac{n}{m}(x-n),\qquad y-m'=\frac{n'}{m'}(x-n'),$$

ou bien

$$my-nx=k\,(m+n),$$ en posant $m-n=k$, quantité constante ;

et

$$m'y-n'x=k\,(m'+n'),\ \text{car } m'-n'=m-n=k.$$

Résolvant ces deux équations :

$$y=\frac{n'k(m+n)-nk(m'+n')}{mn'-m'n}=k,$$

$$x=\frac{m'k(m+n)-mk(m'+n')}{mn'-m'n}=-k,$$

valeurs indépendantes de m et de n, donc, etc. C. Q F. D.

2. On voit, en éliminant k, que tous les points de concours se trouvent sur la bissectrice OO′ de l'angle Y$\mathrm{O}x$.

3. Le lieu du point C est parallèle à la bissectrice de l'angle YOX ; c'est la droite MN représentée par $y-x=k$.

4. Mais celui du pied D de la perpendiculaire abaissée de C sur AB est une courbe du troisième degré. Pour déterminer son équation, on a les trois relations :

$$my-nx=m^2-n^2,\quad mx+ny=mn,\quad m-n=k,$$

entre lesquelles, éliminant m et n, il vient, toutes réductions faites :

$$[(k+x)x-(k-y)y]\,(y-x-2k)=k\,(k-y)\,(k+x).$$

Cette équation se simplifie en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes au point de concours des droites, c'est-à-dire en remplaçant $x+k$ par x, et $y-k$ par y ; on a alors, pour l'équation de la courbe rapportée aux axes O′X′, O′Y′ :

$$y^3-y^2x+yx^2-x^3+k\,(y^2-yx+x^2)=0.$$

Quand $k=0$, il reste seulement $y^3-y^2x+yx^2-x^3=0$, ou bien $(y-x)\,(y^2+x^2)=0$, ce qui représente O′Y″, bissectrice des axes, comme on le voit *à priori*. On peut donc, en laissant cette hypothèse de côté, prendre k pour unité.

La nouvelle équation,

$$y^3-y^2x+yx^2-x^3+y^2-yx+x^2=0,$$

prend une forme très-simple en passant aux coordonnées polaires. En conservant l'axe O'X', et prenant pour pôle l'origine O' des coordonnées rectangulaires, les formules de transformation sont :

$$x=\rho\cos\omega,\quad y=\rho\sin\omega,$$

p'où

$$\rho(\sin^3\omega-\sin^2\omega\cos\omega+\sin\omega\cos^2\omega-\cos^3\omega)+\sin^2\omega-\sin\omega\cos\omega+\cos^2\omega=0,$$

ou bien

$$\rho(\sin\omega-\cos\omega)+1-\sin\omega\cos\omega=0,$$

$$\rho=\frac{\sin\omega\cos\omega-1}{\sin\omega-\cos\omega}.$$

Quand $\omega=0$, $\rho=\dfrac{-1}{-1}=1$. On a ainsi le point P.

$$\omega=\frac{\pi}{4},\ \rho=\infty.$$

La droite O'Y'', qui fait avec l'axe O'X' un angle de 45°, est donc asymptote à la courbe. Pour connaître la marche du rayon vecteur dans le voisinage du point P, on compare le numérateur et le dénominateur de ρ.

Or, on a les trois formules :

$$\cos\omega=1-2\sin^2\tfrac{1}{2}\omega,\ \cos\omega=\cos^2\tfrac{1}{2}\omega-\sin^2\tfrac{1}{2}\omega,$$
$$\sin\omega=2\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos\tfrac{1}{2}\omega,$$

d'où

$$\rho=\frac{1-\sin\omega\cos\omega}{\cos\omega-\sin\omega}=\frac{1-2\sin\frac{1}{2}\omega\cos\frac{1}{2}\omega\,(\cos^2\frac{1}{2}\omega-\sin^2\frac{1}{2}\omega)}{1-2\sin^2\frac{1}{2}\omega-2\sin\frac{1}{2}\omega\cos\frac{1}{2}\omega}$$
$$=\frac{1-2\sin\frac{1}{2}\omega(\cos\frac{1}{2}\omega+\sin\frac{1}{2}\omega)\,(\cos\frac{1}{2}\omega-\sin\frac{1}{2}\omega)\cos\frac{1}{2}\omega}{1-2\sin\frac{1}{2}\omega(\cos\frac{1}{2}\omega+\sin\frac{1}{2}\omega)}$$

Mais les facteurs $(\cos\frac{1}{2}\omega-\sin\frac{1}{2}\omega)$ et $\cos\frac{1}{2}\omega$ diminuent d'autant plus que ω augmente, puisqu'on prend ω entre les limites $\omega=0$, $\omega=\frac{\pi}{4}$. Dans ces limites, ils restent constamment positifs ; donc aussi, dans ces limites, ρ augmente constamment depuis $\rho=1$ jusqu'à $\rho=\infty$; ce qui détermine la branche PS.

De $\omega=\frac{\pi}{4}$ à $\omega=\frac{\pi}{2}$, on voit de même que ρ prendra des valeurs négatives décroissantes. $\omega=\frac{\pi}{2}$ donne $\rho=-1$, au point Q où la branche QS′ rencontre O′Y′.

Enfin, la variation de ω entre $\omega=\frac{\pi}{2}$ et $\omega=\pi$ achève la courbe par la partie PQ où le maximum du rayon vecteur se trouve en R sur la bissectrice O′X″, et aux $\frac{3}{4}$ de la diagonale OO′, car $\omega=\frac{3}{4}\pi$ donne $\rho=-\dfrac{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}{\sqrt{2}}=-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$, et il ne faut pas oublier que nous avons pris pour unité la distance $O'P=k$.

Le passage aux coordonnées polaires a d'ailleurs fait disparaître un point conjugué qui se trouve à l'origine des coordonnées rectangulaires O′X′, O′Y′, car il est évident que l'équation est satisfaite par le système $x=0$, $y=0$.

Cette courbe est la seconde espèce d'*Euler* (*) et la quarante-quatrième de *Newton* (**), appartenant au groupe qu'il désigne par le nom d'hyperboles conchoïdales.

Pour reconnaître l'identité de son équation avec celle d'*Euler* :

$$x(y^2-2\eta xy+\nu^2x^2)+\alpha x^2+\gamma x+\delta=0,$$

(*) Euler. *Introductio in Analysin infinitorum*, lib. II, cap. IX. *De linearum tertii ordinis subdivisione in species*. Lausanne, 1748.

(**) Newton. *Enumeratio linearum tertii ordinis*. Londres, 1711.— *Opuscula mathematica, etc.* Lausanne et Genève, 1744.

il suffit de prendre pour coordonnées l'asymptote trouvée et sa perpendiculaire à l'origine que la construction de la courbe prouve être un diamètre, et de transporter cet axe O′X″ en O″x'' à la distance indéterminée a. Profitant de cette indétermination pour faire disparaître le terme en y^2, on pose $a=\frac{\sqrt{2}}{4}$ et l'équation se rapporte au type précédent, dans le cas particulier où $\mu=0$.

5. Enfin, il est facile de voir que l'enveloppe des diagonales AB, A′B′, A″B″... est la parabole UTV, tangente aux côtés de l'angle YOx à des distances $y=1$, $x=1$; elle a pour axe la diagonale OO′ de cet angle, et pour coordonnées du sommet T : $x=-\frac{1}{4}$, $y=+\frac{1}{4}$.

6. Cette remarque nous permet de considérer la courbe SPRQS′ comme le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un même point O′ sur les tangentes à la parabole. On voit donc que la courbe, lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de O sur les diagonales AB, A′B′, A″B″... sera du même genre.

Nota. Cette ligne est donc du genre des *aplanétiques*. M. Vidal, du collége de Montpellier, nous a adressé depuis une démonstration du théorème de M. Breton, identique avec celle de M. Merlieux, sauf la discussion des lieux géométriques.

Toutes les lignes provenant des projections d'un point fixe sur des tangentes mobiles, sont des enveloppes de cercle et jouissent de propriétés communes que nous aurons bientôt occasion de développer. C'est ce qui explique l'existence des points isolés. Tm.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 36 (tome I, p. 395).

PAR M. YVON (LOUIS),
Elève du Collége royal Charlemagne. (Institution Verdot.)

I. Si une équation $f(x)=0$ a m racines réelles, l'équation $f(x)-f'(x)=0$ a au moins $(m-1)$ racines réelles, en désignant par $f'(x)$ le polynôme dérivé de $f(x)$.

Je suppose d'abord que l'équation n'ait pas de racines égales, et je désigne par $a, b, c, d....$ les m racines réelles de $f(x)=0$, rangées par ordre de grandeur, a étant la plus petite.

Soit h une quantité positive assez petite pour que $f'(x)=0$ n'ait aucune racine comprise entre a et $a+h$ ni entre $b-h$ et b.

On sait d'abord que $f(a+h)$ et $f'(a+h)$ sont de même signe, que $f(b-h)$ et $f'(b-h)$ sont de signes contraires; or $f(a+h)$ et $f(b-h)$ sont de même signe, car on peut toujours supposer h assez petit pour que $a+h$ et $b-h$ soient compris entre a et b, et par conséquent ne comprennent aucune racine de $f(x)=0$: donc $f'(a+h)$ et $f'(b-h)$ sont de signes contraires; d'ailleurs $f'(a)$ et $f'(a+h)$ sont de même signe, puisque par hypothèse h est assez petit pour qu'il n'y ait aucune racine de $f'(x)$ comprise entre a et $(a+h)$; $f'(b-h)$ et $f'(b)$ sont de même signe pour la même raison, donc $f'(a)$ et $f'(b)$ sont de signes contraires.

Supposons maintenant que l'on substitue successivement a et b dans l'équation $f(x)-f'(x)=0$; comme a et b sont racines de $f(x)=0$, les résultats deviennent $-f'(a)$ et $-f'(b)$ qui sont de signes contraires; ainsi a et b comprennent au moins une racine de l'équation $f(x)-f'(x)=0$: on verrait de même que b et c comprennent au moins une racine de cette même équation..., donc cette équation a au moins $(m-1)$ racines réelles.

Considérons maintenant le cas où l'équation $f(x)=0$ aurait des racines égales, elle sera de la forme

$$Y(x-a)^n\,(x-b)^{n'}\,(x-c)\ldots\,(x-d)\ldots=0$$

Y étant le produit des facteurs correspondants aux racines imaginaires. Nous supposons d'abord qu'il n'y ait que deux racines multiples. Soit k le nombre total des racines réelles de $f(x)=0$, chacune étant prise une seule fois, on aura $m=n+n'-2+k=$ le nombre des racines réelles de $f(x)=0$.

Divisons $f(x)$ et $f'(x)$ par leur plus grand commun diviseur, et en désignant par $\varphi(x)$ et $\varphi'(x)$ les quotients, l'équation $f(x)-f'(x)=0$, prendra la forme

$$(x-a)^{n-1}\,(x-b)^{n'-1}\,[\varphi(x)-\varphi'(x)]=0$$

Cette équation a d'abord $n+n'-2$ racines réelles en évidence : les racines réelles de $\varphi(x)=0$ sont a, b, c.... alors $\varphi(x)$ et $\varphi'(x)$ n'ayant pas de racine commune, on verrait ici de même que tout à l'heure que $\varphi(x)-\varphi'(x)=0$ a au moins $(k-1)$ racines réelles, car on sait que $\varphi(x)$ jouit aussi bien que la dérivée de $\varphi(x)$ des propriétés dont nous nous sommes servis pour établir le premier cas.

L'équation $f(x)-f'(x)=0$, a donc au moins $n+n'-2+k-1$ ou $(m-1)$ racines réelles.

J'ai supposé qu'il n'y avait que deux racines multiples a et b ; il est clair que la démonstration serait la même, s'il y en avait un plus grand nombre.

D'ailleurs cette équation étant du même degré que $f(x)=0$, ne peut avoir $(m-1)$ racines réelles sans en avoir m.

Ainsi on peut dire que $f(x)-f'(x)=0$ a au moins autant de racines réelles que $f(x)=0$.

Il suit de là que :

Si une équation $f(x)$ a toutes ses racines réelles, l'équation $f(x)-f'(x)$ aura aussi toutes ses racines réelles.

II. Considérons maintenant l'équation

$$Rf(x)-xf'(x)=0\ (1), \qquad \text{R étant un nombre.}$$

Il est clair que ce qu'on a dit des racines réelles s'appliquerait ici aux racines positives séparément et aussi aux racines négatives; car $af'(a)$ et $bf'(b)$ sont de signes contraires aussi bien que $f'(a)$ et $f'(b)$ quand a et b sont de même signe, positifs tous deux ou tous deux négatifs ; et on verrait aisément que si $f(x)=0$ a n racines positives et n' racines négatives l'équation (1) a au moins $(n-1)$ racines positives et $(n'-1)$ racines négatives.

Donc si $f(x)$ a m racines réelles, l'équation (1) a au moins $(m-2)$ racines réelles.

III. Cette remarque permet de trouver les conditions pour que l'équation $x^m+Px+Q=0$ ait le plus grand nombre de racines réelles possible (*).

Examinons d'abord le cas de *m impair*.

On peut toujours supposer Q positif, car s'il est négatif, en changeant x en $-x$ on le ramènera à être positif, et il est clair que les racines réelles de la première équation donneraient les racines réelles de la seconde et réciproquement.

On peut aussi supposer P négatif, car s'il était positif, l'équation n'aurait évidemment qu'une racine réelle. Nous allons donc considérer seulement l'équation $x^m-Px+Q=0$, P et Q étant positifs. La dérivée est $mx^{m-1}-P$; l'équation (1) devient alors, en faisant $R=m$, $-(m-1)Px+mQ=0$ Cette équation étant du premier degré, l'équation proposée ne peut pas avoir plus de trois racines réelles : et si cette

(*) Voir *Mélanges d'analyse algébrique*, par de Stainville, p. 199. Tm.

équation a trois racines réelles comme elle en a nécessairement une négative, et une seule, les deux autres seront positives.

De l'équation précédente on tire $x = \frac{mQ}{(m-1)P}$ quantité positive ; or, d'après ce que nous avons vu, cette quantité est comprise entre les deux racines positives b et c de l'équation proposée, en désignant par a, b,c les racines réelles de cette équation rangées par ordre de grandeur, a étant la racine négative.

Les racines b et c seront donc comprises, la première entre 0 et $\frac{mQ}{(m-1)P}$ et la seconde entre $\frac{mQ}{(m-1)P}$ et $+$ L en désignant par L la limite supérieure des racines positives : or, 0 donne un résultat positif, donc $\frac{mQ}{(m-1)P}$ donne un résultat négatif : les racines sont alors séparées.

Je dis maintenant que réciproquement, si $\frac{mQ}{(m-1)P}$ donne un résultat négatif, l'équation proposée a trois racines réelles. On sait d'abord qu'elle ne peut en avoir plus de trois, il y en a déjà une négative. De plus 0 et $+$ L donnent deux résultats positifs, donc l'équation a une racine comprise entre 0 et $\frac{mQ}{(m-1)P}$ et une entre cette dernière quantité et $+$ L, l'équation a donc trois racines réelles et n'en a que trois.

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation proposée ait trois racines réelles est que $\frac{mQ}{(m-1)P}$ donne un résultat négatif ; ce qui donne, en substituant cette quantité dans l'équation,

$$m^m Q^{m-1} < (m-1)\, m^{m-1}\, P^m,$$

et lorsque cette condition sera remplie, on pourra séparer les racines.

Si l'on suppose $m = 3$ la condition précédente se réduit à $27Q^2 < 4P^3$ qui est la condition pour que l'équation

$$x^3 - Px + Q = 0$$

ait toutes ses racines réelles, et lorsque cette condition sera remplie, la quantité $\frac{3Q}{2P}$ servira à séparer les racines.

Si l'équation du troisième degré était complète, on ferait disparaître le second terme; ce qui ne changerait pas le nombre des racines réelles, et on obtiendrait une équation de la forme $x^3 + P'x + Q' = 0$ que l'on traiterait comme la précédente, après l'avoir ramenée à la forme convenable.

Supposons maintenant que m soit *pair*, l'équation

$$x^m + Px + Q = 0$$

ne pourra pas avoir plus de deux racines réelles, car elle ne peut pas en avoir trois. Or, on peut encore ici supposer P négatif, car s'il ne l'était pas on l'y ramènerait en changeant x en $-x$, et on n'altérerait pas ainsi le nombre des racines réelles. D'ailleurs on peut négliger le cas de Q négatif, car on sait qu'alors l'équation a toujours deux racines réelles, il n'y a donc pas lieu à chercher des conditions; quant à la séparation, elle s'effectue immédiatement, puisqu'il y a une racine positive seulement et seulement une racine négative.

Supposons donc Q positif. L'équation est alors, en mettant les signes en évidence $x^m - Px + Q = 0$. Soient a et b ses racines qui sont positives; et soit a la plus petite, l'équation $-(m-1)Px + mQ = 0$ aura sa racine $\frac{mQ}{(m-1)P}$ comprise entre a et b, donc a et b seront comprises, la première entre 0 et $\frac{mQ}{(m-1)P}$, la deuxième entre $\frac{mQ}{(m-1)P}$ et $+L$; donc $\frac{mQ}{(m-1)P}$ substitué dans l'équation donnera un résultat négatif.

On verrait de même que tout à l'heure que si $\frac{mQ}{(m-1)P}$ donne un résultat négatif, l'équation proposée a deux racines réelles, donc la condition nécessaire et suffisante est que

$$m^m Q^{m-1} < (m-1)^{m-1} P^m$$

qui est la même que la précédente; elle exprime donc la condition pour que l'équation $x^m + Px + Q = 0$ ait le plus grand nombre de racines réelles possible.

IV. On peut encore trouver les conditions pour que l'équation de degré *pair* $x^m + Px^2 + Qx + R = 0$ ait deux racines positives et deux racines négatives.

Je dis d'abord que R doit être positif; en effet supposons que R soit négatif; on peut toujours supposer Q négatif, car s'il ne l'était pas, on l'y ramènerait en changeant x en $-x$, et il est clair que l'équation transformée aurait aussi deux racines positives et deux racines négatives; mais Q et R étant négatifs, quel que soit le signe de P, le premier membre ne présenterait qu'une seule variation, l'équation n'aurait donc pas deux racines positives.

Il faut donc que R soit positif: supposons ensuite Q positif, ce qui est toujours permis; car s'il est négatif on changera x en $-x$, et alors si une des équations a deux racines positives et deux racines négatives, l'autre aura également deux racines positives et deux racines négatives; il suffit donc de traiter le cas où Q serait positif, alors P sera nécessairement négatif, sans quoi le premier membre ne présenterait pas de variation.

Généralement, la dérivée du premier membre de l'équation donnée étant $= mx^{m-1} + 2Px + Q$; l'équation (1) devient

$$(m-2)Px^2 + (m-1)Qx + mR = 0;$$

équation qui a ses racines réelles, si la proposée a deux racines positives et deux racines négatives; par conséquent la condition est $(m-1)^2Q^2 > 4m(m-2)RP$.

D'ailleurs cette équation ne pouvant pas avoir plus de deux racines réelles, l'équation proposée ne peut pas avoir plus de quatre racines réelles.

Si donc on désigne par a, b, c, d les quatre racines réelles de l'équation proposée rangées par ordre de grandeur, a étant la plus petite, alors la racine négative de l'équation du second degré que je désigne par a' sera comprise entre a et b; et la racine positive b' sera comprise entre c et d.

Donc les racines a, b, c, d, sont comprises, la première entre $-\mathrm{L}'$ et a', la deuxième entre a' et 0; la troisième entre 0 et b', et enfin la dernière entre b' et $+\mathrm{L}$; en désignant par $-\mathrm{L}'$ la limite inférieure des racines négatives et par L la limite supérieure des racines positives.

Or $-\mathrm{L}'$ donne un résultat positif, donc a' doit donner un résultat négatif; 0 donne un résultat positif, b' donnera donc un résultat négatif.

Par conséquent on substituera a' et b' dans l'équation proposée et en écrivant que les deux résultats sont négatifs, on aura deux nouvelles conditions qui devront être satisfaites.

Je dis maintenant que réciproquement si les racines a' et b' sont réelles et de signe contraire et donnent deux résultats négatifs, l'équation proposée aura deux racines positives et deux racines négatives.

En effet $-\mathrm{L}'$, a' et 0 donnant des résultats dont les signes sont $+-+$, l'équation proposée a au moins une racine réelle entre $-\mathrm{L}'$ et a' et une entre a' et 0, donc elle a au moins deux racines négatives; on verrait de même que 0, b' et $+\mathrm{L}$ donnant des résultats dont les signes sont $+-+$, l'équation a au moins aussi deux racines positives; d'ailleurs elle ne peut pas avoir plus de quatre racines réelles; donc elle a deux racines positives seulement, et seulement deux racines négatives.

Alors on exprimera que les racines a' et b' de l'équation du deuxième degré sont réelles et de signes contraires, ce qui exige que l'on ait $P<0$, puisque R est positif ; et

$$(m-1)^2 Q^2 > 4m(m-2)PR.$$

Or, cette dernière condition est évidemment satisfaite si l'on a $P<0$ et $R>0$.

On exprimera en outre que a' et b' donnent deux résultats négatifs, cequi fournira deux conditions qui jointes à $P<0$ et $R>0$ donneront les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation proposée ait deux racines positives et deux racines négatives.

Et quand ces conditions seront remplies, on aura deux quantités a' et b' qui permettront de séparer les racines.

—

Après la réception de ce beau travail, M. Gautier (Alexandre), élève interne du collége Louis-le-Grand, nous a envoyé une démonstration du même théorème qui pour la première partie se rapproche de celle de M. Yvon ; d'ailleurs en construisant les deux lignes $y=f(x)$, $y=f'(x)$ et faisant attention au théorème de Rolle, la proposition devient d'une évidence intuitive. C'est ainsi que je l'ai trouvée. TM.

PROBLÈMES ET THÉORÈMES.

—

65. Connaissant les coordonnées des trois sommets d'un triangle, quelles relations doivent exister entre ces coordonnées et celles d'un quatrième point, pour que celui-ci soit dans l'intérieur du triangle ?

66. Étant donnés une conique et un diamètre, trouver sur ce diamètre un point tel qu'en menant par ce point une parallèle à une droite donnée, les deux segments de la corde ou de la sécante soient dans un rapport donné.

67. Étant donnés : deux circonférences dans le même plan; A un point sur la première circonférence, et B, un point sur la seconde ; trouver sur l'axe radical des deux circonférences un point C, tel qu'en menant les sécantes CA, CB, elles coupent les circonférences en deux points D, E, de manière que la droite DE soit à angle droit sur l'axe radical.

68. Quatre points étant placés harmoniquement sur une droite, une circonférence qui passe par deux points conjugués coupe orthogonalement la circonférence décrite sur la distance des deux autres points conjugués, comme diamètre.

69. Étant donnée l'équation :

$$abc = x[a\sqrt{4x^2 - a^2} + b\sqrt{4x^2 - b^2} + c\sqrt{4x^2 - c^2}],$$

en tirer analytiquement la valeur

$$x = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}, \text{ où } p = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

70. $$a^n + b^n = (a+b)^n - \frac{n}{1}ab(a+b)^{n-2} +$$

$$\frac{n.n-3}{1.2}a^2b^2(a+b)^{n-4} - \frac{n(n-5)(n-4)}{1.2.3}a^3b^3(a+b)^{n-6} +$$

$$(-1)^p\frac{n}{1}.\frac{n-2p+1}{2}.\frac{n-2p+2}{3}.....\frac{n-p-1}{p}a^pb^p(a+b^{n-2p})$$

n étant un nombre entier positif.

71. Soit l'équation $x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0$; faisons $A = \sqrt{p^2 - q}$; si les trois racines sont réelles, elles sont comprises la première entre $-p-2A$ et $-p-A$; la seconde entre $-p-A$ et $-p+A$, et la troisième entre $-p+A$ et $-p+2A$; s'il n'y a qu'une racine réelle, elle ne tombe jamais entre $-p-2A$ et $-p+2A$.

72. A et B sont deux nombres entiers positifs, ayant plus de la moitié des chiffres à gauche en commun ; et $A > B$, on a toujours $A^{\frac{1}{p}} - B^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{p}$; p est un nombre entier positif.

73. Un triangle rectangle ayant pour hypoténuse, la corde d'une conique et pour sommet un point fixe, dans le plan de la conique ; l'enveloppe de l'hypoténuse est une seconde conique, dont un des foyers est au point fixe.

74. Un cercle mobile a son centre sur une droite fixe et touche un cercle fixe ; quel est le lieu du pôle d'une seconde droite fixe relativement à ce cercle mobile ; que devient ce lieu, lorsque le cercle fixe se reduit à un point, ou devient une droite ?

ANNONCES.

Rectification, p. 264.

Dernière ligne ; on remplacera x et y par $2x$ et $2y$, alors l'équation (a) de la page 265 doit être remplacée par celle-ci :

$$4(y^2+x^2)^2-(y^2+x^2)(4Rx-R^3)+R^2x^2=0.$$

LIMITE DE L'ERREUR DES SINUS NATURELS,

PAR M. FINCK,

Professeur de mathématiques au Collége et à l'École d'artillerie de Strasbourg, docteur ès sciences.

—

Je me propose de traiter cette question, en tenant compte de toutes les erreurs, et me servant de la formule connue

$$\sin(n+1)a = 2\cos a \sin na - \sin(n-1)a \qquad (1)$$

Je suppose qu'il s'agisse de calculer sur des arcs qui croissent de $10''$.

On sait que $\sin 10'' < 0,\ 00004\ 84813\ 68111$.

Retranchant de là, l'unité du dernier ordre et $\frac{1}{6}(\text{arc } 10'')^3$ qui est $<$ 19 unités du même ordre, on a $\sin 10'' > 0,\ 00004\ 84813\ 68091$.

De sorte que $\sin 10''$ est connu à moins de $\frac{2}{10^{14}}$.

Au moyen de ces deux limites de $\sin 10''$, on peut en trouver deux pour $\cos 10''$, qui sont

$$\cos 10'' > 0{,}99999\ 9988\ 24778\ 47304$$

$$\cos 10'' < \text{ce même nombre} + \frac{1}{10^{17}}.$$

Soit α_n la valeur approchée de $\sin na$, e_n l'erreur, de sorte que

$$\sin na = \alpha_n + e_n \qquad (2)$$

$$\sin(n-1)a = \alpha_{n-1} + e_{n-1}.$$

etc.

Soit β la valeur approchée de $\cos a$, i l'erreur, on aura

$$\cos a = \beta + i \tag{3}$$

(1) devient

$$\alpha_{n+1} + e_{n+1} = 2(\beta + i)(\alpha_n + e_n) - \alpha_{n-1} - e_{n-1} \tag{4}$$
$$= 2\beta\alpha_n - \alpha_{n-1} + 2\cos a . e_n + 2i\alpha_n - e_{n-1}.$$

Dans $2\beta\alpha_n - \alpha_{n-1}$ on ne conserve pas tous les chiffres; soit γ_n la partie négligée; il vient

$$e_{n+1} = 2e_n \cos a - e_{n-1} + \gamma_n + 2i\alpha_n \tag{5}$$

Je pose $$\gamma_n + 2i\alpha_n = d_n \tag{6}$$

$$n - 1 = x, \quad e_{n-1} = y, \quad e_n = y_1, \quad e_{n+1} = y_2 \tag{7}$$

et (5) devient $$y_2 - 2y_1 \cos a + y = d_{x+1} \tag{8}$$

équation aux différences finies, qu'il s'agit d'intégrer (*).

A cet effet, d'après la méthode connue, on prend l'équation auxiliaire

$$y_2 - 2y_1 \cos a + y = 0. \qquad (9)\ (^{**})$$

Elle est satisfaite par $y = \cos ax$, $y = \sin ax$; son intégrale complète est donc

$$y = \mathrm{A}\cos ax + \mathrm{B}\sin ax \tag{10}$$

Faisant varier A et B, on aura

$$y_1 = \mathrm{A}\cos a(x+1) + \mathrm{B}\sin a(x+1) \tag{11}$$

avec $$\Delta\mathrm{A}.\cos a(x+1) + \Delta\mathrm{B}.\sin a(x+1) = 0 \tag{12}$$

$$y_2 = (\mathrm{A}+\Delta\mathrm{A})\cos a(x+2) + (\mathrm{B}+\Delta\mathrm{B})\sin a(x+2). \tag{13}$$

Les valeurs (10), (11), (13), substituées dans (8) donnent

$$\Delta\mathrm{A}.\cos a(x+2) + \Delta\mathrm{B}.\sin a(x+2) = d_{x+1} \tag{14}$$

Cette équation jointe à (12) détermine les valeurs

$$\Delta\mathrm{A} = -\frac{d_{x+1}\sin a(x+1)}{\sin a}, \quad \Delta\mathrm{B} = \frac{d_{x+1}\cos a(x+1)}{\sin a} \tag{15}$$

(*) Lacroix, *Traité élémentaire de calcul différentiel*, n° 370. Tm.
(**) C'est l'équation (1) en faisant $\sin na = y_1$. Tm.

$$\left.\begin{aligned} \text{d'où } A &= -\frac{1}{\sin a}\,\Sigma \sin a\,(x+1).d_{x+1} + E \\ B &= \frac{1}{\sin a}\,\Sigma \cos a\,(x+1).d_{x+1} + F \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Par suite (10) devient

$$\left.\begin{aligned} y = E\cos ax + F\sin ax &- \frac{\cos ax}{\sin a}\,\Sigma\, d_{x+1} \sin a\,(x+1) \\ &+ \frac{\sin ax}{\sin a}\,\Sigma\, d_{x+1} \cos a\,(x+1) \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

On peut commencer ces intégrales où l'on veut, pourvu que E, F soient déterminées en conséquence. Nous les ferons commencer à $x = 0$, et nous avons

$$y = E\cos ax + F\sin ax$$

$$+ \frac{1}{\sin a}\Big[d_1 (\sin ax \cos a - \cos ax \sin a)$$

$$+ d_2 (\sin ax \cos 2a - \cos ax \sin 2a)$$

$$+ d_x (\sin ax \cos ax - \cos ax \sin ax)\Big]$$

$$\left.\begin{aligned} &= E\cos ax + F\sin ax + \frac{1}{\sin a}\Big[d_1 \sin a(x-1) + d_2 \sin a(x-2) \\ &\qquad + \ldots\ldots + d_{x-1} \sin a\Big] \\ &= E\cos ax + F\sin ax + \frac{1}{\sin a}\int d_z \sin a\,(x-z) \\ &\qquad\qquad z = 1, 2, \ldots\ldots (x-1) \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Pour déterminer E, F, on sait que

si $x = 1$, $y = e_1$, erreur de $\sin a$,

si $x = 2$, $y = e_2$, erreur de $\sin 2a$.

Mais (5) et (6) donnent $e_2 = 2e_1 \cos a + d_1$ (19)

vu que e_0 est nul.

Ainsi, d'après (18) $e_1 = E\cos a + F\sin a$ (20)

$$2e_1 \cos a + d_1 = E\cos 2a + F\sin 2a + d_1\,;$$

d'où
$$E = 0$$
$$F = \frac{e_1}{\sin a} \tag{21}$$

et
$$y \text{ ou } e_x = \frac{e_1 \sin ax}{\sin a} + \frac{1}{\sin a}\int dz \sin a\,(x-z) \tag{22}$$
$$z = 1, 2, \ldots\ldots (x-1)$$

Si dans (5) on fait successivement $n = 0, 1, 2$, etc., qu'on exprime e_2, e_3, e_4 en e_1, on trouvera précisément les expressions que fournit (22) pour $x = 2, 3, 4$, etc.; ce qui vérifie notre formule. Pour en faire usage, il faut connaître les valeurs de γ_1, γ_2, ... α_1, α_2, ... qui ne se trouvent que successivement par le développement du calcul. Néanmoins notre formule va nous servir à prouver que (1) peut être employée au calcul des sinus, de $10''$ en $10''$, jusqu'à $90°$, et que la plus forte erreur n'atteindra pas $\frac{15}{10^9}$. A cet effet, supposons que tous les calculs se fassent à 17 décimales; les γ_1, γ_2 ..... seront $< \frac{1}{10^{17}}$, et $2i\alpha_z$ étant $< 2i$ ou $< \frac{2}{10^{17}}$, on a

$$d_z < \frac{3}{10^{17}}, \text{ et } e_x < \frac{e_1}{\sin a} + \frac{3}{10^{17} \sin a}\int \sin a\,(x-z) \tag{23}$$
$$z = 1, 2, \ldots\ldots (x-1)$$

On fera $a = \text{arc } 10''$, d'où $\sin a < 0{,}000048$.

Le maximum de l'erreur répond à $ax = 90°$, ou $x = \frac{90°}{10''}$, $= 32400$. Alors le signe $\int$ comprend $32400 - 1$ termes; nous y renfermerons aussi le terme qni répond à $z = 0$, et nous diviserons cette somme en 10 autres, s'étendant chacune à 9 degrés, et comprenant par conséquent 3240 termes. Dans la somme partielle, depuis $\sin 10''$ à $\sin 9°$, chaque terme est $< \sin 9°$; donc cette somme est $< 3240.\sin 9°$. Raisonnant de même sur les autres, on voit que

$$\int \sin a\,(x-z) < 3240\,(\sin 9^\circ + \sin 18^\circ + \ldots\ldots + \sin 90^\circ)$$
$$< 3240 \times 6{,}85311$$

en vertu des valeurs de sin 9°, sin 18°, ... calculées directement.

Ce nombre vaut 22204,0764, et on a

$$e_x < \frac{2}{10^{14}.0{,}000048} + \frac{66612{,}2292}{10^{17}.0{,}000048} = \frac{1}{24}\left(\frac{1000+33306{,}1146}{10^{11}}\right)$$
$$< \frac{15}{10^9}.$$

Ainsi il est bien certain que tous les sinus seront calculés en moins, et à $\frac{15}{10^9}$ près, ce qui suffit pour en obtenir les logarithmes à moins de $\frac{5}{10^8}$. Les 17 chiffres décimaux qui expriment ces sinus ne font point obstacle à cela.

D'après cela, je rétracte de nouveau (V. t. I, p. 353) ce que j'ai avancé dans ma Trigonométrie sur l'insuffisance de la formule (1).

Je ferai d'ailleurs observer que c'est aussi par le calcul intégral aux différences que j'ai complété, dans ma Géométrie, 2[e] édition, la recherche du rapport de la circonférence au diamètre ; j'ai présenté cela sous forme élémentaire, et rien n'empêche d'en faire autant pour ce qui précède (*) ; de plus, je puis ajouter, car j'ai fait le calcul, que cette seconde manière n'est pas plus longue ; mais la première est plus directe, et c'est pour cela que je l'ai donnée.

Observation du Rédacteur. M. Finck est auteur d'ouvrages élémentaires, qui annoncent une science profonde ; auteur d'un traité de calcul différentiel, dont l'illustre Poisson faisait grande estime ; ancien examinateur pour l'école de Saint-

(*) C'est ce que nous essayerons par la suite. Tm

Cyr, M. Finck, professeur d'une intégrité parfaite, d'une réputation intacte, était placé cette année dans les premiers sur la liste de présentation. Il est presque superflu d'ajouter qu'il n'a pas été choisi. On lui a préféré, qui? Espérons qu'un tel scandale ne se renouvellera plus. Tm.

DÉTERMINATION DES AXES PRINCIPAUX

DANS LE CONE DU SECOND ORDRE;

PAR C. E. PAGE,
Professeur à l'École d'artillerie de la Fére

—

1. Toute surface conique qui a pour directrice une courbe quelconque du second ordre, ne peut être coupée par un plan que suivant une autre courbe du second ordre (tome Ier page 228).

On appelle axe principal du cône, une droite menée par le sommet et qui est le lieu géométrique des centres de toutes les courbes qui résultent de l'intersection de la surface par des plans perpendiculaires à sa direction.

Dans toute surface conique ayant pour directrice une courbe quelconque du second ordre, il existe toujours trois axes principaux rectangulaires.

Les sections faites perpendiculairement à l'un de ces axes sont des ellipses, tandis que les sections faites perpendiculairement aux deux autres axes sont des hyperboles.

Pour démontrer ces propositions, nous commencerons par rappeler quelques théorèmes dont nous aurons besoin.

2. Si deux droites qui pivotent autour de deux points fixes

P et P′ (*fig*. 65) sont dirigées dans leurs mouvements par deux points A et B assujettis à glisser sur une droite fixe OX, de manière que les segments variables

$$OA = \alpha \text{ et } OB = \beta$$

compris entre les deux points mobiles et un point fixe quelconque pris sur la droite, soient liés entre eux par une équation de cette forme

$$k\alpha\beta + l\alpha + m\beta + n = 0 \qquad (C)$$

le lieu géométrique engendré par le point d'intersection de ces deux droites est une courbe du second ordre qui passe par les deux points fixes P et P′.

Réciproquement si les deux droites mobiles sont assujetties à se couper constamment sur une courbe du second ordre passant par les deux points fixes P et P′, les segments variables qu'elles forment sur une droite fixe, comptés à partir d'un point quelconque de cette droite sont liés entre eux par une équation de la forme (C).

Nous remarquerons d'abord que si dans l'équation (C) on pose

$$\alpha = \alpha' + h, \text{ et } \beta = \beta' + h,$$

on obtient une équation de même forme entre α et β', ce qui fait voir que l'équation ne change pas de forme en quelque point de la droite fixe que l'on transporte l'origine. Il s'en suit que, sans altérer en rien la généralité des résultats, nous pouvons prendre pour origine le point O où la droite P P′ vient rencontrer la droite fixe OX.

Prenant cette droite OX pour axe des x, la droite PP′ pour axe des y, représentant les distances fixes

OP par a, et OP′ par b,

les distances variables

OA par α et OB par β,

on a pour les équations des deux droites mobiles PA et P′B

$$\alpha y + ax = a\alpha \ (1) \text{ et } \beta y + bx = b\beta \ (2)$$

Éliminant α et β entre ces deux équations et l'équation (C), on aura entre x et y l'équation du lieu géométrique engendré par le point d'intersection des deux droites mobiles.

Des équations (1) et (2) on tire

$$\alpha = \frac{ax}{a-y} \text{ et } \beta = \frac{bx}{b-y},$$

mettant ces valeurs dans l'équation (C) il vient

$$kabx^2 + lax(b-y) + mbx(a-y) + n(b-y)(a-y) = 0.$$

C'est l'équation d'une courbe du second ordre qui passe par les deux points P et P′, car elle est satisfaite par les couples de valeurs

$$\begin{bmatrix} x = 0 \\ y = b \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} x = 0 \\ y = a \end{bmatrix}.$$

Réciproquement, si les deux droites mobiles sont assujetties à se couper constamment sur une courbe du second ordre qui passe par les deux points P et P′, les segments α et β seront liés entre eux par une équation de la forme (C).

En effet, supposons que dans l'équation (C) les coefficients k, l, m, n, soient indéterminés, il suffira pour les déterminer de connaître trois couples de valeurs des variables α et β; or, ces valeurs peuvent être choisies de manière que les droites se coupent en trois points F, G, H, de la courbe donnée. Maintenant, si l'on suppose que les droites se meuvent de manière que les variables α et β satisfassent à l'équation (C) dans laquelle les coefficients k, l, m, n, sont déterminés par cette condition, le point d'intersection des deux droites décrira une courbe du second ordre qui passera par les cinq points, F, G, H, P, P′ et qui par conséquent se confondera avec la courbe donnée, puisque par cinq points on ne peut faire passer qu'une seule courbe du second ordre.

Le théorème a encore lieu lorsque la droite PP′ est parallèle à la droite OX ; pour le démontrer, il suffit de faire voir que si deux droites qui tournent autour de deux points fixes déterminent sur une droite des segments liés entre eux par l'équation (C), les segments qu'elles détermineront sur une autre droite faisant un angle quelconque avec la première seront liés entre eux par une équation de même forme.

3. Il peut arriver que les deux points P et P′ soient situés à l'infini ; dans ce cas, les deux droites se meuvent en restant chacune parallèle à une direction fixe, et la courbe engendrée par leur point d'intersection est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux deux droites mobiles.

En effet, soit OX′ (*fig.* 66) la droite sur laquelle se meuvent les deux points directeurs ; par l'origine O, menons deux droites parallèles aux deux droites mobiles, et prenons-les pour axes coordonnés, il est facile de voir que l'on aura toujours

$$\alpha = fx \text{ et } \beta = gy ,$$

les coefficients f et g étant constants. Mettant ces valeurs à la place de α et de β dans l'équation C il vient :

$$kfgxy + lfx + mgy + n = 0$$

C'est l'équation d'une hyperbole rapportée à deux axes parallèles à ses asymptotes.

4. L'équation (C) fournit un grand nombre de conséquences importantes, nous nous bornerons à en déduire le théorème suivant :

Si dans un triangle variable dont les trois côtés pivotent autour de trois points fixes, deux sommets sont assujettis à glisser sur deux courbes du second ordre qui passent par les points fixes autour desquels pivotent les côtés adjacents, le troisième sommet décrira aussi une courbe du second ordre qui passera également par les deux points autour desquels pivotent les deux côtés adjacents.

Soit le triangle ABC, (*fig.* 67) dont les trois côtés pivotent autour des points fixes P, P', P'', le sommet A est assujetti à glisser sur une courbe du second ordre qui passe par les deux points P et P'', le sommet B à glisser sur une autre courbe du second ordre qui passe par les deux points P et P', le troisième sommet C décrira une courbe du second ordre qui passera par les points P' et P''.

En effet, menons dans le plan de ce triangle une droite fixe quelconque, représentons par α et γ les segments compris entre un point fixe pris sur cette droite et les points où elle est rencontrée par les côtés AC et AB ; puisque le point A intersection de ces deux droites glisse sur une courbe du second ordre qui passe par les deux points P et P'', les segments α et γ seront liés entre eux par une équation de la forme (C). Représentons par β le segment compris sur cette même droite entre le même point fixe et le point où elle est rencontrée par le côté BC. Puisque le point B, intersection des deux côtés AB et BC est assujetti à glisser sur une courbe du second ordre qui passe par les deux points P et P', les segments β et γ seront aussi liés entre eux par une seconde équation de la forme (C). Éliminant γ entre ces deux équations, il restera une équation de même forme entre les deux segments α et β; par conséquent, le point C intersection des deux côtes AC et BC décrit une courbe du second ordre qui passe par les deux points P' et P''.

Aux courbes du second ordre sur lesquelles glissent les sommets A et B on peut substituer des lignes droites ; on retombe alors sur le théorème de Braikenridge, et par suite sur le théorème de Pascal. (V. tome I, p. 61.)

La démonstration reste la même pour un polygone d'un nombre quelconque de côtés, on a donc le théorème suivant :

Si dans un polygone quelconque, tous les côtés sont assujettis à tourner chacun autour d'un point fixe, et si tous les som-

mets, un seul excepté, sont assujettis à glisser chacun sur une droite fixe ou sur une courbe du second ordre passant par les deux points fixes autour desquels pivotent les côtés adjacents, le dernier sommet décrira une courbe du second ordre qui passera également par les deux points fixes autour desquels pivotent les côtés adjacents.

5. Maintenant considérons la surface conique engendrée par une droite assujettie à se mouvoir en passant constamment par un point fixe S (*fig*. 68), et en s'appuyant sur une courbe ABCD. Par le sommet S menons une droite quelconque qui rencontre le plan de la directrice en un point P ; construisons la droite GH polaire du point P par rapport à la courbe; enfin, par cette droite GH et par le sommet S, faisons passer un plan; ce plan est dit le *plan polaire* de la droite SP. Comme on peut toujours construire la polaire d'un point quelconque pris dans le plan d'une courbe du second ordre, il s'ensuit qu'on peut toujours construire le plan polaire d'une droite menée par le sommet d'un cône du second ordre.

Toute droite menée par le sommet d'un cône du second ordre, est le lieu géométrique des centres de toutes les courbes du second ordre qui résultent de l'intersection de la surface par des plans parallèles au plan polaire de cette droite.

En effet, supposons la surface du cône coupée par un plan parallèle au plan polaire de la droite SP, soit O le point de rencontre de cette droite avec le plan coupant. Pour démontrer que le point O est le centre de la courbe qui résulte de l'intersection de la surface par le plan, il faut faire voir que toute droite telle que *mn*, menée par le point O dans le plan coupant, est divisée par ce point en deux parties égales.

Par la droite *mn* et par le sommet, faisons passer un plan; ce plan coupe la surface suivant deux génératrices SA et SB, et le plan polaire suivant une droite SQ parallèle à *mn*. Les deux points P et Q sont conjugués harmoniques par rapport aux deux points A et B ; par conséquent les quatre droites SA, SB, SP, SQ forment un faisceau harmonique ; et la droite *mn*, parallèle à l'un des rayons de ce faisceau, est partagée par les trois autres en deux segments égaux.

Il résulte de ce qui précède que toute droite perpendiculaire à son plan polaire, est le lieu géométrique des centres de toutes les courbes qui résultent de l'intersection de la surface par des plans perpendiculaires à sa direction ; par conséquent, le problème de la détermination des axes principaux revient au suivant : *Construire les droites qui sont perpendiculaires à leurs plans polaires.*

6. Soit QXVR (*fig.* 69) une courbe quelconque du second ordre servant de directrice à la surface du cône dont le sommet se projette en P sur le plan de cette courbe ; par le point P, faisons passer un diamètre, et par ce diamètre menons un plan perpendiculaire au plan de la courbe ; prenons ce plan pour plan vertical et le plan de la courbe pour plan horizontal de projection. Soit S le sommet du cône situé dans le plan vertical ; puisque la droite que nous cherchons doit être perpendiculaire à son plan polaire, il faut que les deux projections de cette droite soient perpendiculaires aux traces de son plan polaire. Comme cette droite doit toujours passer par le sommet, il suffit, pour la déterminer, de construire sa trace horizontale. Pour cela nous allons construire le lieu géométrique engendré par la trace horizontale d'une droite menée par le sommet, et qui se meut de manière que sa projection horizontale reste constamment perpendiculaire à la trace horizontale de son plan polaire ; nous construirons de même le lieu géométrique engendré par la trace horizontale d'une droite menée par le sommet, et qui se meut de manière que sa projection verticale reste constamment perpendiculaire à la trace verticale de son plan polaire. Chaque point d'intersection de ces deux lieux géométriques donnera une solution du pro-

blème. Il faut en excepter cependant les points d'intersection qui peuvent se trouver sur la droite menée par le point P perpendiculairement à la ligne de terre. En effet, lorsque les deux projections d'une droite sont perpendiculaires à la ligne de terre et que les deux traces d'un plan sont parallèles à la même ligne, les projections de la droite sont perpendiculaires aux traces du plan sans qu'on puisse en conclure que la droite soit perpendiculaire au plan.

Par le point P menons une droite quelconque PC que nous considérons comme la projection horizontale d'une droite menée par le sommet, la trace horizontale de cette droite sera située sur la ligne PC; en faisant glisser cette trace sur cette ligne nous ferons varier la direction du plan polaire; il s'agit de trouver une position telle que la trace horizontale du plan polaire soit perpendiculaire à PC.

Or la trace horizontale du plan polaire d'une droite est la polaire de la trace horizontale de cette droite, et la polaire d'un point est parallèle à la direction conjuguée du diamètre qui passe par ce point. D'après cela, il nous faut prendre pour la trace horizontale cherchée le point de rencontre de la droite PC avec un diamètre tel que la direction conjuguée de ce diamètre soit perpendiculaire à PC.

Pour cela, par le point Q menons une droite QX perpendiculaire à PC, prenons le point B milieu de la corde QX; par ce point B, faisons passer un diamètre, ce diamètre sera conjugué à la direction de la corde QX, et par conséquent la rencontre de ce diamètre avec la droite PC sera la trace cherchée.

En faisant tourner la droite PC autour du point A et construisant de la même manière pour chaque position de cette droite la trace horizontale correspondante, on aura le lieu géotrique cherché.

Les deux droites PC et QA qui pivotent autour des deux points P et Q sont toujours perpendiculaires l'une à l'autre; par conséquent leur point d'intersection décrit une circonférence dont PQ est le diamètre.

Le diamétre BC doit toujours passer par le milieu de la corde mobile Q, par conséquent le point B intersection des deux droites mobiles QX et BC décrit une ligne qui est le lieu géométrique des milieux des cordes menées du point Q à tous les points consécutifs de la directrice QRVX. Or, ce lieu géométrique est une courbe semblable à la courbe QRVX et semblablement placée, le point Q étant le centre de similitude des deux figures. Il s'ensuit que le point B est assujetti à glisser sur une courbe du second ordre.

On voit que dans le triangle variable ABC les trois côtés pivotent autour des trois points fixes O, P, Q, les deux sommets A et B glissent sur deux courbes du second ordre qui passent par les points fixes autour desquels pivotent les côtés adjacents; par conséquent le troisième sommet C doit décrire une courbe du second ordre passant par les deux points Q et P autour desquels pivotent les côtés AC et BC.

Il est facile de voir en outre, que cette courbe passe par le point L où le diamètre conjugué à la direction PO vient rencontrer la perpendiculaire à la ligne de terre menée par le point P.

Lorsque la ligne PC devient parallèle à l'un des axes principaux de la directrice, on trouve pour le point C deux positions correspondantes situées à l'infini de part et d'autre du point P. On en conclut que la courbe est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux axes de la directrice. Le lieu géométrique cherché est donc parfaitement déterminé puisque c'est une hyperbole dont on connaît trois points et la direction des asymptotes. (Tome I^{er}, page 68.)

Dans le cas où la directrice est une parabole, le point O est situé à l'infini, le lieu géométrique cherché est encore une hyperbole qui passe par le point P, l'une des asymptotes se confond avec l'axe même de la parabole, l'autre asymptote est perpendiculaire à cet axe. Cette hyperbole est donc encore complétement déterminée.

(*La fin prochainement.*)

NOTE SUR LA VARIATION DES LIMITES

DANS LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR A. CHEVILLARD,
Ancien élève à l'École polytechnique, professeur au collé e de Sorrèze

—

1. La représentation par une courbe parabolique des variations que subit le premier membre d'une équation algébrique entre les limites de ses racines réelles a suffi pour montrer simplement l'incertitude de la méthode d'approximation de Newton et pour faire imaginer des procédés plus exacts de séparation des racines incommensurables. L'examen des variations des limites mêmes permet de résoudre très-simplement plusieurs questions sur la croissance et la décroissance des polynômes, et comme ces questions ne sont pas examinées dans la plupart des traités, je n'ai pas cru inutile d'en parler. Je rappellerai qu'étant donné un polynôme algébrique $f(x)$, la tangente trigonométrique de l'angle que fait avec l'axe des x, la touchante à la courbe $y=f(x)$ au point (x, y) est la dérivée première $f'(x)$, de sorte que $f'(x)=0$ donnera les abscisses des points maxima, minima, $f'' x = 0$ donnera les abscisses des points d'inflexion, etc., etc., et qu'en général les signes de ces deux dérivées indiqueront exactement la forme de la courbe aux environs du point (x, y).

2. *Étant donné un polynôme algébrique* $X = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots$, *on propose de trouver des valeurs positives de* x *qui rendent* X *de même signe que le premier terme, telles que des valeurs plus grandes produisent le même effet, et que par la croissance de ces valeurs, le polynôme* X *croisse numériquement autant qu'on voudra.*

Si l'on n'exigeait pas que la croissance des valeurs substituées entraînât celle du polynôme, la recherche d'une limite supérieure des racines positives d'une équation algébrique répondrait à la question. Car si A est positif, toute limite supérieure L des racines de $X=0$ rendra X positif, et tout nombre plus grand que L en fera autant, et si A est négatif, une limite supérieure des racines de $-X=0$ rendra toujours $-X$ positif, par conséquent X négatif, et tout nombre plus grand produira sur X le même effet.

3. Pour résoudre entièrement la question, il faudrait que $x >$ ou $= L$ pût faire croître numériquement X autant qu'on voudrait. Or, en ne choisissant pas L convenablement, le polynôme X pourrait croître, décroître, ... par les substitutions postérieures à L, comme il est évident, si l'on observe que les racines de $X=0$ sont les abscisses des points où la courbe $y = X$ rencontre l'axe des x. Il faudrait être sûr qu'après la limite L la courbe ne présente aucun point maximum, minimum, en d'autres termes que $x = L$ soit aussi limite supérieure des racines de $X'=0$; car alors la courbe ne sera que de l'une des deux formes suivantes, et l'ordonnée X croîtra sans limites pour $x =$ ou $> L$. Or, la limite supérieure de Newton jouit de cette propriété puisqu'elle est en même temps limite supérieure de toutes les dérivées égalées à 0. En effet, on a :

$$X_{x+h} = X + hX' + \frac{h^2}{2} X'' + \frac{h^3}{2.3} X''' + \ldots; \; X'_{x+h} = X' + hX'' + \frac{h^2}{2} X''' + \ldots; \; X''_{x+h} = X'' + hX''' + \frac{h^2}{2} X^{\text{IV}} + \ldots$$

de sorte que si une valeur $x=\lambda$ rend positives toutes les dérivées X^{m-1}, X^{m-2}, ... X'', X', X, toutes ces dérivées croîtront sans limites pour les valeurs plus grandes de x. Comme X'' croît toujours avec le signe $+$ au delà de $x=\lambda$, la courbe $y=X$ après $x=\lambda$ s'élève sans sinuosités, présentant sa concavité vers le haut; ce que j'exprime en disant qu'après λ la croissance du polynôme X est uniforme.

4. On résout souvent la question proposée avec d'autres limites supérieures que celles de Newton. Soit Ax^m positif et F, G, H, ... les coefficients négatifs. Une seule valeur $x=L_1$, qui rendra $X_1=Ax^m-Fx^{m-f}-Gx^{m-g}-Hx^{m-h}$ nul ou positif, aura la propriété de rendre X toujours positif et croissant sans limites pour les substitutions suivantes. C'est qu'en effet de la supposition qu'une valeur de x fournisse

$$Ax^m \geqq Fx^{m-f}+Gx^{m-g}+Hx^{m-h}+\ldots.+T,$$

on conclut

$$mAx^{m-1} \geqq mFx^{m-f-1}+mGx^{m-g-1}+mHx^{m-h-1}+\ldots..+\frac{mT}{x}$$

et à fortiori

$$mAx^{m-1} > (m-f)Fx^{m-f-1}+(m-g)Gx^{m-g-1}+\ldots,$$

c.-à-d. que si l'on a $X_1 \geqq 0$, on en conclut $X_1' \geqq 0$, et par conséquent de même $X_1''>0$, $X_2''>0$, etc. A fortiori, a-t-on alors $X>0$, $X'>0$, $X''>0$, ... car dans ces polynômes, les parties positives sont plus grandes que dans X_1, X_1', X_1'', ... et les parties négatives sont les mêmes. Il suit de là que, comme la limite de Newton, la limite L_1 jouit de la propriété de faire croître sans limites le polynôme X et toutes ses dérivées avec le signe $+$. Si A était négatif, F, G, H, ... seraient tous les coefficients positifs de X, et le polynôme X croîtrait numériquement sans limites avec le signe $-$.

5. Enfin si l'on voulait *des valeurs négatives de* x *qui croissant numériquement fissent croître sans limites le polynôme* X *avec le signe acquis par le* 1er *terme*, il suffirait de poser $x = -z$ dans X, d'où $Z = A(-z)^m + B(-z)^{m-1} + \ldots\ldots$ On trouvera, comme précédemment, des valeurs de z qui feraient croître numériquement Z avec le signe acquis par le 1er terme, et qui, substituées dans X avec le signe —, feront le même effet.

6. *Étant donné un polynôme algébrique* $X = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots\ldots$, *on propose de trouver des valeurs positives de* x *qui rendent* X *de même signe que le dernier terme*, *telles que des valeurs moindres produisent le même effet*, *et que par la décroissance de ces valeurs, la variation de* X *devienne uniforme.*

Il est visible qu'on ne peut exiger que le polynôme X décroisse autant qu'on voudra, à moins qu'il n'ait pas de terme constant. On posera

$$x = \frac{1}{z}\ ;\ \text{X sera}\ \frac{1}{z^m}(Tz^m + Sz^{m-1} + \ldots\ldots + Bz + A).$$

Le nombre L, qui, mis pour z, donne un résultat de même signe que T, correspond à $x = \frac{1}{L}$, qui produit le même effet sur X. On pourra choisir pour L une limite supérieure des racines de $Tz^m + \ldots\ldots = 0$, de manière à ce que le polynôme Z croisse sans limites pour $z \geqq L$; mais, bien que pour $x \leqq \frac{1}{L}$ le polynôme $X = T + \frac{S}{z} + \ldots\ldots + \frac{B}{z^{m-1}} + \frac{A}{z^m}$ conserve toujours le signe de son dernier terme T, et par les valeurs décroissante de x, s'approche de T autant qu'on voudra, on n'est pas sûr qu'il variera uniformément entre $x = \frac{1}{L}$ et $x = 0$, c.-à.-d. qu'il sera constamment croissant ou décroissant entre ces deux substitutions.

7. Cela ne laisse aucun doute si l'on observe que T est l'ordonnée à l'origine de la courbe parabolique (*fig.* 62)

$$y = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots\ldots + Sx + T.$$

On saisit nettement que si $\frac{1}{L} = 0G$, l'ordonnée X pour les valeurs inférieures à $\frac{1}{L}$ pourra, tout en conservant le signe de T, croître ou décroître plusieurs fois jusqu'à ce qu'elle devienne T pour $x = 0$. Mais on voit de plus qu'on pourra toujours, en diminuant suffisamment $\frac{1}{L}$, arriver à une limite inférieure OH, au-dessous de laquelle la variation de X soit uniforme. Si, par exemple, T est positif; que pour $x = 0$, X' soit négatif, et X'' positif, on sera sûr que pour des valeurs suffisamment petites, savoir, $x =$ OH et au-dessous, le polynôme X est dans le cas de la *fig.* 63, c.-à.-d., va en croissant jusqu'à T. Si l'on trouve (chose souvent facile à voir) que pour $x \overset{=}{<} \frac{1}{L}$, X' conserve son signe, le polynôme X variera uniformément de $x = \frac{1}{L} =$ OH à $x = 0$; mais si de plus, X'' conservait aussi le même signe que $x \overset{=}{<} \frac{1}{L}$, il y aurait alors variation uniforme parfaite, c.-à.-d. sans serpentements, comme dans la *fig.* 64. Concluons de là que, *pour trouver des valeurs de* x *assez petites pour que* X *varie uniformément avec le signe de son dernier terme jusqu'à ce dernier terme*, il suffit d'avoir une limite inférieure de $X = 0$ qui soit en même temps limite inférieure de $X' = 0$. Si de plus, $X'' = 0$ avait la même limite inférieure, il y aurait alors pour X variation uniforme parfaite. Quant au sens de la variation, X'_0 et X''_0 l'indiqueront, dans tous les cas, comme je l'ai dit précédemment.

8. Supposons maintenant que le polynôme X n'ait pas de

terme constant; on trouvera aisément des valeurs de x assez petites pour que X acquière le signe de son dernier terme, que toute valeur moindre produise le même effet et qu'en même temps X diminue numériquement autant qu'on voudra. Car pour $x = \frac{1}{z}$, $X = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Sx$ devient $\frac{1}{z}(A + Bz + \ldots + Sz^{m-1})$; on cherchera une limite supérieure de $Z = A + Bz + \ldots Sz^{m-1} = 0$, et en le diminuant convenablement $X = \frac{A}{z^m} + \frac{B}{z^{m-1}} + \ldots + \frac{S}{z}$ deviendra aussi petit qu'on voudra. Les caractères donnés plus haut (7), subsistent toujours et l'on résoudra complétement la question si la limite inférieure choisie convient aussi à $X' = 0$. Je suppose d'ailleurs que le dernier terme de X soit du premier degré en x, ce qu'on pourra toujours faire.

9. Enfin on peut de même, par des substitutions négatives, résoudre la question proposée (6). Tout se réduira à trouver une limite inférieure des valeurs numériques des racines négatives de $X = 0$, qui soit aussi limite inférieure pour $X' = 0$. On imprimera ainsi à X une variation uniforme. Quoiqu'on puisse souvent procéder de même pour les polynômes à exposants fractionnaires, je n'en parle pas parce que leur dérivation n'est pas considérée dans les éléments d'algèbre.

Applications numériques.

10. 1° Quelles sont les valeurs positives de x qui rendent le polynôme $-9x^3 + 7x^2 - 15x + 2$ de même signe que le premier terme, et à partir desquelles ce polynôme croît numériquement jusqu'à l'infini?

Pour $9x^3 - 7x^2 - 2 \geqq 0$ on a $x \geqq 1$. Ainsi à partir de $x = 1$, le polynôme proposé est toujours négatif et croît sans cesse avec ce signe jusqu'à l'infini.

2° Quelles sont les valeurs positives de x qui rendent

$-9x^3+7x^2-15x+2$, de même signe que le dernier terme, et à partir desquelles sa variation est uniforme ?

Toute limite inférieure des racines positives de $9x^3-7x^2+15x-2=0$, doit rendre le premier membre négatif (à cause du terme connu -2) ; il suffira qu'on ait $9x^3<7x^2$ on $9x<7$ et $15\ x<2$. Ainsi pour $x \overset{=}{<} \frac{2}{15}$, le polynôme proposé est toujours positif, mais sa variation sera-t-elle uniforme? Comme $X'=-27x^2+14x-15$, $X''=-54x+14$ et que les limites inférieures des racines positives de $27x^2-14x+15=0$, $27x-7=0$ seraient obtenues par $x \underset{=}{<} \frac{15}{14}$, $x \underset{=}{<} \frac{2}{27}$, $x=\frac{2}{15}$ sera aussi limite inférieure des racines positives de ces deux équations. Donc X jouit d'une variation uniforme parfaite pour $x \overset{=}{<} \frac{2}{15}$. De plus $X'_0=-15$, $X''_0=+14$; donc enfin pour $x \overset{=}{<} \frac{2}{15}$ le polynôme proposé croît continuellement avec le signe + jusqu'à ce qu'il devienne 2 pour $x=0$.

3° Quelles sont les valeurs positives et négatives de x qui rendent le polynôme $-9x^3+7x^2-15x-2$ de même signe que son dernier terme et à partir desquelles sa variation est uniforme ?

Considérons d'abord les substitutions positives, elles seront limites inférieures des racines de $9x^3-7x^2+15x+2=0$, et devront rendre le premier membre positif à cause du terme constant $+2$. On posera $7x^2<2$ ou mieux $7x^2<15x$ d'où $x \overset{=}{<} 2$. Ainsi pour $x \overset{=}{<} 2$, le polynôme proposé est toujours négatif. $X'=-27x^2+14x-15$, $X''=-54x+14$. Comme on ne trouve pas que $x \overset{=}{<} 2$ soit limite inférieure pour $27x^2 - 14x + 15 = 0$, $54x - 14 = 0$, on n'est pas sûr que pour $x \overline{\underset{<}{=}} 2$ le polynôme X varie uniformément. Cependant si l'on observe que X″ change de signe entre $x = 0$, $x = 2$, mais que X′ reste toujours négatif parce que $X' = 0$ a des racines imaginaires, on admettra que pour $x \overline{\underset{<}{=}} 2$ le polynôme X décroît sans cesse avec le signe — et une variation uniforme imparfaite.

Considérons maintenant les substitutions négatives de x. En posant $x = -z$, X devient $9z^3 + 7z^2 + 15z - 2$. Pour avoir une limite inférieure des racines positives de $9z^3 + 7z^2 + 15z - 2 = 0$, posons $z = \frac{1}{t}$ on aura $-2t^3 + 15t^2 + 7t + 9 = 0$ ou $2t^3 - 15t^2 - 7t - 9 = 0$ dont il faudra chercher une limite supérieure des racines positives.

$2t^3 - 15t^2 - 7t - 9$,			$6t^2 - 30t - 7$,		$12t - 30$.	
6...2	—		4...6	—		
7...2	—		5...6	0	—	
8...2	1	1 —,	6...6	6	+	
9...2	3	20 +,				

Tous les termes se trouvant négatifs après le premier, on cherchera la limite de Newton. La dernière dérivée est positive pour $t = 3$, mais non pas la précédente. Pour les essais de $t = 4, 5, \ldots$ sur la première dérivée et $2t^3 - 15t^2 - 7t - 9$, il sera court d'employer la division abrégée dont le reste est toujours le résultat de la substitution qu'on cherche, et cela d'autant mieux qu'on n'a presque jamais besoin, pour le signe final, du calcul de tous les coefficients numériques (*).

(*) Il est assez singulier qu'aucun traité officiel d'algèbre ne cite l'emploi de la division abrégée d'un polynôme par $x - a$, procédé qui simplifie tellement la

On voit aussitôt par ce procédé que 4, 5, rendent la première dérivée négative, mais que 6 la rend positive. Enfin $t = 6, 7, 8$ rendent la proposée négative et 9 la rend positive. Ainsi pour $x \overline{\gtrless} -\frac{1}{9}$ le polynôme $X = -9x^3 + 7x^2 - 15x - 2$ est constamment négatif. Pour reconnaître sa variation, il faudrait une limite inférieure numérique de racines négatives de X', c'est-à-dire de $27x^2 - 14x + 15 = 0$; mais comme cette fonction est du deuxième degré et que ses racines sont imaginaires, on conclut que X' reste négatif pour toute substitution. $X'' = 54x + 14$ ne change pas de signe entre $x = \frac{1}{9}$ et $x = 0$ et comme $X'_0 = -15$, $X''_0 = +14$, on voit enfin que le polynôme proposé X est constamment négatif, décroissant numériquement et d'une variation parfaite pendant que x varie de $x = -\frac{1}{9}$ à $x = 0$.

NOTE SUR LA POSSIBILITÉ

de trouver une courbe algébrique fermée qui soit carrable.

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des ponts et chaussées.

Comment démontrer, demande M. Terquem, p. 267, par des moyens quelconques cette proposition de Newton : *qu'il n'existe aucune courbe algébrique fermée carrable ?*

Il est à croire que l'illustre géomètre n'attachait pas à la

---

recherche des racines commensurables, la formation numérique des polynômes dérivés, la recherche des limites et le calcul de la séparation des racines réelles. Ch.

proposition dont il s'agit, un sens bien général; car voici, ce nous semble, un exemple propre à éclaircir ce sujet.

Soit construite la courbe donnée par l'équation du quatrième degré,

$$y^2 = \frac{x^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

que nous supposons rapportée à des coordonnées rectangulaires. On verra qu'elle est limitée dans tous les sens, et qu'elle se compose de deux branches ou boucles *fermées* réunies entre elles à l'origine.

Cette courbe paraît donc être dans les conditions que Newton aurait jugées incompatibles avec une exacte quadrature.

C'est pourtant ce qui n'arrive point, car l'application des règles les plus simples de calcul intégral conduit aux expressions suivantes :

Aire comprise entre l'origine et une parallèle quelconque à l'axe des y,

$$\frac{2}{3}a^2\left(1 - \frac{y^3}{x^3}\right) = \frac{2}{3}a^2\left\{1 - \frac{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3}\right\};$$

Aire comprise entre la même parallèle et le sommet qui se trouve sur l'axe des x dans la même branche,

$$\frac{2}{3}a^2\frac{y^3}{x^3} = \frac{2}{3}\frac{a^2 - x^2}{a}\sqrt{a^2 - x^2};$$

courbe entière $\qquad \frac{4}{3}a^2.$

Toutes ces expressions sont, comme on sait, susceptibles d'être construites géométriquement avec la règle et le compas.

Note du rédacteur. Newton s'exprime ainsi : « Nulla exstat figura ovalis cujus area, rectis pro lubitu abscissa, possit per æquationes numero terminorum ac dimensionum finitas generaliter inveniri (Princip. Philos. Nat. Lib 1. Lemma XXVIII). »

Les raisonnements que fait Newton pour établir ce lemme exigent que l'*ovale* soit une courbe fermée et *entièrement* détachée des autres branches, et qu'il n'y ait pas de points multiples ; ce qui n'a pas lieu dans la courbe proposée, espèce de lemniscate à deux branches fermées contiguës et ayant au point commun deux tangentes bissectrices des angles des axes.

Le lemme est terminé par cette observation : « De ovalibus autem hic loquor quæ non tanguntur à figuris conjugatis in infinitum pergentibus. »

Le théorème de M. Cauchy sur les contours fermés, relativement aux racines imaginaires (*V.* t. I, page 443, § 6), est sujet aux mêmes restrictions que le lemme cité et par les mêmes raisons.

Saurin a employé le même tour de raisonnement que Newton pour établir l'impossibilité de rectifier, soit le cercle, soit l'ellipse (Mém. de l'Acad. de Paris, 1720). Ce sont les premiers linéaments de cette logique *fonctionnelle* que Bernoulli (Jean) a mise en usage pour démontrer le parallélogramme des forces, et que de nos jours Legendre a appliquée aux théorèmes fondamentaux de la géométrie. Il semble qu'il reste là quelques nuages à faire disparaître. Tm.

QUESTIONS D'EXAMEN.

Volumes engendrés par les polygones réguliers lorsqu'ils tournent autour d'un de leurs côtés.

PAR M. HUET,

Régent de physique au collége de Pamiers, ancien professeur de mathématiques spéciales à l'école de Sorrèze.

Lorsqu'un polygone régulier tourne autour d'un de ses côtés, on peut se proposer de déterminer en fonction de son côté c le volume qu'il engendre.

Nous résoudrons cette question pour les polygones réguliers les plus simples : le triangle, le carré, le pentagone, l'hexagone, l'octogone, le décagone, le dodécagone.

Deux méthodes se présentent naturellement. La première consiste à calculer le volume d'après le théorème de Guldin, et la seconde à décomposer le volume engendré en plusieurs autres dont la géométrie élémentaire donne l'expression. Nous emploierons d'abord la seconde, et la première nous fournira ensuite une vérification pour les résultats.

Désignons par c le côté du polygone, par R le rayon du cercle circonscrit à ce polygone, et par r l'apothème.

1° *Triangle.*

On a évidemment

$$\text{vol T} = \frac{1}{3}\text{AB}.\pi\overline{\text{CD}}^2 = \frac{1}{3}c.\pi.\frac{3}{4}c^2 = \frac{1}{4}\pi c^3 \quad (\textit{fig. } 73)$$

2° *Carré.*

Ici, sans aucun calcul, on trouve $\text{vol C} = \pi c^3$.

3° *Pentagone* (*fig.* 74).

Menons sur AB les perpendiculaires DG et CI ; joignons CE, EB et DB. On a évidemment $\text{vol P} = 2\,\text{vol DCBG}$. Or $\text{vol DCBG} = \text{vol DCIG} - \text{vol BIC}$.

Soit D la diagonale $\text{DB} = \text{EC} = \text{EB}$. Le quadrilatère inscrit BCDE donne $\text{BD.EC} = \text{BC.DE} + \text{CD.BE}$, ou $\text{D}^2 = c^2 + c.\text{D}$,

d'où $\quad \text{D}^2 - c\text{D} = c^2$, d'où $\quad \text{D} = \frac{1}{2}c\,(1 + \sqrt{5})$.

$$\text{DG}^2 = \overline{\text{BD}}^2 - \overline{\text{BG}}^2 = \text{D}^2 - \frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{4}(5 + 2\sqrt{5}).$$

$$\text{GI} = \text{FC} = \frac{\text{D}}{2} = \frac{c}{4}(1 + \sqrt{5})\,; \quad \text{BI} = \text{GI} - \text{BG} = \frac{c}{4}(\sqrt{5} - 1).$$

$$\overline{CI}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{BI}^2 = c^2 - \frac{c^2}{16}(6 - 2\sqrt{5}) = \frac{c^2}{8}(5 + \sqrt{5}).$$

Cela posé, $\text{vol}\,DCIG = \frac{1}{3}GI.\pi\,(\overline{DG}^2 + \overline{CI}^2 + DG.CI) =$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}c.\pi\,(1 + \sqrt{5})\left\{\frac{c^2}{4}(5 + 2\sqrt{5}) + \frac{c^2}{8}(5 + \sqrt{5}) + \right.$$

$$\left. + \frac{c^2}{8}\sqrt{(5 + 2\sqrt{5})(10 + 2\sqrt{5})}\right\} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}\pi c^3(1 + \sqrt{5})$$

$\left\{15 + 5\sqrt{5} + \sqrt{70 + 30\sqrt{5}}\right\}$ en simplifiant le radical $\sqrt{70 + 30\sqrt{5}}$ d'après une formule connue, on a

$$\text{vol}\,DCIG = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}\pi c^3(1 + \sqrt{5})\left\{15 + 5\sqrt{5} + 5 + 3\sqrt{5}\right\} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\pi c^3(1 + \sqrt{5})(5 + 2\sqrt{5}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\pi c^3(15 + 7\sqrt{5})$$

$$\text{vol}\,BCI = \frac{1}{3}BI.\pi\overline{CI}^2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}c(\sqrt{5} - 1)\pi\frac{c^2}{8}(5 + \sqrt{5}) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\pi c^3\sqrt{5};$$

donc

$$\text{vol}\,DCBG = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\pi c^3(15 + 6\sqrt{5}) = \frac{1}{8}\pi c^3(5 + 2\sqrt{5});$$

donc enfin $\qquad \text{vol}\,P = \frac{1}{4}\pi c^3(5 + 2\sqrt{5}).$

4° *Hexagone* (*fig.* 75).

Menons les droites AE, BD, FC; abaissons CI perpendiculaire sur AB, et représentons par H l'hexagone, par R le rectangle ABDE, par T le trapèze DCIB, par t le triangle DCB, et par t' le triangle BCI. On a évidemment

$$\text{vol}\,H = \text{vol}\,R + 2\,\text{vol}\,t = \text{vol}\,R + 2\,(\text{vol}\,T - \text{vol}\,t').$$

Or $\qquad \text{vol}\,R = AB.\pi\overline{AE}^2 = c\pi.3c^2 = 3\pi c^3.$

$$\text{vol}\,t = \text{vol}\,T - \text{vol}\,t' = \frac{1}{3}\,BI\left(\overline{BD}^2 + \overline{CI}^2 + BD.CI - \overline{CI}^2\right)\pi =$$

$$= \frac{1}{3}\,BI\,.\,BD\,(BD + CI)\,\pi = \frac{1}{3}\,\pi BI\,.\,2CI\,.\,3CI = 2\pi BI\,.\,\overline{CI}^2 =$$

$$= c.\pi.\,\frac{3}{4}\,c^2 = \frac{3}{4}\,\pi c^3\,;$$

donc $$2\,\text{vol}\,t = \frac{3}{2}\,\pi c^3\,;$$

et partant $$\text{vol}\,H = 3\pi c^3 + \frac{3}{2}\,\pi c^3 = \frac{9}{2}\,\pi c^3.$$

5° *Octogone* (*fig.* 76).

$$\text{vol}\,O = \text{vol}\,ABEF + 2\,\text{vol}\,EDCB = \text{vol}\,R + 2\,\text{vol}\,K.$$

Or $\text{vol}\,K = \text{vol}\,EDIB - \text{vol}\,BIC = \text{vol}\,T - \text{vol}\,T'$.

On a d'ailleurs

$$qm = bB = bC = \frac{1}{2}\,c\sqrt{2}\,;\ BE = mn = 2om = 2(oq + qm) =$$

$$2\left(\frac{c}{2} + \frac{c}{2}\sqrt{2}\right) = c\,(1 + \sqrt{2})\,;\ BI = \frac{1}{2}\,c\sqrt{2}\,;$$

$$DI = DC + CI = c + \frac{c}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\,c\,(2 + \sqrt{2})\,;$$

cela posé, on a

$$\text{vol}\,R = AB.\pi\overline{BE}^2 = c.\pi.c^2\,(1 + \sqrt{2})^2 = \pi c^3\,(3 + 2\sqrt{2})\,;$$

$$\text{vol}\,K = \text{vol}\,T - \text{vol}\,T' = \frac{1}{3}\,\pi\,BI\left(\overline{BE}^2 + \overline{DI}^2 + BE.DI - \overline{CI}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\,BI.BE.\pi\,(BE + DI + c),$$ en observant que

$$\overline{DI}^2 - \overline{CI}^2 = (DI + CI)\,(DI - CI) = BE.c.$$

Ainsi donc $$\text{vol}\,K = \frac{1}{3}\,\pi.\frac{c}{2}\sqrt{2}\,(1 + \sqrt{2})\left(3c + \frac{3c}{2}\sqrt{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\pi c^3\sqrt{2}\,(1 + \sqrt{2})\,(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}) =$$

$$= \frac{1}{2}\pi c^3 (2 + \sqrt{2})(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\pi c^3 (3 + 2\sqrt{2}).$$

Donc $2 \operatorname{vol} K = \pi c^3 (3 + 2\sqrt{2}) = \operatorname{vol} R$; résultat remarquable.

Donc $\operatorname{vol} O = 2\pi c^3 (3 + 2\sqrt{2})$.

(*La suite prochainement.*)

LIEU DES SOMMETS

D'UNE HYPERBOLE ET D'UNE ELLIPSE,

l'une ayant une asymptote et un foyer fixes, et l'autre un des diamètres conjugués égaux et un foyer fixes (*).

PAR M. AIMÉ RISPAL,
Élève du Collége de Rouen.

—

I. *Fig.* 56. Trouver le lieu des sommets d'une hyperbole ayant une asymptote et un foyer fixes. Soit F le foyer donné, et OY l'asymptote que je prends pour axe des y, et pour axe des x, la perpendiculaire OX. Le centre de la courbe est situé sur OY. Soit C ce centre dans une de ses positions, CF sera l'axe de la courbe; or, si je fais CA = CO, le point A est le sommet, car on sait que les pieds des perpendiculaires abaissées du foyer sur les tangentes ont pour lieu le cercle décrit du point C avec l'axe transverse pour rayon, et l'asymptote est une tangente dont le point de contact est à l'infini. Prenons OF pour unité. Soit $CO = CA = \alpha$, l'équation de CF sera

$$y + \alpha x = \alpha \qquad (1)$$

(*) La première partie a déjà été traitée, tome I, p. 158.

La similitude des deux triangles CQA, PAF donne

$$x : 1 - x :: \alpha : \sqrt{y^2 + (1-x)^2},$$

d'où l'on tire

$$\alpha^2 = \frac{x^2 y^2 + x^2 (1-x)^2}{(1-x)^2}, \qquad (2)$$

et en éliminant α entre les équations (1) et (2) on a évidemment le lieu cherché

$$y^2 = \frac{x^2 (1-x)}{1+x}$$

On aurait pu suivre une autre marche et partir de l'équation aux foyers. Elle est ici

$$y^2 + (x-1)^2 - (my + nx + p)^2 = 0,$$

ou en développant et ordonnant

$$(1-m^2)y^2 - (2mnx + 2mp)y + (1-n^2)x^2 - (2np+2)x + 1 - p^2 = 0.$$

La condition d'asymptotisme de l'axe des y donne pour $x=0$

$$1 - m^2 = 0, \quad 2mp = 0,$$

d'où

$$(1) \qquad m^2 = 1, \quad p = 0.$$

L'équation de la courbe devient ainsi

$$(2) \qquad (1-n^2)\,x^2 - 2mn\,xy - 2x + 1 = 0\,;$$

l'équation de l'axe est

$$(3) \qquad y = \frac{m}{n}(x-1)$$

or il suffit d'éliminer m et n entre les trois équations (1), (2) et (3).

De l'équation (3) on tire $n^2 y^2 = x^2 - 2x + 1$ en la combinant avec l'équation (1). Si on substitue cette dernière valeur ainsi que celle $m = \dfrac{ny}{x-1}$ dans l'équation (2) on en tire, toute réduction faite,

$$y^2 = \frac{x^2 (1-x)}{1+x}$$

Passons maintenant à la construction de la courbe ; on tire de l'équation

$$y = \pm x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad (fig.\ 57);$$

Ce lieu passe à l'origine et au point F, car pour $x=0$ et $x=1$, on a $y=0$. De plus, comme $x=-1$ donne $y=\infty$, on a une asymptote LL' parallèle à l'axe des y, à une distance de l'origine $OK=1$. La courbe est d'ailleurs entièrement comprise entre les droites LL' et BC, car on ne saurait avoir $x>1$ ni >-1. Quand on fait $x=1$, on trouve pour y deux valeurs nulles, donc il doit exister en F une ligne BC parallèle à l'axe des y et tangente à la courbe. Il est, d'après cette discussion, plus que probable que la courbe aura la forme indiquée par la figure. Pour nous en en assurer, formons la dérivée

$$y' = \pm \frac{1-x-x^2}{\sqrt{(1-x)(1+x)^3}}.$$

Pour $x=1$, $y'=\infty$, donc en effet, comme nous l'avions annoncé, il existe une tangente BC parallèle à l'axe de y. Si l'on fait $x=0$ on trouve $y'=\pm 1$, donc les deux bissectrices des angles des axes sont des tangentes à la courbe.

Pour achever de déterminer complétement la forme de la courbure, il faut chercher le point le plus élevé au-dessus de l'axe des x. On le trouvera en posant

$$1-2x-x^2=0,$$

ce qui donne $x=-1\pm\sqrt{2}$. La valeur négative doit être rejetée comme >1, donc l'abscisse du maximum cherché est $x=-1+\sqrt{2}$, et comme $OF=BF=1$, $OB=\sqrt{2}$. Si donc je prends $BD=BF$, j'aurai $OD=-1+\sqrt{2}$, et en rabattant ce point en D', j'ai le point cherché.

Je dis maintenant que les deux branches OH et OH' sont les lieux des seconds sommets. Menons une droite passant par le point F et dans une direction quelconque FG. Il suffit de démontrer que $GP = GP'$. Soit $y = m(x - 1)$ l'équation de cette droite ; en la combinant avec celle de la courbe, on a

$$m^2 (x - 1)^2 = -\frac{x^2 (x - 1)}{1 + x}.$$

et supprimant le facteur commun $x - 1$,

$$m^2 (x^2 - 1) = -x^2,$$

d'où

$$x = \frac{m}{\pm\sqrt{m^2 + 1}},$$

donc les deux abscisses des points P et P' sont égales, aux signes près. Par conséquent aussi $PG = P'G$. Il est clair encore d'après cela que l'asymptote LL' est le lieu des seconds foyers, car $GF = GF'$.

II. Proposons-nous maintenant de construire la courbe représentée par l'équation

$$y = \pm x \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}};$$

je remarque d'abord que cette équation est satisfaite pour $x = 1$, $y = 0$; donc la nouvelle courbe passe encore en F, et elle est aussi tangente à BC. On ne saurait admettre l'hypothèse $x = 0$, car alors la valeur de y est imaginaire nulle (*). Comme $x = -1$ donne $y = \infty$, on en conclut que la courbe a encore pour asymptote LL' ; du reste, aucun point de cette courbe imaginaire n'est compris entre les deux parallèles LL' et BC, car x ne saurait être < -1 ni < 1. On peut s'assurer par des substitutions directes qu'à partir de $x = 1$ la valeur de y croît sans cesse, mais peu rapidement ; il est donc probable que dans cette partie la courbe est concave vers l'axe

(*) C'est une erreur, car $0\sqrt{-1} = 0$, de même que $\infty\sqrt{-1} = \infty$. Ainsi l'origine est un point isolé. Tm.

des x ; on peut d'ailleurs s'en assurer directement en formant la dérivée du second membre

$$y' = \pm \frac{x^2 + x - 1}{\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}$$

tant qu'on donne à x des valeurs >1 il est facile de voir que la fraction est toujours positive ; si l'on prend le signe $+$ pour la branche supérieure, on voit alors que la concavité est tournée vers l'axe des x ; réciproquement si on prend le signe $-$ pour la branche inférieure, on trouve le même résultat : de plus, comme $x=1$ donne $y'=\infty$, il s'ensuit que la courbe est tangente à la droite BC au point F comme nous l'avions annoncé. D'ailleurs, pour les branches aux abscisses négatives l'asymptotisme indique assez que la convexité est tournée vers l'axe. De plus, il n'existe qu'un point de maximum, car de l'équation $x^2+x-1=0$, on tire

$$x' = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \qquad x'' = \frac{-1-\sqrt{5}}{2},$$

la première valeur qui est positive doit être rejetée comme étant <1, la deuxième seule est convenable, car elle est >-1. De plus, on peut voir que la courbe a deux asymptotes dont les équations sont $y=x-1$, $y=-x+1$. Construisant ces droites, on obtient les deux asymptotes FM, FM′, et j'ai ainsi pour cette courbe, les trois branches VFV′, UI et U′I′. Je dis maintenant que si l'on mène une sécante ZFG′Z′ on aura $ZF = Z'\varphi$; en effet, l'équation de cette sécante est $y = \alpha(x-1)$; substituant cette valeur dans l'équation de la courbe, on en tire

$$\alpha^2 (x-)^2\, 1 = \frac{x^2(x-1)}{x+1},$$

d'où

$$\alpha^2(x^2-1) = x^2 \quad \text{et} \quad x = \frac{\alpha}{\pm\sqrt{\alpha^2-1}}.$$

Donc, puisque les abscisses des points Z et Z′ sont égales, aux signes près, on aura $ZG'=Z'G'$; mais $FG'=\varphi G'$ donne $Z'\varphi=ZF$.

Cette seconde courbe se rapporte à une ellipse, dont l'un des diamètres conjugués égaux est donné de position, ainsi qu'un foyer; c'est ce que montre un calcul direct et c'est aussi ce qn'on pouvait conjecturer d'après l'analogie qui existe entre les asymptotes dans l'hyperbole et les diamètres conjugués égaux dans l'ellipse. Il faut se rappeler que dans ce cas $OF=\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}$; a, b étant les axes principaux et c l'excentricité.

DEUX THÉORÈMES

SUR LES TRANSVERSALES DANS LE CERCLE,

PAR M. P. LEFAIVRE,
Élève de rhétorique au Collége de Versailles.

THÉORÈME 1.

(*) Soit ABC (*Fig.* 58) un triangle inscrit au cercle, et dont les côtés AB, AC, BC, prolongés au besoin, soient coupés respectivement aux points F, G, H par une transversale FGH. Si l'on nomme a, b, c, les tangentes menées des points F, G, H à la circonférence, on aura

$$a.b.c. = AG.BF.CH = AF.BH.GC.$$

Démonstration. $a^2 = FB.FA$, $b^2 = GA.GC$, $c^2 = HB\,HC$.

Donc, $$a^2.b^2.c^2 = FA.BH.GC.BF.AG.CH.$$

(*) Il faut remplacer dans la figure P par F.

Or, FA.BH.GC = AG.BF.CH, d'après une propriété bien connue des transversales. Par conséquent, on aura

$$a^2.b^2.c^2 = (\text{AG.BF.CH})^2,$$

et par suite

$$a.b.c = \text{AG.BF.CH},$$

et aussi

$$a.b.c = \text{FA.BH.GC}.$$

C. Q. F. D.

THÉORÈME 2.

Soit une circonférence ABHD (*Fig.* 59) : menons une corde quelconque AB et par les extrémités A, B, deux tangentes AC, BK, et enfin une transversale quelconque CDHK, que je suppose couper la circonférence en D, H et la corde au point G, je dis qu'on aura

$$\text{DG}^2 : \text{GH}^2 :: \text{CD} \times \text{DK} : \text{HK} \times \text{HC}.$$

Démonstration. Faisons $\text{AC}=m$, $\text{BK}=n$, $\text{CD}=c$, $\text{HK}=d$, $\text{DG} = x$, $\text{GH}=y$, nous aurons $\text{AC}^2 = \text{CD} \times \text{CH}$, ou $m^2 = c(c + x + y)$ (1)

et $\text{BK}^2 = \text{KH} \times \text{KD}$, ou $n^2 = d(d + x + y)$ (2)

De l'équation (1), je tire $m^2 - cy = c(c + x)$.

De l'équation (2) $n^2 - dx = d(d + y)$.

Divisant ces deux équations, l'une par l'autre, il viendra

$$\frac{m^2 - cy}{n^2 - dx} = \frac{c(c + x)}{d(d + y)} \qquad (3).$$

Or, si je considère les segments déterminés par la transversale AGB sur les côtés du triangle COK, j'aurai évidemment $(d + y)m.\ \text{AO} = \text{AO}.n(c + x)$.

Donc $m : n :: c + x : d + y$. (4).

Donc, l'équation (3) devient

$$\frac{m^2 - cy}{n^2 - dx} = \frac{cm}{dn}$$

Chassant les dénominateurs et transposant

$$mx - ny = mn\left(\frac{cn - dm}{dc}\right) \qquad (5).$$

Or, la proportion (4) donne

$$my - nx = cn - md \qquad (6).$$

J'ai donc les deux équations du premier degré (5) et (6). J'en tire successivement par l'élimination

$$y = m(dc + n)\frac{cn - dm}{dc(m^2 - n^2)}$$

$$\text{et } x = n(dc + m^2)\frac{cn - dm}{dc(m^2 - n^2)}.$$

Donc, évidemment

$$y : x :: m(dc + n^2) : n(dc + m^2);$$

remplaçant n^2 et m^2 par leurs valeurs, il s'en suit

$$y : x :: md(c + x + y + d) : nc(c + x + y + d) :: md : nc;$$

donc $\qquad y^2 : x^2 :: m^2d^2 : n^2c^2,$

ou $\qquad y^2 : x^2 :: cd^2(c + x + y) : dc^2(d + x + y),$

ce qui donne enfin $y^2 : x^2 :: d(c + x + y) : c(d + x + y)$, proportion qui démontre le théorème.

Car en remplaçant y, x, d, c par leurs valeurs, la proportion qu'on vient d'obtenir donnera évidemment

$$\mathrm{DG}^2 : \mathrm{GH}^2 :: \mathrm{CD} \times \mathrm{DK} : \mathrm{HK} \times \mathrm{HC}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si la transversale coupait les deux tangentes dans l'angle supplément de AOK, on arriverait toujours à la proportion du théorème général en procédant comme ci-dessus. Il en sera de même, dans quelque autre position qu'elle coupe le système AODHB. Il faut cependant remarquer deux cas particuliers.

1° Si la transversale est parallèle à l'une des tangentes, par exemple à OB (*fig.* 60), on peut regarder son point d'intersection avec elle, comme situé à l'infini, la proportion du théorème général deviendra alors, dans ce cas particulier,

$$y^2 : x^2 :: c + x + y : c, \text{ ou } DG^2 : GH^2 :: CD : CH.$$

Enfin si les points C, K (*fig.* 61) se confondent au point O, où se coupent les tangentes, la proportion générale se réduira à DG:GH::DO:OH, porisme démontré par Robert Simpson, dans son traité *de Prismatibus*, à la proposition LXXIII. Ce géomètre indique en même temps que Pappus avait déjà donné le même porisme dans la proposition 154 du livre septième.

SOLUTION DU PROBLÈME 43 (p. 519, t. I).

PAR M. VIDAL,
Élève au collége de Montpellier.

Lieu du sommet d'un angle droit dont les côtés sont normaux à une conique donnée.

Soit $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ l'équation d'une ellipse, l'équation générale de la normale à cette courbe est

$$y = mx + \frac{c^2m}{\sqrt{a^2 + b^2m^2}} \qquad (2) \; (*)$$

d'où l'on tire :

$$b^2x^2m^4 - 2b^2xym^3 + (a^2x^2 - b^2 - c^4)\, m^2 - 2a^2xym + \\ + a^2y^2 = 0 \qquad (2).$$

Supposons que dans cette équation x et y soient des quantités constantes, alors elle nous fera connaître les valeurs de m qu'il faut porter dans l'équation (1) pour avoir toutes les

(*) Forme très-commode indiquée par M. Comte, Traité élém. de géom. anal., p. 358. Tm normales qui passent par le point (x, y). Si j'exprime que le produit de deux racines de l'équation ci-dessus est égal à l'unité, j'aurai exprimé que par le point (x, y) il y a deux normales qui sont rectangulaires, cela me donnera une relation entre x et y qui sera le lieu demandé. Il n'y a donc plus qu'à exprimer que l'équation (2) a deux racines dont le produit est égal à -1; pour simplifier les calculs, je désignerai par a, b, c, d les coefficients de l'équation lorsque celui du premier terme est l'unité, et par p, q, r, s, les trois racines de l'équation; nous aurons alors les relations suivantes :

$$p+q+r+s = -a.$$
$$rs+pq+pr+ps+qr+qs = b.$$
$$pqr+pqs+prs+qrs = -c.$$
$$pqrs = d.$$
$$pq = -1.$$

Il n'y a plus qu'à éliminer p, q, r, s entre ces équations.

Je puis écrire la deuxième équation comme il suit :

$$(p+q)(r+s)+rs+pq = b;$$

la troisième :

$$rs(p+q)+pq(r+s) = -c.$$

Dans ces deux équations et dans la quatrième, remplaçons pq par sa valeur -1, elles donneront :

$$(p+q)(r+s)+rs-1 = b.$$
$$rs(p+q)-(r+s) = -c.$$
$$rs = -d.$$

D'où

$$(p+q)(r+s)-d-1 = b\ldots (3).$$
$$d(p+q)+(r+s) = c.$$

Ces deux équations réunies à l'équation

$$p+q+r+s = -a,$$

permettront facilement l'élimination de p, q, r, s; de la deuxième je tire

$$r+s=c-d\,(p+q);$$

remplaçânt dans la troisième $r+s$, par cette valeur, il vient

$$p+q+c-d\,(p+q)=-a.$$

D'où

$$p+q=-\frac{a+c}{1-d}.$$

Nous aurons parconséquent

$$r+s=\frac{c+ad}{1-d}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (3), nous trouvons que l'équation de condition cherchée est :

$$-\frac{(c+ad)\,(a+c)}{(1-d)^2}-(d+1)=b,$$

ou bien, en chassant le dénominateur,

$$(c+ad)\,(a+c)+(d+1)\,(1-d)^2+b\,(1-d)^2=0.$$

Il n'y a plus maintenant qu'à remplacer dans cette équation a, b, c, d, par leurs valeurs; or nous avons :

$$a=-\frac{2y}{x},\ b=\frac{a^2x^2+b^2y^2-c^4}{b^2x^2},\ c=-\frac{2a^2y}{b^2x},\ d=\frac{a^2y^2}{b^2x^2}.$$

En remplaçant dans l'équation de condition trouvée ci-dessus, il vient :

$$\left(\frac{2y}{x}+\frac{2a^2y}{b^2x}\right)\left(\frac{2a^2y}{b^2x}+\frac{2a^2y^3}{b^2x^3}\right)+\left(1+\frac{a^2y^2}{b^2x^2}\right)\left(1-\frac{a^2y^2}{b^2x^2}\right)^2+$$
$$\left(\frac{a^2x^2+b^2y^2-b^4}{b^2x^2}\right)\left(1-\frac{a^2y^2}{b^2x^2}\right)^2=0;$$

d'où, en chassant les dénominateurs et réduisant, on obtient :

$$(a^2+b^2)\,(x^2+y^2)\,(a^2y^2+b^2x^2)^2=c^4\,(a^2y^2-b^2x^2)^2.$$

Voilà, en définitive qu'elle est l'équation du lieu géométrique cherchée. C'est une équation du sixième degré. On voit que la courbe est symétrique par rapport aux axes, ainsi que cela doit être par la nature de la question. Pour faciliter la discussion de la courbe, je vais passer de cette équation en coordonnées rectilignes, à la même équation en coordonnées polaires; pour cela il n'y a qu'à remplacer x par $\rho\cos\omega$, et y, par $\rho\sin\omega$, il vient :

$$\rho = \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\frac{b^2-a^2\operatorname{tang}^2\omega}{b^2+a^2\operatorname{tang}^2\omega}$$

Si dans cette expression nous faisons $\omega = 0$, on a

$$\rho = \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

La valeur de ρ est plus petite que c, cela détermine un point sur l'axe des x, le point D (*fig.* 71).

Lorsqu'on fait $\operatorname{tang}^2\omega = \frac{b^2}{a^2}$,

la valeur du rayon vecteur est égale à zéro, mais cette condition sera satisfaite lorsqu'on aura la direction des diamètres conjugués égaux; il s'ensuit donc que suivant la directrice OG et la directrice OG′, ρ est égal à zéro, la droite GG′ est donc tangente à la courbe, à l'origine des coordonnées; il en sera de même de la droite HH′, si nous faisons $\omega = \frac{\pi}{2}$, on a encore

$$\rho = \frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Cela déterminera sur le petit axe de l'ellipse les deux points E, E′, points où la courbe cherchée coupe le petit axe. Ces points sont hors de l'ellipse si $a^2 > 3b^2$; sur l'ellipse, si $a^2 = 3b^2$, et dans l'intérieur si $a^2 < 3b^2$.

Ainsi la courbe est inscrite dans le cercle concentrique à l'ellipse, et d'un rayon égal à

$$\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

La courbe cherchée est donc composée de quatre parties symétriques par rapport aux axes de la courbe, et comprises dans les angles que les diamètres égaux font entre eux. Si dans l'équation de la courbe en change ω en $\pi + \omega$, la valeur de ρ ne change pas, cela nous montre donc que les parties de la courbe comprises dans les angles opposés au sommet des diamètres égaux, sont égales, mais les quatre parties ne sont pas égales entre elles, parce que la valeur de ρ change lorsqu'on change ω en $\pi - \omega$. Il y a quatre points d'inflexion à l'origine, la partie de la courbe qui est comprise dans l'intérieur des angles obtus des diamètres égaux, est plus ouverte que celle qui est comprise dans l'intérieur des angles aigus, on peut donc tracer la courbe qui aura la forme qu'on lui voit sur la figure (71). Si l'ellipse devenait un cercle, la courbe se réduirait à l'origine, ce que nous aurions pu facilement prévoir d'avance.

Pour avoir l'équation de la courbe dans le cas de l'hyperbole, il n'y a qu'à changer dans celle qui se rapporte à l'ellipse b^2 en $-b^2$, ce qui donne,

$$\rho = \frac{c^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \; \frac{(a^2 \operatorname{tang}^2\omega + b^2)}{a^2 \operatorname{tang}^2\omega - b^2}$$

pour que cette courbe existe, il faut que l'axe focal soit plus grand que son conjugué; cela étant, la discussion directe de la courbe nous montre qu'elle a les mêmes asymptotes que l'hyperbole, et qu'elle a la forme qu'on lui voit, sur la figure 72; cette courbe a quatre points singuliers à l'origine des coordonnées, et se compose de quatre branches infinies; une dans chaque angle des asymptotes, correspondante aux

normales appartenant à une même branche ou à deux branches différentes de l'hyperbole, on ne l'a pas tracée.

Il ne faut pas croire cependant que ce sont là deux hyperboles conjuguées, comme il le semblerait.

Si $a = b$, c'est-à-dire si l'hyperbole devient équilatère, il reste $\rho = \infty$, ce qui donne un point situé à l'infini, car il est évident qu'alors il n'y a que les asymptotes qui soient des triangles rectangulaires, ce qui donne pour les normales rectangulaires un point situé à l'infini.

La marche que nous avons employée ponr l'ellipse pourrait s'appliquer avec beaucoup plus de facilité à la parabole, le lieu cherché est alors une parabole, ayant même axe que la parabole donnée, le sommet est à une distance $\frac{3}{2}p$ de l'origine, et le paramètre est le quart du paramètre de la parabole donnée (*).

QUESTION D'EXAMEN.

PAR GUIBAL (CHARLES),
Élève du collége Saint-Louis.

En quel point d'une table à trois pieds faut-il placer un poids donné, pour qne les pressions soient dans un rapport donné? N'y a-t-il qu'une position? (Tome I, p. 350.)

Soient, (*fig.* 77), M,N,P, les points fixes dela table, et O le point cherché tel que les pressions aux points M,N,P soient entre elles comme m,n,p. Appelons M,N,P ces trois pressions qui ont pour résultante, le poids du corps appliqué en O. On sait alors que le point O doit se trouver dans l'intérieur du triangle MNP formé par les points d'appui, et que ces trois

(*) Dans le prochain numéro, nous donnerons une solution très-courte du problème général. Tm.

forces sont représentées proportionnellement, par les trois triangles formés en joignant le point O aux trois sommets ; de telle sorte qu'on a :

M : N : P :: NOP : MOP : MON.

Mais comme on doit avoir :

M : N : P :: $m : n : p$

on aura

NOP : MOP : MON :: $m : n : p$.

Le problème est donc ramené à trouver dans un triangle un point tel qu'en le joignant aux sommets, on forme trois triangles dont les aires soient dans les rapports donnés. On y arrive de la manière suivante : soit toujours O le point cherché, menons OQ, OR, parallèles à MN, NP et tirons NQ, NR. Les triangles MON, MQN sont équivalents comme ayant même hauteur et même base MN ; il en est de même des triangles NOP, NRP et par conséquent aussi des triangles restants MOP, NQR. La proportion ci-dessus devient alors :

NPR : NQR : NMQ :: $m : n : p$.

Mais ces trois triangles ayant même sommet et leurs bases sur une même droite, ont même hauteur et sont entre eux comme ces bases.

Donc on a :

NPR : NQR : NMQ :: PR : RQ : MQ

de ces deux dernières proportions, on tire :

PR : RQ : MQ :: $m : n : p$.

Donc pour résoudre le problème, il faut partager la base MP en trois parties PR, RQ, MQ proportionnelles à m, n, p, puis mener QO, RO parallèles à MN, PN et le point de rencontre O de ces deux parallèles, sera le point cherché.

Le problème admet six solutions ; en effet, nous avons supposé que les pressions M, N, P correspondaient, la 1^re^ au nombre m, la 2^e^ au nombre n et la 3^e^ à p ; mais on peut prendre ces six quantités deux à deux de six manières différentes. En effet, prenant M et m, on peut prendre en même temps N et n, P et p, ou bien N et p, P et n, ce qui donne deux combinaisons; avec N et m, on peut prendre : ou bien M et n, P et p, ou bien M et p, P et m. Enfin avec P et m on peut prendre M et n, N et p, ou M et p, N et n; ce qui donne bien six solutions. C'est aussi ce que l'on voit d'après la construction à effectuer pour résoudre le problème; car au lieu de partager MP proportionnellement à m,n,p en allant de P vers M, on peut aller de M vers P, ce qui donnera une seconde solution; maintenant, au lieu d'opérer sur le côté MP, opérons sur chacun des deux autres, nous aurons pour chacun d'eux deux solutions, ce qui fait en tout six solutions.

Si, comme cas particulier, on avait $m=n=p$, les trois distances NQ, QR, RP seraient égales et les deux parrallèles QO, RO détermineraient le centre de gravité du triangle qui serait alors le point cherché. Dans ce cas, les six solutions se réduisent à une seule.

Si, en outre, le triangle MNP était équilatéral, le point O serait le centre du triangle, car ce point est en même temps le centre de gravité.

THÉORÈME SUR LES NOMBRES COMBINÉS.

PAR L. A. LE COINTE.

—

Si on a un nombre pair $2m$ de quantités, toutes positives,

$$(1) \qquad a_1\ a_2\ a_3\, a_4\ \ldots\ldots\ a_m\ a_{m+1}\ a_{m+2}\ \ldots\ldots\ a_{2m},$$

rangées par ordre de grandeur, en commençant par la plus petite, et si A_1 est le produit des m premières, et A_2 celui des m dernières, la quantité A_1+A_2 sera maximum parmi toutes celles que l'on pourra former, en prenant les produits m à m des quantités de la suite (1), et ajoutant ces produits deux à deux.

Démonstration. Soit $B_1 + B_2$ une quantité analogue à A_1+A_2, c'est-à-dire une quantité telle que B_1 est le produit de m des quantités de la suite (1) et B_2 celui des m autres, je dis que, B_1 et B_2 étant différents de A_1 et A_2, on aura

$$B_1 + B_2 < A_1 + A_2 ;$$

En effet, on a,

$$B_1 < A_2 \qquad B_2 < A_2,$$
$$B_1 > A_1 \qquad B_2 > A_1;$$

d'où il résulte, quel que soit le signe de $B_2 - B_1$,

$$(A_2 - A_1)^2 > (B_2 - B_1)^2 \ (1) ;$$

mais on a

$$4A_2A_1 = 4B_2B_1;$$

d'où, en ajoutant cette dernière égalité à l'inégalité (1), on aura

$$(A_2 + A_1)^2 > (CB_2 + B_1)^2;$$

d'où, attendu que $A_2 + A_1$ et $B_2 + B_1$ sont toujours deux quantités positives,

$$A_2 + A_1 > B_2 + B_1 \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

2. Le théorème précédent est un cas particulier de cet autre plus général, qu'il serait facile de démontrer.

Théorème. Si on a un nombre mn de quantités, toutes positives, rangées par ordre de grandeur, en commençant par la plus petite, et formant ainsi une suite que nous désignons par S; si on divise la suite (à partir du commencement de cette suite) en n tranches, chacune composée de m de ces quantités;

Si A_1 est le produit des quantités renfermées dans la première tranche,

A_2, le produit des quantités renfermées dans la deuxième,

A_3, le produit des quantités renfermées dans la troisième, et ainsi de suite, et enfin,

Si A_n est le produit des quantités renfermées dans la $n^{ième}$ tranche, la quantité

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n$$

sera maximum parmi toutes celles que l'on pourra former en prenant les produits m à m des quantités de la suite S, en ajoutant ces produits n à n.

Observation. Le théorème existe aussi pour un nombre impair $2m+1$; mais alors A_1 est le produit minimum des m premières quantités, et A_2 le produit maximum des $m+1$ dernières quantités. Tm.

GRAND CONCOURS DE 1843. (*V.* tome I, p. 352.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

Mathématiques spéciales.

Exposer d'une manière concise, la théorie des racines égales, ainsi que la méthode qu'on en tire, pour mener des tangentes aux courbes algébriques.

Mathématiques élémentaires.

1° Résoudre l'équation générale du second degré à une seule inconnue, et discuter les valeurs qui peuvent se présenter. 2° Expliquer en géométrie les deux solutions que l'algèbre donne, en cherchant le côté du décagone régulier, au moyen du rayon du cercle circonscrit.

—

Ceci me rappelle une anecdote racontée par le Champenois baron de Tott, diplomatiquement accrédité auprès de la Porte Ottomane. Le grand visir, très-ignorant, avait une très-haute opinion des connaissances mathématiques du collége de Constantinople ; il invita notre compatriote à procéder à un examen. Or, dans aucun pays, pas même en Turquie, il n'est prudent de blesser l'opinion d'un ministre, surtout lorsqu'elle est mal fondée. Tott mit donc par écrit cette proposition, très-modeste : Démontrer que la somme des trois angles d'un triangle est égale à deux angles droits. Après quelques jours de réflexion, on répondit que la proposition était vraie, pour le triangle équilatéral. Je ne garantis pas l'authenticité du fait; car le baron est sujet à caution. Mais, quoi qu'il en soit, depuis que l'illustre Poisson a quitté, avec la vie, la haute direction de l'enseignement mathématique, il semble qu'en fait de concours, nous convergeons sensiblement vers l'antique Byzance. Tellement que, si Dieu me prête encore quelques années, je ne désespère pas de voir figurer le théorème de Tott, comme objet du grand prix d'honneur de l'Université royale de France. Ce mode de concours n'est peut-être pas le mieux choisi, pour donner du relief à l'institution, et donner aux étrangers une idée à la fois grande et juste du talent de nos professeurs, de l'instruction des élèves. Toutefois, cette considération qui n'est que patriotique, étant écartée, le nouveau mode a aussi son bon côté. Anciennement, les questions étaient assez importantes, pour que des Gergonne, des Francœur, des Hachette, daignassent s'en occuper. Or, la recherche, l'invention de telles questions, exige quelques études, quelques préparations, des investigations préliminaires, du travail enfin, inconvénient fâcheux. Tandis qu'aujourd'hui, se bornant aux théories enseignées, on peut improviser un programme, au milieu d'une conversation intéressante, sans l'interrompre, en lisant le journal, ou se livrant à d'autres distractions amusantes. C'est déjà fort agréable, mais cet avantage n'est pas le seul; autrefois, le nombre des élus étant restreint, les juges n'avaient à se prononcer qu'entre quelques lutteurs d'une force éprouvée, tandis que maintenant le grand nombre est appelé; concours selon la signification primitive, un vrai concours ouvert omnibus, démocratique, dans l'esprit du jour. On demandera peut-être comment se tireront les juges de ce déluge d'élucubrations, d'amplifications *concises*, sur des sujets d'une vulgarité si banale. Certes, si l'ennui naquit un jour de l'uniformité, cent litanies sur des racines égales ne le feront pas disparaître. Quelles que soient, la capacité, la perspicacité, l'inexpugnable patience des juges, comment échapperont-ils aux effets inévitables d'une occupation si mortellement monotone? Cette objection n'est grave qu'en apparence. Car, il n'y a rien qui puisse empêcher la majorité de déclarer qu'un tel aura le prix, et le public n'en demande pas davantage. Voyez plutôt. En 1842, un des concurrents a consigné une observation ingénieuse, probablement la plus saillante du concours (*V*. tome I, p. 385)); n'ayant pas été remarquée, son auteur, M. Hermite n'a pas seulement obtenu une nomination; en 1843, l'illustre Jacobi écrit à ce même M. Hermite: «Je lui sais bon gré (*à M. Liouville*) d'avoir bien voulu me procurer le grand plaisir que j'ai ressenti en lisant le mémoire d'un jeune géomètre dont le talent s'annonce avec tant d'éclat, dans ce que la science a de plus abstrait.» (*Comp. rendu de l'Acad. des sc.*, 1843, 2^e s. p. 82.)

Nos lecteurs connaissent ce jeune géomètre, élève de M. Richard, professeur au collége Louis-le-Grand, par son beau travail sur les équations du 5^e degré (tome I, p. 326, 329). J'en conclus, que les jugements, pour les grands prix universitaires, lettres et sciences, ainsi qu'il est d'usage pour les prix académiques, devraient être *motivés*; ce serait plus glorieux pour les lauréats, plus rassurant et plus instructif pour tout le monde. Les avantages civils attachés à juste titre à cet honneur sont assez importants, pour rendre nécessaire une nouvelle garantie publique. Tm.

THÉORÈME SUR LE TRAPÈZE.

PAR M. A. LEBELIN,
Élève du collége de Dijon.

THÉORÈME. Le lieu géométrique des points d'intersection des diagonales d'un trapèze dont la base inférieure est fixe, dont la base supérieure est constante, ainsi que la somme des deux côtés non parallèles, est une ellipse.

Démonstration. Supposons un trapèze ABCD (*fig.* 78), menons-en les diagonales AC, BD, et par le point d'intersection M menons MF et CK parallèles à AB. Soient $AB=m$; $AF=\delta$; $AD=B$; $BC=b$; $CD=n$, nous aurons, à cause des triangles semblables MAF, CAK :

$$MF : m :: \delta : b.$$

De même les triangles semblables BAD, MFD, donnent :

$$(1) \qquad MF : m :: B-\delta : B;$$

on conclut de ces deux proportions,

$$B-\delta : B :: \delta : b\,;\ \text{d'où}\ \delta=\frac{Bb}{B+b};$$

donc le point F sera constant pour tous les trapèzes qui auront les mêmes bases parallèles.

Maintenant si nous menons par le point M une ligne MF' parallèle à CD, nous trouverons encore que $DF'=\frac{Bb}{B+b}=AF$.

Par conséquent le point F' est aussi constant.

Or, transportons la valeur trouvée pour δ, dans la proportion (1), nous aurons :

$$FM : m :: B-\frac{Bb}{B+b} : B,\ \text{donc}\ FM=m\frac{B}{B+b};$$

on trouverait de même : $F'M = n\dfrac{B}{B+b}$,

ajoutons FM et F'M, il viendra

$$FM + F'M = (m+n)\frac{B}{B+b}.$$

Par conséquent, puisque les points F et F' sont fixes, il en résulte que le problème suivant : *Trouver le lieu géométrique des points d'intersection des diagonales des trapèzes dont la base inférieure est fixe et dont la base supérieure se meut de manière que la somme des côtés non parallèles reste constante*, est résolu; c'est une ellipse qui a pour foyers F et F', et dont le grand axe est égal à $(m+n)\dfrac{B}{B+b}$

BRIÈVE ET NOUVELLE DÉMONSTRATION

Du théorème de Newton sur le quadrilatère circonscrit à une conique. (Voy. p. 110.)

—

THÉORÈME. Le lieu des centres des coniques inscrites à un quadrilatère est une droite.

Démonstration. Soit $dy + ex + f = 0$, l'équation d'un des côtés du quadrilatère; puisque ce côté est une tangente, on a l'équation

$$\frac{l'}{m}d^2 - 2de\frac{n}{m} + \frac{l}{m}e^2 + f^2 + 2fd\frac{k'}{m} + 2ef\frac{k}{m} = 0, \text{ (p. 108)},$$

faisons $x = \dfrac{k}{m}$, $y = \dfrac{k'}{m}$, $\dfrac{n}{m} = z$; les quatre côtés fournissent quatre équations semblables du premier degré entre les cinq quantités $x, y, z, \dfrac{l}{m}, \dfrac{l'}{m}$; considérant z comme une quantité connue, on tire de ces quatre équations, à l'aide des formules de *Cramer*, $x=pz+q$, $y=p'z+q'$; p, q, p', q', sont des fonctions connues des coefficients d, e, f, d', e', f', etc.; éliminant z, on a $\frac{x-q}{p}=\frac{y-q'}{p'}$; équation d'une droite, où x et y sont les coordonnées du centre, donc etc.

Remarque. Le même genre de raisonnements peut s'appliquer aux rapports $\frac{l}{k}$, $\frac{l'}{k}$; ce qui fait connaître une nouvelle propriété.

Les trois diagonales du quadrilatère complet peuvent être considérées comme trois ellipses ou hyperboles aplaties, remplissant les conditions du problème, et les milieux de ces droites sont des centres; donc la droite des centres passe par les milieux des diagonales. Tm.

DÉTERMINATION DES AXES PRINCIPAUX

DANS LE CONE DU SECOND ORDRE;

PAR C. E. PAGE,
Professeur à l'École d'artillerie de la Fère (Fin.)

—

7. Nous allons maintenant chercher le lieu géométrique engendré par une droite qui passe par le sommet, et qui se meut de manière que sa projection verticale reste constamment perpendiculaire à la trace verticale de son plan polaire. Pour cela, par le sommet S (*fig.* 69), menons dans le plan vertical une droite quelconque SK que nous considérerons comme la projection verticale de la droite mobile dans une

de ses positions. La trace horizontale devra être située sur la droite Km menée par le point K perpendiculairement à la ligne de terre ; la trace verticale du plan polaire sera la droite SF menée par le sommet perpendiculairement à la projection verticale SK, et sa trace horizontale devra passer par le point F où la droite SF rencontre la ligne de terre. Mais la trace horizontale du plan polaire est la polaire de la trace horizontale de la droite ; il faut donc déterminer sur la perpendiculaire Km un point tel que la polaire de ce point passe par le point F ; or le pôle de toute droite qui passe par le point F est situé sur la polaire de ce point, la trace horizontale cherchée est donc le point m intersection de la perpendiculaire Km avec la droite Gm polaire du point F.

En faisant tourner la droite SK autour du point S, et répétant la même construction pour chaque position de cette droite, on aura le lieu géométrique cherché.

Lorsque la droite SK tourne autour du point S, les deux points K et F glissent sur la ligne de terre, la ligne Gm reste parallèle à la direction conjuguée du diamètre Rq sur lequel se meut le point F, et la ligne Km reste perpendiculaire à la ligne de terre.

Le lieu géométrique est donc engendré par l'intersection de deux droites qui restent chacune parallèle à une même direction fixe et qui sont dirigées dans leurs mouvements par les deux points G et K.

Si l'on pose

$$\mathrm{OP}=a,\ \mathrm{O}q=b,\ \mathrm{PS}=h,\ \mathrm{OG}=\alpha,\ \mathrm{OK}=\beta,\ \mathrm{OF}=\gamma\,;$$

parce que les deux droites SK et SF sont rectangulaires, on aura

$$\mathrm{KP}\times\mathrm{PF}=\overline{\mathrm{PS}}^2 \quad \text{ou} \quad (\beta-a)(\gamma-a)=h^2,$$

et parce que les deux points G et F sont conjugués, harmoniques, par rapport au diamètre Rq, on aura

$$\mathrm{OG}.\mathrm{OF}=\mathrm{O}q^2 \quad \text{ou} \quad \alpha\gamma=b^2,$$

éliminant γ entre ces deux équations, il vient

$$a\alpha\beta + (h^2 - b^2)\alpha - b^2\beta + ab^2 = 0\,;$$

on voit que les segments variables compris entre le point fixe O et les deux points directeurs K et G sont liés par une équation de la forme (C), (3), il s'en suit que le lieu géométrique engendré par le point d'intersection des deux droites mobiles est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles à ces droites.

Lorsque le point K se confond avec le point P, le point F est situé à l'infini, la polaire du point F est le diamètre OL conjugué du diamètre Rq. La courbe passe donc par le point L, où ce diamètre vient rencontrer la perpendiculaire menée par le point P à la ligne de terre.

Lorsque le point K est situé à l'infini, le point F se confond avec le point P, le point C est situé à l'infini sur la polaire du point P, on en conclut que cette polaire du point P est une des asymptotes de la courbe.

Lorsque le point F se confond avec le point O, la polaire de ce point est située à l'infini, et le point C est situé à l'infini sur la position correspondante de la perpendiculaire Km; on en conclut que cette position de la perpendiculaire Km est la seconde asymptote de la courbe.

Notre hyperbole est donc complétement déterminée, puisque l'on connaît un de ses points et ses deux asymptotes.

Lorsque la directrice est une parabole, ce second lieu géométrique est également une hyperbole.

Les solutions du problème sont données par les intersections des deux hyperboles que nous venons de déterminer. Or deux hyperboles se coupent en quatre points ; par conséquent, retranchant le point d'intersection L qui est situé sur la perpendiculaire à la ligne de terre menée par le point P, *il reste trois solutions*. Il est vrai que les quatre points d'intersection de deux hyperboles, ou seulement deux de ces points peuvent être imaginaires; mais ici nos deux hyperboles ont déjà un point d'intersection réel en L; elles ont donc nécessairement un second point d'intersection réel; par conséquent nous sommes certains qu'il existe au moins un axe principal; or, nous allons faire voir que l'existence d'un seul axe principal entraîne nécessairement l'existence des deux autres.

En effet, la section faite par un plan perpendiculaire à cet axe est une ellipse ou une hyperbole : supposons que ce soit une ellipse, en prenant cette ellipse pour directrice, nous aurons une cône droit à base elliptique (*fig.* 70); menons par le sommet une droite parallèle à l'un des axes de l'ellipse, cette droite aura pour plan polaire le plan mené par le sommet et par l'autre axe de l'ellipse, comme elle est évidemment perpendiculaire à ce plan, ce sera un axe principal du cône. En outre comme la trace horizontale du plan mené par le sommet et par l'un des axes de l'ellipse, rencontre cette ellipse, les sections faites parallèlement à ce plan sont des hyperboles.

Dans le cas où la base du cône droit est une hyperbole, on démontre de la même manière qu'il existe deux nouveaux axes principaux rectangulaires. Comme la trace horizontale du plan mené par le sommet et par le second axe de l'hyperbole ne rencontre pas cette courbe, les sections faites parallèlement à ce plan sont des ellipses, tandis que les sections faites parallèlement au plan qui passe par le sommet et par le premier axe sont des hyperboles.

§ 8. On voit d'après cela que toute surface conique qui a pour directrice une courbe quelconque du second ordre, a toujours trois axes principaux rectangulaires, que les sections faites perpendiculairement à l'un de ces axes sont des ellipses, tandis que les sections faites perpendiculairement aux deux autres axes sont des hyperboles. Il résulte de là que cette surface est toujours un cône droit à base elliptique.

§ 9. Nous allons chercher actuellement suivant quelle direction la surface d'un cône droit à base elliptique doit être coupée par un plan pour que la courbe d'intersection soit une circonférence.

Le diamètre de la base qui est conjugué à la direction de la trace horizontale du plan coupant, est la projection du diamètre de la courbe d'intersection qui est conjugué à la même direction : or dans le cercle deux directions conjuguées sont toujours rectangulaires ; pour que la courbe soit une circonférence, il faut donc que le diamètre conjugué à la trace horizontale du plan coupant soit perpendiculaire à cette trace, cette condition ne peut être remplie à moins que la trace du plan coupant ne soit perpendiculaire à l'un des deux axes de l'ellipse.

Il est facile de voir que lorsque la trace horizontale du plan coupant est perpendiculaire au grand axe, la courbe d'intersection est une ellipse encore plus allongée que l'ellipse de la base ; il faut donc que cette trace soit perpendiculairé au petit axe.

Soit SABCD (*fig.* 70), un cône droit à base elliptique ; SG et GE, les deux traces d'un plan mené par le sommet, et tel que tout plan qui lui est parallèle coupe la surface suivant une circonférence.

Posons le demi-grand axe de l'ellipse $= a$,
le demi-petit axe $= b$,
la hauteur du cône OS $= h$,
la distance OG $= x$.

Par un point quelconque p de la ligne de terre, menons un plan parallèle au plan SGE, soient mn et pq les deux traces de ce plan ; puisque la courbe d'intersection est une circonférence, on a

$pq^2 = pm.pn$ mais $\frac{pq^2}{a^2} = \frac{pA.pB}{b^2}$ d'où $\frac{pm.pn}{pA.pB} = \frac{a^2}{b^2}$,

à cause des triangles semblables, on a

$$\frac{pn}{pA} = \frac{GS}{GA} \quad \text{et} \quad \frac{pm}{pB} = \frac{GS}{GB};$$

multipliant membre à membre, on a

$$\frac{pm.pn}{pA.pB} = \frac{GS^2}{GA.GB} \quad \text{d'où} \quad \frac{GS^2}{GA.GB} = \frac{a^2}{b^2},$$

mais $GS^2 = h^2 + x^2$, $GA = x + b$ et $GB = x - b$; remplaçant par ces valeurs, il vient

$$\frac{x^2 + h^2}{x^2 - b^2} = \frac{a^2}{b^2}, \quad \text{d'où l'on tire} \quad x = b\,\frac{\sqrt{a^2 + h^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Cette valeur de x est facile à construire. Prenons une longueur OK égale à la génératrice menée du sommet S au point C, cette génératrice est égale à $\sqrt{a^2 + h^2}$; construisons le foyer F, la distance OF est égale à $\sqrt{a^2 - b^2}$; joignons le point F au point B, et par le point K menons la droite KG parallèle à FB, la distance OG ainsi déterminée sera la valeur de x. Comme la longueur OG peut être portée à droite et à gauche du point O, le problème a deux solutions, c'est-à-dire qu'il y a deux directions différentes suivant lesquelles la surface peut être coupée par un plan de manière que la courbe d'intersection soit une circonférence.

Nous voyons donc que toute surface conique qui a pour directrice une courbe du second ordre est identique avec le cône à base circulaire.

§ 10. Ce fut dans l'école Platonicienne que la théorie des sections coniques prit naissance; les premiers géomètres qui s'occupèrent de ces courbes, les obtinrent en coupant le cône droit à base circulaire par un plan perpendiculaire à l'une des génératrices, il en résultait que pour former les trois courbes, ils étaient obligés de faire varier l'angle d'ouverture du cône, de là vint que ces courbes reçurent d'abord les noms de section du cône acutangle, section du cône rectangle et section du cône obtusangle.

Apollonius de Perge, géomètre de l'école d'Alexandrie, à qui son beau traité des sections coniques mérita le titre de grand géomètre, coupa le cône droit de toutes les manières par un plan, et considéra le premier les sections du cône oblique ; mais il se borna au cas où le plan coupant est perpendiculaire à la droite menée du sommet au centre de la base, perpendiculairement au plan de cette base.

Après Apollonius, les géomètres de l'antiquité n'ajoutèrent rien d'important à la théorie des coniques; ce ne fut que dans le dix-septième siècle que Desargues et Pascal présentèrent cette théorie d'une manière nouvelle et beaucoup plus générale. Desargues le premier fit voir que l'on obtenait toujours les mêmes courbes en coupant le cône oblique de toutes les manières possibles par un plan; mais il restait à savoir si tout cône ayant pour directrice une section conique quelconque pouvait toujours être coupé par un plan suivant une circonférence. Desargues proposa ce problème, Descartes le résolut par les nouvelles méthodes de la géométrie analytique, mais seulement pour le cas où la directrice est une parabole. Depuis, d'autres géomètres, le marquis de l'Hôpital, Herman, le père Jacquier, donnèrent des solutions pour le cas où la directrice est une ellipse ou une hyperbole, mais toujours par l'analyse. (*Voy.* Tome 1er des *Nouvelles Annales*, page 229).

Il paraît que Desargues lui-même avait donné une solution purement géométrique qui ne nous est pas parvenue (Voy. *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie;* par M. Chasles, pages 81 et 546). Au rapport du père Mersenne, il ramenait le problème à la recherche de l'axe principal du cône; c'est-à-dire, de celui qui jouit de cette propriété que tout plan qui lui est perpendiculaire, coupe la surface suivant une ellipse qui a son centre sur cet axe même. Il construisait cet axe au moyen de deux lignes dont il déterminait autant de points qu'il voulait. Cette solution de Desargues était très-probablement la même que celle que nous avons donnée plus haut.

M. Chasles (*Voy.* l'ouvrage déjà cité, p. 82) indique plusieurs solutions de ce problème : ces solutions consistent à construire un second cône ayant mêmes axes principaux que le cône proposé ; en coupant les deux surfaces par un même plan, on a deux courbes du second ordre, les axes principaux rencontrent le plan coupant en trois points qui doivent avoir les mêmes polaires par rapport aux deux courbes. Lorsque les deux courbes se coupent en quatre points, rien n'est plus facile que de déterminer les trois points cherchés; en effet en prenant les quatre points d'intersection des courbes, pour les sommets d'un quadrilatère inscrit, les points de rencontre des côtés opposés et le point de croisement des deux diagonales, donnent trois points qui ont mêmes polaires par rapport aux deux courbes; mais lorsque les points d'intersection des deux courbes sont imaginaires, ce qui peut fort bien arriver, le problème de déterminer les trois points par rapport auxquels les deux courbes ont les mêmes polaires est aussi difficile que le problème proposé.

SOLUTION D'UN PROBLÈME DE STATIQUE.

Une droite AD (fig. 79), *uniformément pesante et d'une longueur déterminée, repose par une de ses extrémités* A, *sur la surface intérieure d'un segment sphérique donné, et dont* *la flèche est supposée verticale. Un second point de la droite* AD *doit être placé en un point déterminé* B, *de la circonférence de base du segment : on propose de trouver la position d'équilibre de la droite.*

1. Supposons l'équilibre établi, il faudra, que le poids P, de la droite AD puisse se décomposer en deux forces : l'une normale à la surface de la sphère au point A, et l'autre perpendiculaire à la direction de la droite AD au point B. La première sera dirigée suivant le diamètre GCA de la sphère, et la seconde agira dans la direction de la droite GB. La verticale HP menée par le milieu, H, de AD, passera par le point G et sera située dans le plan AGB, puisque cette droite HP représente la direction du poids de AD. Cela prouve déjà que la droite AD doit être placée dans le plan vertical conduit par le rayon CB. Actuellement menons par le centre C de la sphère, le diamètre vertical FCO qui rencontre, au point E, la droite AD. Nous aurons $AE = EH$, puisque $AC = CG$. Mais $AH = \frac{AD}{2}$; donc $AE = \frac{AD}{4}$. On trouvera donc la position d'équilibre cherchée, en menant par le point donné B de la circonférence ABF, une droite BEA telle que la partie EA de cette droite comprise entre la circonférence et le diamètre vertical OF, ait une longueur donnée δ, égale au quart de AD.

Cela posé, je mène par le point B la droite NBL qui forme avec la tangente horizontale OX, un angle ONB égale à l'angle AOE, et je prolonge cette droite NB, jusqu'à la rencontre du diamètre vertical OF au point L. Les triangles rectangles LON, FAO sont semblables, et de plus la droite OB fait avec les côtés ON, OL, des angles égaux à ceux que la droite AE forme avec les côtés AO, AF ; on a donc

$$OB : AE :: NL : OF, \quad \text{d'où} \quad NL = \frac{OB \times OF}{AE}.$$

La longueur de NL se trouve ainsi déterminée, et parconséquent la question proposée revient à celle-ci: *inscrire dans un angle droit* YOX, *une droite* LN *d'une longueur donnée, et dont la direction passe par un point donné* B.

Cette dernière question a déjà été traitée; (t. I, p. 265), nous indiquerons ici une autre solution dont la discussion est facile.

2. Je prends pour axes les côtés de l'angle droit OX, OY; et pour inconnues les coordonnées x, y du milieu M de la droite NL. Je nommerai r le rayon de la sphère; d la corde OB; $2m$ la droite LN; et enfin α, β, les coordonnées du point B. D'après cette notation, on a

$$2m = \frac{d \times 2r}{\delta} \quad \text{ou} \quad m = \frac{dr}{\delta}. \quad \text{Et} \quad \alpha^2 + \beta^2 = d^2.$$

La distance OM étant égale à la moitié de LN, le point M appartient à une circonférence décrite du point O comme centre avec m pour rayon. On a donc $x^2 + y^2 = m^2 \ldots$ (1). De plus $\frac{\beta}{\mathrm{OL}} + \frac{\alpha}{\mathrm{ON}} = 1$; mais $\mathrm{OL} = 2y$, $\mathrm{ON} = 2x$, par conséquent $$2xy - \beta x - \alpha y = 0, \ldots \qquad (2)$$

L'équation (2) représente une hyperbole équilatère dont le centre est au milieu de OB, et qui a pour asymptotes des parallèles aux axes OX, OY. Une des branches de cette hyperbole passe par le point B, et l'autre branche par le point O. La circonférence $x^2 + y^2 = m^2$, décrite de l'origine des coordonnées comme centre, et avec m pour rayon, coupera toujours en deux points la branche à laquelle l'origine appartient. Si l'on joint ces deux points d'intersection au point B, il en résultera deux droites dont les parties comprises dans les angles YOX′, XOY′, adjacents à l'angle YOX, seront chacune égales à la droite donnée $2m$. Quant aux intersections de la circonférence et de la branche d'hyperbole, qui passe par le point B, il y a trois cas à distinguer. Ces deux courbes peuvent se couper en deux points ; elles peuvent être tangentes ou extérieures l'une à l'autre. Dans le premier on obtiendra, en joignant le point B aux deux points d'intersection, deux droites qui, terminées à la rencontre des axes OX, OY, seront chacune égales à $2m$. Dans le second cas, les deux droites se réduisent à une seule, et cette ligne est un *minimum*, car la distance OM, moitié de LN, est alors la plus courte distance de l'origine à la branche d'hyperbole qui passe par le point B. Enfin, si les deux courbes sont extérieures l'une à l'autre, on ne pourra mener par le point B, et dans l'angle YOX, aucune droite égale à $2m$; cette impossibilité dépend de ce que la longueur donnée, $2m$, est alors moindre que le *minimum* de toutes les droites inscrites dans l'angle YOX, et passant par le point donné.

On conçoit d'après cela que le problème doit conduire à une équation du quatrième degré ayant toujours deux racines réelles, et dont les deux autres racines peuvent être réelles et inégales; réelles et égales, ou imaginaires. Le calcul déterminera les relations qui existent entre les *données*, dans ces différentes conditions.

L'équation $y^2+x^2=m^2$, donne $\dfrac{y}{m-x}=\dfrac{m+x}{y}$. Soit $\dfrac{y}{m-x}=z$, il en résulte $\dfrac{m+x}{y}=z$, et par suite $y=\dfrac{2mz}{z^2+1}$, $x=\dfrac{m(z^2-1)}{z^2+1}$. Reportant ces valeurs de y, x, dans $2yx-6x-\alpha y=0$, on trouve

$$z^4+\frac{2(\alpha-2m)}{6}z^3+\frac{2(\alpha+2m)}{6}z-1=0.$$

Ou bien en posant $\dfrac{2(\alpha-2m)}{6}=\text{A}$, $\dfrac{2(\alpha+2m)}{6}=\text{B}$:

On a $$z^4+\text{A}z^3+\text{B}z-1=0\ldots \qquad (3)$$

L'équation (3) aura ses quatre racines réelles et inégales lorsque $\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + 1 < 0$ (*Voy.* pages 18 et 22, t. II). Deux de ces racines deviennent égales, si $\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + 1 = 0$. Et cette équation a deux racines imaginaires, quand $\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + 1 > 0$.

Mais $\frac{A+B}{4} = \frac{\alpha}{6}$, et $\left(\frac{A-B}{4}\right) = -\frac{2m}{6}$; donc, lorsqu'on aura $\left(\frac{\alpha}{6}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{2m}{6}\right)^{\frac{2}{3}} + 1 < 0$, ou bien $\alpha^{\frac{2}{3}} + 6^{\frac{2}{3}} < (2m)^{\frac{2}{3}}$, la circonférence $x^2 + y^2 = m^2$, coupera l'hyperbole $2xy - 6x - \alpha y = 0$, en quatre points.

Si $\alpha^{\frac{2}{3}} + 6^{\frac{2}{3}} = (2m)^{\frac{2}{3}}$, la circonférence devient tangente à la branche d'hyperbole qui contient le point donné B. Et enfin, elle est extérieure à cette branche, quand

$$\alpha^{\frac{2}{3}} + 6^{\frac{2}{3}} > (2m)^{\frac{2}{3}}.$$

Ainsi le *minimum* de la longueur $2m$ de la droite NBL, inscrite dans l'angle YOX, est déterminé par l'égalité

$$(2m)^{\frac{2}{3}} = \alpha^{\frac{2}{3}} + 6^{\frac{2}{3}}. \text{ D'où } 2m = \sqrt{\left(\alpha^{\frac{2}{3}} + 6^{\frac{2}{3}}\right)^3}.$$

La relation $2m = 2r \times \frac{d}{\delta}$ (page 388), donne $\delta = 2r \times \frac{d}{2m}$. Ainsi le maximum de la longueur δ de la droite EA (*fig.* 70), est $\delta = 2r \times \frac{d}{\sqrt{\left(\alpha^{\frac{2}{3}} + 6^{\frac{2}{3}}\right)^3}} = 2r.\sqrt{\frac{\alpha^2 + 6^2}{\left(\alpha^{\frac{2}{3}} + 6^{\frac{2}{3}}\right)^3}}$. D'où nous conclurons que l'équilibre de la droite AD est impossible, lorsque la longueur r de cette droite est plus grande que

$$8r\sqrt{\frac{\alpha^2 + 6^2}{\left(\alpha^{\frac{2}{3}} + 6^{\frac{2}{3}}\right)^3}}.$$

Pour obtenir le milieu M de la droite NL dans le cas particulier où cette droite doit être un *minimum*, il suffit de mener par le point O qui appartient à une branche de l'hyperbole équilatère, une normale OM à l'autre branche. A cet effet, décrivez une circonférence dont le diamètre soit la moitié OR de OB (fig. 80), cette circonférence coupera la branche d'hyperbole qui passe au point O, en un second point I. Menez la droite IR dont le prolongement rencontre en M la seconde branche de l'hyperbole; puis joignez le point O au point M : la droite OM sera normale, en M à l'hyperbole, comme il est facile de s'en assurer. La droite BM, prolongée jusqu'à la rencontre des axes OX, OY, sera le *minimum* $\sqrt{\left(\alpha^{\frac{2}{3}} + 6^{\frac{2}{3}}\right)^{3}}$. Et si l'on mène par le point B la droite BAE (fig. 79), de manière que l'angle AEO=OBN, le quadruple de EA sera la plus grande valeur de la droite AD pour que l'équilibre proposé soit possible.

Au reste, dans ce cas particulier les racines de l'équation $z^4 + Az^3 + Bz - 1 = 0$, s'obtiennent au moyen d'un calcul assez simple, parce que la relation $\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{2}{3}} + 1 = 0$ ayant lieu, deux de ces racines sont égales entre elles. La valeur de ces racines égales est

$$\left(\frac{A+B}{4}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{A-B}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ (*)}.$$

On en déduit les expressions des deux autres racines en fonction des coefficients de l'équation.

3. Lorsque le point B est sur la bissectrice de l'angle YOX, on a $\alpha = 6$. L'équation $2xy - 6x - \alpha y = 0$, devient $2xy = 6(x+y)$. Ajoutant membre à membre les équations $y^2 + x^2 = m^2$, $2xy = 6(x+y)$, on obtient

(*) On peut aussi exprimer ces racines égales, en fonction rationnelle des coefficients de l'équation.

$$(y+x)^2 = m^2 + 6(x+y)\ ;\ \text{ou}\ y+x = \frac{6}{2} \pm \sqrt{\frac{6^2}{4} + m^2} \ldots (4).$$

On trouvera donc toutes les positions que le point M peut avoir, en construisant les points d'intersections de la circonférence $y^2 + x^2 = m^2$, et des deux droites parallèles que l'équation (4) représente. G.

NOTE

SUR LE QUADRILATÈRE PLAN

Et la détermination de son centre de gravité.

PAR M. COMMIER,
Ancien élève de l'École polytechnique, ingénieur en chef du département de Lot-et-Garonne.

---

1. Si l'on joint les milieux des côtés adjacents d'un quadrilatère quelconque, on formera un parallélogramme dont les côtés seront parallèles aux diagonales du quadrilatère.

2. Chaque côté de ce parallélogramme est la moitié de la diagonale du quadrilatère à laquelle il est parallèle, et divise en deux parties égales le segment correspondant de l'autre diagonale.

3. Ce parallélogramme, dont la surface est moitié de celle du quadrilatère, est le plus grand qu'on puisse lui inscrire : à son tour, le quadrilatère est le plus petit qu'on puisse circonscrire au parallélogramme.

4. Si l'on joint les points où les côtés du parallélogramme coupent les diagonales du quadrilatère, on formera un nouveau quadrilatère semblable au premier : ses côtés seront les moitiés des côtés homologues du premier, et sa surface moitié de celle du parallélogramme, sera le quart de celle du quadrilatère primitif.

5. En faisant, pour ce nouveau quadrilatère, ce qu'on a fait pour le premier, on obtiendra un nouveau parallélogramme, moitié du deuxième quadrilatère; puis un troisième quadrilatère, moitié du second parallélogramme. On aura, par ce moyen, une suite de parallélogrammes et de quadrilatères, semblables aux premiers, leurs surfaces seront successivement $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, etc., de la surface du quadrilatère primitif; leurs côtés seront successivement $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, etc. des diagonales ou des côtés correspondants de ce quadrilatère (*).

6. Si le quadrilatère est un carré, toutes les autres figures deviennent aussi des carrés : le côté du premier étant 1, les côtés des autres auront successivement pour valeur : $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}\sqrt{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}\sqrt{2}$, $\frac{1}{8}$, etc....; tandis que les surfaces correspondantes sont : 1 pour le carré primitif, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$, etc., pour les suivants.

7. Étant donné un quadrilatère, il est facile d'y inscrire le parallélogramme maximum ; de même, étant donné un parallélogramme, il est aisé de lui circonscrire le quadrilatère minimum : seulement le problème est indéterminé, en ce sens qu'il y a réellement une infinité de quadrilatères qui peuvent satisfaire à la question, mais ils sont tous équivalents, ayant tous une surface double de celle du parallélogramme donné.

(*) Le point d'intersection des diagonales, centre d'homologie de tous les quadrilatères, est aussi leur point limite, ainsi que celui des parallélogrammes. Tm.

8. Si du quadrilatère on passe au prisme ou à la pyramide dont il est la base, l'on conçoit qu'on déduira, de ce qui précède, des théorèmes analogues pour le prisme et la pyramide à base de quadrilatère.

9. Si dans un quadrilatère quelconque, on mène une diagonale, et qu'on joigne les centres de gravité des deux triangles qui composent le quadrilatère, le centre de gravité du quadrilatère sera sur cette ligne : si l'on mène la deuxième diagonale, le centre de gravité du quadrilatère devra également se trouver sur la ligne qui joint les centres de gravité des nouveaux triangles qui composent le quadrilatère : le centre de gravite du quadrilatère sera donc à l'intersection des deux lignes qui joignent les centres de gravité des triangles qui, deux à deux, composent le quadrilatère.

Il suffit donc de diviser en deux parties égales les côtés d'un quadrilatère, pour déterminer son centre de gravité.

10. Si l'on joint les centres de gravité des quatre triangles qui, deux à deux, composent le quadrilatère, on formera un nouveau quadrilatére, semblable au premier, placé dans une position renversée, et dont la surface sera $\frac{1}{9}$ de celle du quadrilatère primitif.

11. Les diagonales de ce nouveau quadrilatère, qui se coupent au centre de gravité du premier, sont parallèles aux diagonales de celui-ci : elles en sont le tiers, et les segments sont également le tiers des segments correspondants des diagonales primitives.

12. Ces dernières propriétés fournissent deux nouveaux moyens de trouver le centrè de gravité d'un quadrilatère.

1° Menez les diagonales : déterminez le centre de gravité de deux triangles ayant chacun une de ces diagonales pour côté : par chacun de ces points, menez une parallèle à l'autre diagonale : leur point d'intersection sera le centre de gravité cherché.

2° Menez une diagonale : cherchez le centre de gravité d'un des triangles : par ce point, menez une parallèle à la seconde diagonale, et sur cette parallèle, à partir du centre de gravité du triangle, portez une distance égale au tiers du segment opposé de la seconde diagonale ; l'extrémité de cette ligne sera le centre de gravité du quadrilatère.

13. Considérons maintenant les quatre triangles formés par les deux diagonales d'un quadrilatère quelconque et qui ont, pour sommet commun, le point d'intersection des deux diagonales.

Si l'on réunit les centres de gravité de ces triangles, l'on formera un parallélogramme dont les côtés passent par les centres de gravité des quatre grands triangles qui, deux à deux, composent le quadrilatère, de sorte que les centres de gravité des huit triangles que l'on forme en menant les diagonales d'un quadrilatère quelconque, se trouvent aux angles et sur les côtés d'un parallélogramme dont les côtés, parallèles aux diagonales du quadrilatère, sont le tiers de ces mêmes diagonales et dont la surface, double du petit quadrilatère renversé qui lui est inscrit, est les $\frac{2}{9}$ de la surface du quadrilatère primitif.

14. Au moyen du petit quadrilatère, ou plutôt des centres de gravité des huit triangles que forment ses diagonales, on composera un nouveau parallélogramme et un nouveau quadrilatère inscrit : la surface de celui-ci sera $\frac{1}{9}$ du premier et par conséquent $\frac{1}{81}$ du quadrilatère primitif, tandis que la surface du nouveau parallélogramme en sera les $\frac{2}{81}$: l'on

pourra former ainsi une suite de parallélogrammes et de quadrilatères inscrits, semblables au quadrilatère primitif, qui seront alternativement renversés et redressés, dont les côtés et les diagonales seront successivement $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, etc. des côtés et des diagonales homologues du quadrilatère primitif, et dont les surfaces sont successivement $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{729}$, etc. de la surface primitive, celles des parallélogrammes successifs étant doubles des précédentes.

15. Les côtés du parallélogramme formé par les centres de gravité des quatre triangles qui composent le quadrilatère primitif coupent les segments des diagonales de ce quadrilatère au tiers de leur longueur; par conséquent, la portion de chaque diagonale comprise entre leur point d'intersection et la diagonale du petit quadrilatère renversé, diagonale qui est parallèle à celle du quadrilatère primitif et qui passe par son centre de gravité, cette portion de diagonale, disons-nous, est le tiers de la différence des segments de cette diagonale.

16. Cette propriété fournit un moyen nouveau de déterminer le centre de gravité d'un quadrilatère quelconque.

Menez les diagonales AC et BD (*fig.* 81) : portez sur chacune d'elles, à partir de leur point d'intersection E et sur le plus grand segment ED, EA, une longueur EF, EG égale au tiers de la différence entre les deux segments correspondants DE et EB, EA et EC : par chacun des points F et G ainsi déterminés, menez une parallèle FH, GI à l'autre diagonale AC, BD : le point O d'intersection de ces deux lignes sera le centre de gravité cherché.

17. M. Poncelet, qui a fait faire tant de progrès à la mécanique physique et expérimentale, a indiqué, dans le cours

qu'il professait à la Faculté des sciences (Voyez *l'Écho du Monde savant*, 5e *année*, *n°* 360, 15 *août* 1838) une autre solution que nous croyons devoir rappeler ici.

Menez les diagonales AC, BD (*fig.* 82) : déterminez le milieu F de l'une d'elles ; prenez sur le plus grand segment DE de l'autre diagonale BD et à partir du sommet adjacent D, une longueur DG égale au plus petit segment BE ; joignez le point G, ainsi déterminé, avec le milieu F de la première diagonale AC : divisez cette ligne FG en trois parties égales : le point de division O, le plus voisin de la première diagonale AC, sera le centre de gravité cherché.

18. La ligne qui joint le point d'intersection des diagonales d'un quadrilatère et le centre de gravité de ce quadrilatère, jouit d'une propriété assez remarquable : c'est sur cette ligne que se trouvent les centres de gravité des quadrilatères semblables au quadrilatère primitif et dont les surfaces sont successivement $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{64}$, etc., $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{729}$, etc. de la surface de ce quadrilatère : c'est aussi sur cette ligne que se coupent les diagonales des deux séries de parallélogrammes dont les surfaces sont $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{32}$, etc., $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{81}$, $\frac{2}{729}$, etc. de la surface du quadrilatère primitif.

C'est donc à juste titre que nous appelons cette ligne : la ligne des centres.

19. Remarquons 1° que les diagonales du premier parallélogramme de la première série, c'est-à-dire, les lignes qui joignent les milieux des côtés opposés du quadrilatère primitif, se coupent, sur la ligne des centres, au quart de cette ligne le plus voisin du centre de gravité du quadrilatère ; 2° que les diagonales du premier parallélogramme de la seconde série, c'est-à-dire, les lignes qui joignent les centres de gravité des triangles, opposés par le sommet, formés par

les diagonales du quadrilatère primitif, se coupent au milieu de la ligne des centres.

20. Ces propriétés de la ligne des centres conduisent, par leur simple énoncé, à deux nouveaux moyens de déterminer le centre de gravité d'un quadrilatère, mais qui ne valent pas ceux qui sont indiqués aux §§ 16 et 17 de la présente note.

DÉTERMINATION DES ASYMPTOTES

Dans les courbes algébriques d'un degré quelconque.

PAR M. VANNSON,

Professeur au collége royal de Versailles.

L'équation d'une asymptote étant représentée par $y = cx + d$, on a $c = \lim\left(\frac{y}{x}\right)$, $d = \lim(y - cx)$.

Soit $f(xy)$ l'ensemble des termes du m^e degré de l'équation proposée ; $\mathrm{F}(xy)$, l'ensemble des termes du degré $m-1$; $\varphi(xy)$, celui des termes du degré $m-2$, etc. : l'équation proposée sera donc :

$$(\mathrm{A})\ldots\ldots f(xy) + \mathrm{F}(xy) + \varphi(xy) + \text{etc.} = 0.$$

J'appelle y' le rapport variable de y à x ; j'ai ainsi $y = y'x$, et l'équation (A) peut s'écrire comme il suit :

$$(\mathrm{B})\ldots\ldots x^m f(1,y') + x^{m-1}\mathrm{F}(1,y') + x^{m-2}\varphi(1,y') + \text{etc.} = 0;$$

ou, pour toute valeur de x autre que zéro,

$$f(1,y') + \frac{1}{x}\mathrm{F}(1,y') + \frac{1}{x^2}\varphi(1,y') + \text{etc.} = 0.$$

Si x tend vers l'infini, le premier membre de cette équation tendra vers la limite $f(1,y')$. Posons donc $f(1,y') = 0$, et supposons qu'on ait tiré de cette équation une valeur finie de y', soit $y' = c$, alors $f(1,y') = (y' - c).Q(y')$.

L'équation (B) peut donc s'écrire de la manière suivante :

$$x^m(y'-c)\,Q(y') + x^{m-1}F(1,y') + x^{m-2}\varphi(1,y') + \ldots\ldots = 0;$$

ou, en divisant par le facteur x^{m-1} qui n'est pas supposé nul :

$$(y'x - cx)\,Q(y') + F(1,y') + \frac{1}{x}\varphi(1,y') + \ldots\ldots = 0.$$

Mais $y'x = y$, on a donc

$$y - cx = -\frac{F(1,y')}{Q(y')} - \frac{1}{x}\frac{\varphi(1,y')}{Q(y')} - \ldots\ldots;$$

si x tend vers l'infini, y' tend vers sa limite c; on a donc

$$\lim(y - cx) \text{ ou } d = -\frac{F(1,c)}{Q(c)}.$$

Mais $Q(c)$ est, comme on le voit dans les éléments d'algèbre, la dérivée de $f(1,y')$ par rapport à y' ; dérivée dans laquelle y' est remplacé par c ; ou bien c'est la dérivée de $f(yx)$ prise par rapport à y, dans laquelle on aurait remplacé x par 1 et y par c. On a donc enfin $d = -\dfrac{F(1,c)}{f'(1,c)}$.

De là résulte, pour la détermination des asymptotes, cette règle générale : *Prenez l'ensemble des termes du plus haut degré de votre équation; remplacez* x *par l'unité, résolvez l'équation qui en résulte par rapport à* y. *Ayant trouvé une racine*, c, *finie et réelle pour* y, *divisez l'ensemble des termes du degré* (m — 1) *par la dérivée des termes précédents, prise par rapport à* y ; *changez le signe du quotient, puis remplacez dans ce quotient* y *par* c *et* x *par* 1 ; *si le résultat est fini, vous aurez le terme indépendant de* x *et* y *dans l'équation d'une asymptote, ayant* c *pour coefficient de* x.

Ainsi, l'équation d'une asymptote quelconque non parallèle aux y sera donnée par la formule : $y = cx - \dfrac{F(1,c)}{f'(1,c)}$,

c étant une quelconque des racines réelles et finies de l'équation $f(1,y')=0$.

Appliquons cette règle à l'équation

$$y^3+xy^2-2x^2y+y^2-3xy+y+x=0.$$

Ici $f(1,y)=0$ sera $y^3+y^2-2y=0$, ayant pour racines 0, 1 et -2. D'où $d=0$, $d'=\frac{2}{3}$; $d''=-\frac{5}{3}$. Les asymptotes sont donc 1° l'axe des x, 2° la droite ayant pour équation $y=x+\frac{2}{3}$, et enfin $y=-2x-\frac{5}{3}$.

Discussion. Si les termes du degré $m-1$ manquent dans l'équation, d est nul, et l'asymptote pour laquelle on a trouvé c, passe par l'origine. Si $f'(1,c)=0$, d est infini, et il n'y a pas d'asymptote ayant pour coefficient de x la valeur trouvée pour c.

Si on a en même temps $f'(1,c)=0$ et $F(1,c)=0$, d se présente sous la forme $\frac{0}{0}$.

Dans ce cas, $f(1,y')$ est divisible par $(y'-c)^2$; j'appelle $Q(y')$ le quotient de ces deux expressions; d'ailleurs $F(1,y')$ est divisible par $y'-c$, j'appelle $Q'(y')$ le quotient; l'équation B pourra donc s'écrire ainsi :

$$x^{m-2}(y-cx)^2Q(y')+x^{m-2}(y-cx)Q'(y')+x^{m-2}\varphi(1,c)+\text{etc.}=0.$$

En divisant par x^{m-2}..... et faisant ensuite x infini, d'où $y'=c$ et $y-cx=d$..... nous aurons

$$d^2.\,Q(c)+d.Q'(c)+\varphi(1,c)=0.$$

Mais $Q'(c)=f'(1,c)$, c'est-à-dire la dérivée du 2^e groupe de termes, prise par rapport à y, dans laquelle y est remplacé par c, et x par 1; et $Q(c)$ n'est autre chose que la moitié de la dérivée du 2^e ordre pour le premier groupe, dans laquelle on fait les mêmes substitutions, on a donc enfin

$$\frac{1}{2}d^2f''(1,c)+dF'(1,c)+\varphi(1,c)=0;$$

équation qui donnera pour d soit deux valeurs réelles et inégales, ou deux valeurs égales, ou enfin des expressions imaginaires. Dans le 1er cas, on aura deux asymptotes parallèles à la droite $y = cx$, etc.

Si on a en même temps $f''(1,c)=0$, $f'(1,c)=0$, $\varphi(1,c)=0$, d dépendra de l'équation du 3e degré suivante :

$$\frac{1}{2\cdot 3} d^3 f'''(1,c) + \frac{1}{2} d^2 F''(1,c) + d\varphi'(1,c) + \psi(1,c) = 0.$$

Cette équation aura au moins une racine réelle ; l'examen des divers cas qu'elle peut offrir ne présente aucune difficulté.

Dans ce qui précède, c est supposé fini ; on ne trouve donc pas les asymptotes qui seraient parallèles aux y et ayant pour équation $x = \delta$. Pour les obtenir, on posera $x = yx'$, et raisonnant comme ci-dessus, on aura l'équation $f(x',1)=0$. Si cette équation n'admet pas de racine nulle, il sera inutile d'aller plus loin. Si elle admet la racine 0, on trouvera δ par la formule
$$\delta = -\frac{F(0,1)}{f'(0,1)},$$
0 remplaçant x, et 1 remplaçant y, et la dérivée qui se trouve au dénominateur étant prise par rapport à x. Si l'on trouve $\delta = \frac{0}{0}$, on aura recours à l'équation

$$\frac{1}{2} \delta^2 f''(0,1) + \delta F'(0,1) + \varphi(0,1) = 0, \text{ etc.}$$

Remarque. Pour qu'une des lignes trouvées par la méthode indiquée soit réellement asymptote de la courbe, il faut encore que l'expression de l'ordonnée y ne devienne pas imaginaire quand x tend vers l'infini ; circonstance qui n'empêche pas toujours les coefficients c et d de se présenter sous forme réelle.

Exemple. — Soit la courbe représentée par l'équation

$$x^4y^2 - 6yx^5 + 9x^6 - 4x^4y + 12x^5 + 4x^4 + x^2 - 1 = 0.$$

Ici l'équation $f(1,y')=0$ donne $y'^2-6y'+9=0$; d'où $y'=3$, ou $c=3$. Si on applique la formule $d=-\frac{F(1,c)}{f'(1,c)}$, on trouve $\frac{0}{0}$. Appliquant alors la formule qui donne en général deux valeurs de d, savoir :

$$\frac{1}{2}d^2f''(1,c)+dF'(1,c)+\varphi(1,c)=0,$$

on trouve $\quad d^2-4d+4=0 \quad$ ou $\quad d=2.$

On pourrait donc croire que la droite ayant pour équation $y=3x+2$ est une asymptote ; mais si on tire la valeur de y de l'équation de la courbe, on trouve

$$y=3x+2\pm\frac{1}{x^2}\sqrt{1-x^2},$$

expression qui est imaginaire pour $x>1$; donc la droite $y=3x+2$ n'est pas asymptote de la courbe.

Cherchons si la même courbe n'aurait pas une asymptote parallèle aux y, en appliquant la méthode générale. Pour cela, prenons le 1$^{\text{er}}$ groupe de termes, et remplaçons y par l'unité. Nous aurons $9x^6-6x^5+x^4=0$. $x=0$ vérifie cette équation.

La formule $\delta=-\frac{F(0,1)}{f'(0,1)}$ donne $\frac{0}{0}$, il faut recourir à l'équation $\frac{1}{2}\delta^2f''(0,1)+\delta F'(0,1)+\varphi(0,1)=0$, dans laquelle tout devient nul pour $x=0$; il en est de même pour l'équation $\frac{1}{6}\delta^3f'''(0,1)+$ etc. et l'équation suivante, savoir :

$$\frac{1}{24}\delta^4f_4(0,1)+\frac{1}{6}\delta^3F_3(0,1)+\frac{1}{2}\delta^2\varphi''(0,1)+\delta\psi'(0,1)+\chi(0,1)=0$$

donne avant de faire $x=0$; $\delta^4-46x\delta^3+24x^2\delta^2+x^2=0$; d'où $\delta=0$ quand x est remplacé par 0 ; ainsi l'axe des y est asymptote de la courbe. Ce qui se voit beaucoup plus simplement par l'inspection de la valeur tirée pour y ; mais il était bon de faire application de nos formules générales à ce cas particulier.

Nous terminerons par une remarque à laquelle donne lieu l'application de la méthode générale aux courbes du 2ᵉ degré. Dans ce cas particulier, $f(1,y)=0$ donne $Ay^2+By+C=0$, d'où $y=\dfrac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$, résultat réel, si B^2-4AC est positif ou nul. Examinons la seconde hypothèse.

Pour avoir d nous employons la formule

$$d=-\frac{F(1,c)}{f'(1,c)}=-\frac{Dc+E}{2Ac+B}=-\frac{BD-2AE}{4AC-B^2},$$

quantité infinie en général ; ce qui prouve que la parabole n'a pas d'asymptot e. Mais si on a $BD-2AE=0$, alors d se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; on doit donc recourir à l'équation

$$\frac{1}{2}d^2f''(1,c)+dF'(1,c)+\varphi(1,c)=0,\text{ qui donne}$$

$$Ad^2+dD+F=0,\quad\text{d'où}\quad d=\pm\frac{\sqrt{D^2-4AF}-D}{2A},$$

expression réelle, si D^2-4AF est positif ou nul. Si donc on opérait sur une courbe dont la discussion n'eût pas déjà été faite, on pourrait croire qu'elle a deux asymptotes ayant pour équations :

$$(C)\ldots\ldots\ y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{D^2-4AF}\ ;$$

mais, dans le cas actuel, l'équation donnée représente deux lignes droites. Ce sont ces mêmes droites qu'on trouve et qu'on doit trouver en cherchant les asymptotes.

En général, quand l'équation donnée sera divisible par un facteur de la forme $ay+bx+c$; la droite $ay+bx+c=0$ se trouvera en cherchant les asymptotes. Donc, quand on appliquera la méthode des asymptotes à une courbe d'un degré supérieur, sans savoir si elle admet ou non des diviseurs linéaires ; avant d'affirmer qu'une des droites trouvées est réellement une asymptote, il faudra essayer de diviser le premier membre de l'équation donnée par le premier membre de l'équation de la droite ramenée à la forme $ay + bx + c = 0$; si cette division ne peut se faire, et si, d'ailleurs, y ne devient pas imaginaire par $x = \infty$ ou réciproquement, on sera certain d'avoir obtenu une asymptote. Nous trouvons un exemple de cette circonstance dans l'équation

$$y^4 - xy^3 + x^3y - x^4 - y^3 - x^3 - y + x + 1 = 0.$$

L'équation $f(1, y) = 0$, donne $y^4 - y^3 + y - 1 = 0$. Cette équation a pour racines réelles ± 1, prenons $+1$, le d correspondant sera donné par l'équation $d = -\dfrac{F(1, c)}{f'(1, c)} = 1$, ce qui donne la droite $y = x + 1$; pour l'autre droite, on trouve $y = -x$; si nous divisons le premier membre de notre équation par le facteur correspondant à la dernière droite, nous n'obtenons par un quotient exact ; en sorte que la dernière droite est bien une asymptote ; mais la division du même polynôme par $y - x - 1$ donne un quotient exact $y^3 + x^3 - 1 = 0$; ce qui nous avertit que notre équation représente une ligne droite et une courbe ayant pour équation $x^3 + y^3 - 1 = 0$, laquelle a pour asymptote la droite dont l'équation est $y + x = 0$. Cette méthode peut être avantageuse dans certains cas pour reconnaître si une équation d'un degré quelconque admet ou non des diviseurs linéaires.

—

Il y a dans cet article une observation que nous recommanderons surtout à l'attention des élèves ; nous voulons parler de la *Remarque* (page 401). Elle est sans doute très-utile si, comme nous avons eu l'occasion de le reconnaître, quelques personnes ont conclu de la théorie des asymptotes, exposée dans les Traités élémentaires, que les droites obtenues par les *règles générales* prescrites dans ces ouvrages, sont toujours asymptotes à la courbe considérée. L'inexactitude d'une semblable conclusion a été mise en évidence, par l'exemple que M. *Vannson* a donné (page 401). Et d'ailleurs, une analyse exacte des raisonnements que l'on fait pour établir les règles générales dont il s'agit, montre qu'elles peuvent donner des valeurs *réelles* et *finies* aux coefficients qui déterminent les droites cherchées, non-seulement lorsque l'équation sur laquelle on opère, représente une courbe limitée, mais encore lorsque cette équation ne représente aucune ligne réelle. Il semble donc qu'il serait convenable d'exposer d'abord les conditions en vertu desquelles une équation algébrique d'un degré quelconque, peut représenter une courbe à branches infinies. Et c'est effectivement, par la recherche de ces conditions qu'*Euler* commence la théorie des asymptotes dans l'*Introduction à l'analyse infinitésimale.* (Voyez le chapitre intitulé : *de la recherche des branches infinies.*) Il démontre d'abord que la courbe est nécessairement limitée, lorsque les termes du plus haut degré de son équation forment un polynôme qui n'admet aucun facteur réel du premier degré. Ainsi, l'équation proposée ne peut représenter une courbe à branches infinies, lorsque prenant pour inconnue le rapport $\frac{y}{x}$ de l'ordonnée à l'abscisse, l'équation formée en égalant à zéro les termes du plus haut degré n'a aucune racine réelle. Si cette dernière équation admet des racines réelles et inégales, la ligne s'étend à l'infini. Enfin, le cas particulier des racines réelles et égales a aussi été discuté par *Euler*. C'est précisément à ce cas particulier que se rapporte l'exemple donné par M. *Vannson*, puisque le premier membre de l'équation $y'^2-6y'+9=0$ (page 402), est un carré.

Au reste, nous reviendrons bientôt sur ce sujet. G.

SURFACE, VOLUME ET POIDS DU GLOBE TERRESTRE,

Et excentricité et rayon moyen.

PAR M. BARRÉ,
Officier supérieur d'Artillerie, en retraite.

1° *Surface.*

$a =$ demi-grand diamètre $= 637,^{myr.}7109$ log 2,8046238;

$b =$ demi-petit diamètre $= 635,\ \ 6199$ log 2,8031975;

$\log \frac{b}{a} = 9,99857.\ 37 = \log$ de $0,99672.11 = \log \cos \alpha$.

$\cos \alpha = 0,9967211 = \cos 4^\circ.\ 38'.\ 27'',65$ ou $5,^{gr}1566$.
Cet arc développé est 0,08100783. Le $\sin \alpha$ développé
$= 0,08091259$. $\frac{\alpha}{\sin \alpha} = \frac{81007.83}{80912\ 59} = 1,00117708$.

La superficie de l'ellipsoïde allongé étant donnée par la formule $2S\left(\cos\alpha + \frac{\alpha}{\sin\alpha}\right)$, on aurait ici

$$\cos\alpha + \frac{\alpha}{\sin\alpha} = 0,99672.11 + 1,00117.708 = 1,99789.82,$$

nombre devant multiplier 2S.

Celle de l'ellipsoïde aplati est donnée par la formule

$$2S\left[\text{séc}\,\alpha + \cot\alpha \log \text{tang}\left(45 + \frac{\alpha}{2}\right)\right].$$

Ici, nous aurons $\text{séc}\,\alpha = 1,00329.03$ $\cot\alpha = 12,31850.6$.

$$\text{g tang}\left(45 + \frac{\alpha}{2}\right) = \log \text{tang}\ 47^\circ.19'.13'',8 = 0,03521.67$$

$$\log \text{nep} = 0,08108945,$$

$\cot \times \log \text{nep} = 12,31850.6 \times 0,0810945 = 0,99896.31$;

finalement 1.0032903 + 0,9989631 = 2,00225.34, nombre devant multiplier 2S. Or, S = πab = 1273419 myr. carrés.

L'aire de la surface de l'ellipsoïde allongé serait de 5088322 myr. carrés.

Et celle du globe terrestre (ellipsoïde aplati) est de 5099415 myr. carrés.

2° *Volume.*

On a $v = 1,333.....\ \pi a^2 b$ où v désigne le volume.

$$\left.\begin{array}{ll} \lg a^2 & = 5{,}60924.76 \\ \lg b & = 2{,}80319.75 \\ \lg \pi & = 0{,}49714.99 \\ \lg 133 & = 0{,}12493.87 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 9{,}03453.37 = \lg \text{ de } v = \\ = \lg \text{ de } 1.082.764.000 \text{ myr. cubes.} \end{array}$$

3° *Poids.*

La densité moyenne de la terre = 5k48. Ainsi le mètre cube pèse 5480k.

Le myriamètre cube pèse donc (5480 plus 12 zéros) kilog. et le globe terrestre 593354672 plus seize zéros, formant un nombre de kilogrammes exprimé par 25 chiffres.

4° *Excentricité.*

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 51{,}59976$ myriamètres ; $\log c = 1{,}7126477$;

$e = \dfrac{c}{a} = 0{,}0809142$; $\log e = \bar{8}{,}9080239$.

Excentricité géographique $= 1 - \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{305}$ environ.

5° *Rayon terrestre*, R.

$R^2 = a^2(1 - e^2 \sin^2 \varphi)$: φ = angle de R avec a ; $\varphi = 45°$;

R = 636,6662 myriamètres.

Rayon de la sphère équivalente, en volume, à l'ellipsoïde terrestre = 636,3162 myriamètres.

NOTE SUR LE CRIBLE D'ÉRATOSTHÈNE.

PAR P.-A.-G. COLOMBIER,
Régent de Mathématiques, à Beziers.

PROBLÈME. Connaissant la suite naturelle des nombres premiers au-dessous d'un nombre donné l, on demande la suite naturelle des nombres premiers au-dessus de l, jusqu'à un nombre donné l'.

Tous les nombres premiers étant nécessairement impairs, il s'ensuit que la suite des nombres premiers qu'on cherche ne pourra se trouver que dans la suite des nombres impairs,

$$a,\ a+2,\ a+4,\ \ldots\ldots\ a+2k. \tag{1}$$

compris entre l et l'.

Voyons ce qu'on fera pour trouver dans (1) tous les multiples d'un nombre premier d. Divisons a par d, et appelons r le reste de la division. Ce reste peut être pair ou impair. 1° Soit $r=2m$. D'après le mode de formation de la suite (1), que nous concevons prolongée au-dessous de a, il est évident que le $m^{\text{ième}}$ terme au-dessous de a, et à partir de $a-2$, est un multiple de d. Réciproquement, à partir du nombre impair immédiatement au-dessus de ce multiple, a est le $m^{\text{ième}}$ terme. Donc si on compte m, sur a; $m+1$, sur $a+2$; et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à d, le nombre sur lequel tombera d sera le premier multiple de d compris entre l et l'; et, en comptant de d en d, on aura tous les multiples de d contenus dans (1). Dans le cas particulier où $r=0$, a est le premier multiple de d. 2° Soit $r=2m+1$. La différence entre ce reste et le diviseur d est toujours un nombre pair $2m'$. Donc, si je compte

1, sur $a+2$; 2, sur $a+4$;..... le nombre sur lequel tombera m' sera le premier multiple de d, compris entre l et l', et en comptant de d en d, on aura tous les multiples de d.

Cela posé, appelons λ la partie entière de la racine carrée de l'. Si λ est $<$ ou $= a$, il ne faudra effacer de la suite (1) que tous les multiples des nombres premiers contenus dans la table, et au-dessous de λ. Tous les nombres de la suite (1) qui n'auront pas été effacés seront premiers, et leur ensemble formera la suite cherchée. Si $\lambda > a$, on commencera par effacer de la suite (1) tous les multiples des nombres premiers donnés par la table ; le premier des nombres de la suite (1) qui n'aura pas été effacé, sera le premier nombre premier de la suite cherchée, puisqu'il n'aura pas de diviseur moindre que lui-même. On effacera de la suite (1) tous ses multiples. Le nombre suivant non effacé est premier, et on en éliminera tous ses multiples. On continuera de la même manière jusqu'à ce qu'on parvienne à un nombre premier plus grand que λ ; dès lors tous les nombres de la suite (1) qui n'auront pas été effacés seront premiers, et leur ensemble formera la suite cherchée.

Scolie 1. Il ne sera pas nécessaire de faire la division dans le cas où $d=3$, $d=5$, $d=7$, $d=11$, $d=a$, $d>a$.

Scolie 2. Lorsque le reste de la division diffère beaucoup du diviseur d, l'opération par laquelle on efface tous les multiples de d peut être considérablement abrégée, en disposant les nombres de la suite (1) par lignes horizontales, de telle sorte que chacune en contienne le même nombre, 10, par exemple, et qu'en outre les nombres de même rang, dans chaque ligne horizontale, soient sur une même verticale. On ajoute encore à cette simplification, en partageant la colonne verticale en tranches de 10 colonnes horizontales chaque. Ce ne sont pas les seules simplifications dont cette opération est susceptible.

Scolie 3. Au lieu de considérer le plus petit nombre a de la suite (1), on aurait pu considérer tout autre nombre de la même suite. Il est aisé de trouver le motif de la préférence qu'on doit donner à a.

Usage. Les tables des nombres premiers les plus étendus que nous connaissions sont celles de Burckhardt. Elles s'étendent jusqu'à 3 036 000. Si on voulait les étendre jusqu'à 5 000 000, on ferait usage du problème précédent, après avoir écrit 982 000 nombres de 7 chiffres. (On abrégerait leur écriture en observant que les nombres qui diffèrent de moins d'une centaine ont leurs cinq chiffres à gauche communs.)

QUESTIONS DE MATHÉMATIQUES.

Proposées au premier concours d'entrée à l'École normale (août 1843, *Voy.* tome I, p. 393).

—

1° Exposer la théorie des foyers et des directrices des courbes du second degré.

2° Démontrer que deux équations algébriques à deux variables indécomposables en facteurs rationnels ne peuvent représenter un même lieu géométrique dans un même système de coordonnées rectilignes, si elles ne sont pas identiques terme pour terme.

3° Deux courbes du second degré étant tangentes l'une à l'autre en deux points, démontrer analytiquement que si d'un point quelconque de la droite qui joint ces deux points on mène les quatre tangentes à ces courbes, les points de contact sont en ligne droite.

Physique.

1° Comment mesurer la *quantité* de chaleur que perd ou gagne un corps en passant d'une *température* à une autre? Quels sont les éléments dont dépend cette quantité?

Exposer la détermination des chaleurs spécifiques connue sous le nom de méthode des mélanges dans le cas des corps solides et liquides.

2° On suppose une sphère de matière réfringente éclairée par des rayons parallèles. Quelle sera la distance du foyer des rayons réfractés voisins de l'axe à la surface de la sphère; on connaît le rayon de la sphère et l'indice de réfraction de la substance dont elle est formée.

Application au cas d'une sphère de verre, l'indice de réfraction du verre étant $\frac{3}{2}$.

ANALYSE D'OUVRAGES.

Arithmétique élémentaire théorique et pratique à l'usage des écoles primaires, des pensions de jeunes personnes, des classes élémentaires des colléges, etc.; par M. J.-F.-A. Dumouchel, Inspecteur adjoint de l'instruction primaire du département de la Seine (*).

Ce traité d'arithmétique est divisé en cinq chapitres, et terminé par une note sur *les caractères de la divisibilité* des nombres. Le premier chapitre contient des notions préliminaires et la *numération*. Le second, l'explication des signes employés dans le calcul, et les opérations fondamentales sur

(*) Un volume in-16, de 179 pages. Chez *Desobry*, *E. Magdeleine et Cie*, libraires-éditeurs, rue des Maçons-Sorbonne, 1, à Paris.

les nombres entiers. Le troisième, le calcul des nombres décimaux, et le système légal des poids et mesures. On trouve dans le quatrième les opérations sur les fractions ordinaires. Enfin, le cinquième traite des règles de trois simples et composées, des questions d'intérêt, d'escompte et de société.

Chacun de ces chapitres se termine par une espèce de programme qui, sous la dénomination de *questionnaire*, renferme les énoncés des différentes questions traitées dans le chapitre même. Les principales règles de l'arithmétique sont suivies d'exemples toujours simples, et souvent choisis dans les usages journaliers. Cet ouvrage, rédigé avec une grande clarté, ne peut manquer d'être utile aux élèves et aux instituteurs.

S'il nous reste quelques observations à soumettre à l'auteur, elles ne porteront qu'indirectement sur ce qui lui appartient en réalité dans son livre. Nous aurions désiré qu'il se fût un peu moins rapproché des formes scientifiques de quelques autres ouvrages, et peut-être alors n'aurait-il pas été conduit à renoncer plusieurs fois aux démonstrations, dans la crainte d'embarrasser ses lecteurs. Par exemple, aurait-il présumé que « le raisonnement *complet* de la division est trop difficile pour les élèves de nos écoles primaires, » si, adoptant les notions les plus simples, les plus naturelles, il n'avait vu dans cette opération qu'une règle de partage en parties égales? Mais on veut comprendre tous les cas dans un seul énoncé, et prévoir ceux où le diviseur deviendrait *fractionnaire* ou bien encore *incommensurable*, peut-être même *imaginaire ;* pour ma part, je n'en vois guère la nécessité, car en définitive, on n'opère que sur des nombres entiers. Le reste est seulement une indication de calculs à effectuer. Il est permis, sans aucun doute, de nommer *quotient* le résultat déterminé par une ou plusieurs opérations différentes de la division des entiers, en ayant soin d'expliquer pourquoi on a conservé le nom de *quotient* au résultat ainsi obtenu. Et cela n'oblige, en rien, à modifier une définition qui représente fidèlement l'objet de l'opération définie. En considérant les opérations de l'arithmétique sous un point de vue précis, le raisonnement se simplifierait en devenant plus exact, et l'explication complète des premières règles, ne resterait pas au-dessus de l'entendement des élèves de nos écoles primaires.

Nous l'avons dit ailleurs, ce n'est pas la rigueur des démonstrations qui nous semble embarrassante pour les commençants. La simplicité du raisonnement est, au contraire, une conséquence de sa plus grande rigueur. Ce qui peut contribuer à rendre difficile l'exposition des vérités les plus simples, c'est d'abord cette tendance à s'écarter des idées naturelles pour rechercher des généralités illusoires. C'est encore la méthode de ceux qui, n'admettant pas les *notions primitives*, veulent tout expliquer, tout définir (*) ; de ceux qui ne peuvent croire qu'un raisonnement soit complet, s'il n'est surchargé d'*axiomes*, de *demandes*, de *lemmes*, et de *scolies*. Cette méthode, empruntée à je ne sais quelle philosophie scolastique, est déjà bien ancienne, et n'a encore rien fait pour le sens commun ; il serait temps de l'abandonner.

Dans la préface de son ouvrage, M. *Dumouchel* s'exprime ainsi : « Je veux que les élèves raisonnent tout ce qu'ils font, je veux que leur esprit travaille toujours ; mais je ne suis pas d'avis de leur imposer une fatigue et un travail inutiles. » Une opinion aussi judicieuse ne peut être contredite ; mais comment a-t-elle conduit l'auteur à donner immédiatement,

---

(*) « Il y en a qui vont jusqu'à cette absurdité d'expliquer un mot par le » mot même. J'en sais qui ont défini la lumière en cette sorte : *la lumière est* » *un mouvement luminaire des corps lumineux*... » *Pascal* (livre des Pensées).

en entrant en matière, les définitions de *quantité*, de *mesure*, d'*unité* et de *nombre?*

Si les élèves des écoles primaires qui liront la première page de cette arithmétique, n'ont pas encore une idée précise du nombre entier, s'ils ne sont pas déjà familiarisés avec les notions de *quotient*, de *rapport*, il semble difficile qu'ils entendent parfaitement que « un nombre est le RÉSULTAT de la comparaison d'une grandeur à son unité ; » et n'est-il pas à craindre que les personnes chargées de leur apprendre, au moyen de cette définition, ce que c'est qu'un nombre, ne leur imposent une fatigue et un travail inutiles?

Euclide a défini le nombre, l'assemblage d'une multitude d'unités ; *Newton*, le rapport abstrait d'une quantité à une autre de même espèce, prise pour unité (*) ; *Wolf*, ce qui a le même rapport avec l'unité qu'une ligne droite avec une autre ligne droite. Voici ce qu'en a dit *Pascal* :

« On trouvera peut-être étrange que la géométrie ne
» puisse définir aucune des choses qu'elle a pour principaux
» objets. Car elle ne peut définir ni le mouvement, ni les
» NOMBRES, ni l'espace ; et cependant ces trois choses sont
» celles qu'elle considère particulièrement et selon la re-
» cherche desquelles elle prend les trois différents noms de
» *Mécanique*, d'*Arithmétique*, et de *Géométrie*, ce dernier
» nom appartenant au genre et à l'espèce. Mais on n'en sera
» pas surpris si l'on remarque que, cette admirable science
» ne s'attachant qu'aux choses les plus simples, cette même
» qualité qui les rend dignes d'être ses objets, les rend in-
» capables d'être définis, de manière que le manque de dé-
» finition est plutôt une perfection qu'un défaut, parce qu'il
» ne vient pas de leur obscurité, mais au contraire de leur
» extrême évidence... »

(*) C'est la définition adoptée d'abord par l'auteur, mais il ajoute à la page 15 de son ouvrage : « on appelle nombre entier la réunion de plusieurs unités. »

Dans le livre des *Pensées, Pascal* revient plusieurs fois sur l'impossibilité de définir les nombres. Et en effet, que signifie la définition qu'on en donne le plus ordinairement, si ce n'est qu'un nombre est un nombre? Je demande à ceux qui l'ont défini : la réunion de PLUSIEURS unités, ce qu'ils entendent précisément par ce mot PLUSIEURS? Et d'ailleurs qu'est-ce que l'unité? le terme de comparaison entre *des quantités* de même espèce. Ainsi, en substituant l'objet défini à la définition, on est amené à dire, en commençant l'arithmétique : *un nombre est la réunion d'un certain nombre de termes de comparaison entre des* QUANTITÉS *de même espèce.* Il est peu surprenant que les élèves éprouvent des difficultés à bien suivre des raisonnements qui commencent de cette manière, et l'on comprend pourquoi ils prennent quelquefois le parti de répéter ce qu'on leur enseigne sans savoir au juste ce qu'ils disent.

Après avoir défini les nombres, quelques auteurs veulent de plus, les distinguer en *abstraits* et *concrets* (*). C'est une distinction capable d'égarer encore le jugement de ceux à qui l'on vient d'apprendre qu'un nombre est le résultat de la comparaison d'une grandeur à son unité. Car, comment le rapport de deux grandeurs de même espèce pourrait-il être *concret?* M. *Dumouchel*, en adoptant la distinction dont il s'agit, s'est au moins abstenu de subdiviser le calcul en deux genres d'opérations correspondants aux deux espèces de nombres. Il n'a rien dit de toutes ces règles générales, que l'on donne ailleurs pour découvrir infailliblement l'espèce

---

(*) « Ils semblent (il s'agit des auteurs qui, du temps de *Condillac*, ont voulu » faire des *Éléments d'arithmétique*), ne pas savoir de quelle espèce sont les » nombres qu'on calcule. Ils en distinguent de deux espèces, les abstraits, les » concrets, et ils disent que les concrets sont ceux qu'on applique à quelque » objet; comme si dans 1 écu, 2 écus, 3 écus, 1, 2 et 3 étaient autre chose » que 1, 2 et 3. Cette distinction est tout à fait inutile; et *concret* sera pour nous » un mot barbare de moins. » *Condillac* (Langue des calculs).

des unités des résultats fournis par les calculs effectués sur les nombres nommés concrets : je suis persuadé que les élèves des écoles primaires sauront bien s'en passer. G.

La fin au prochain numéro.

ANNONCES.

—

Éléments de Géométrie, par E. Lionnet, professeur de Mathématiques au collége royal de Louis-le-Grand, deuxième édition. Un vol. in-8° de 300 pages ; avec les figures dans le texte. Chez Dezobry, E. Magdeleine et C^{e}, rue des Maçons-Sorbonne, 1, Paris.

Éléments de Géométrie, par Eugène Catalan, ancien élève de l'École polytechnique, répétiteur de géométrie descriptive à cette école ; membre de la société Philomatique de Paris, correspondant de la société d'Agriculture, sciences et arts du département de la Marne. Un volume in-8° de 310 pages. Chez Bachelier, imprimeur-libraire, quai des Augustins, n° 55, Paris.

PROBLÈMES ET THÉORÈMES.

—

63. Étant donnés les milieux des côtés d'un polygone convexe d'un nombre impair de côtés, déterminer ses sommets en faisant seulement usage du compas. (*Lionnet.*)

64. Si deux triangles ABC, A'B'C', ont leurs côtés parallèles, et sont l'un inscrit et l'autre circonscrit à un même triangle DEF ; la surface de ce dernier est moyenne proportionnelle entre les surfaces des deux autres.

QUESTIONS

Sur les maxima et les minima,

RESOLUES PAR M. OSSIAN BONNET,
ancien élève de l'École polytechnique.

—

I

On sait que x et y *représentant deux variables dont la somme est constante, la fonction* $x^m y^n$ *est maximum, quand*

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}.$$

Ce théorème que l'on démontre d'une manière très-simple, sans le secours du calcul différentiel, conduit à la solution d'un grand nombre de questions : on peut, par exemple, ainsi que je le ferai voir dans un autre article, en déduire les conditions de réalité des racines des équations trinômes.

Il existe un théorème analogue, dont on peut faire aussi un grand nombre d'applications, et qui consiste en ce que x et y *étant deux variables dont la différence est constante, la fonction* $\frac{x^m}{y^n}$ *est maximum ou minimum quand*

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}.$$

Je commencerai par démontrer ce théorème qui, je crois, n'est pas assez connu des élèves.

Supposons d'abord $x>y$; posons

$$x-y=a,$$

a étant par conséquent positif. L'expression proposée deviendra

$$\frac{(a+y)^m}{y^n};$$

et il pourra se présenter deux cas (*) :

1° $m > n$. Dans ce cas, pour $y = 0$ et pour $y = \infty$, l'expression proposée devient infinie ; cette expression admet donc un minimum pour une valeur positive de y. Cela étant, je fais

$$y = a\,\overline{\text{tang}}^{\,2}\varphi,$$

ce qui donne pour l'expression proposée

$$a^{m-n}\frac{\text{séc}^{2m}\varphi}{\overline{\text{tang}}^{\,2n}\varphi} = \frac{a^{m-n}}{\cos^{2(m-n)}\varphi\,\sin^{2n}\varphi};$$

or, $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi$ étant constant, le maximum de $\cos^{2(m-n)}\varphi\,\sin^{2n}\varphi$, et par conséquent le minimum de l'expression proposée, a lieu quand

$$\frac{\cos^2\varphi}{m-n} = \frac{\sin^2\varphi}{n}, \text{ d'où } \overline{\text{tang}}^{\,2}\varphi = \frac{n}{m-n},$$

et
$$y = \frac{na}{m-n},\quad x = a + y = \frac{ma}{m-n};$$

d'où, enfin,
$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n}.$$

2° $m < n$. Dans ce cas, l'expression devient infinie, pour $y = 0$, et zéro pour $y = \infty$; elle n'admet donc ni maximum ni minimum pour les valeurs positives de y. Pour $y = -a$ l'expression devient zéro ; d'ailleurs pour $y = -\infty$ elle devient aussi zéro ; elle admet donc un maximum ou un minimum pour une valeur négative de y plus petite que $-a$. Cela étant, je fais

$$y = -a\,\text{séc}^2\varphi,$$

(*) Je ne considère pas le cas de $m = n$, car alors $x = y = \infty$ rend évidemment l'expression maximum ou minimum.

ce qui donne

$$(-1)^{m+n}\, a^{m-n} \sin^{2m}\varphi \cos^{2(n-m)}\varphi.$$

Or, $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi$ étant constant, le maximum de $\sin^{2m}\varphi$ $\cos^{2(n-m)}\varphi$, et par conséquent le maximum ou le minimum, suivant que $m+n$ est pair ou impair, de l'expression proposée, a lieu quand

$$\frac{\sin^2\varphi}{m}=\frac{\cos^2\varphi}{n-m}=\frac{1}{n},\ \text{d'où } \operatorname{séc}^2\varphi=\frac{n}{n-m},$$

et
$$y=\frac{na}{m-n},\quad x=a+y=\frac{ma}{m-n};$$

d'où, enfin,
$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}.$$

Nous avons supposé, dans ce qui précède, $x>y$; si au contraire on a $y<x$, on pose

$$y-x=a,$$

ce qui donne pour l'expression proposée :

$$\frac{x^m}{(a+x)^n}=\frac{1}{\dfrac{(a+x)^n}{x^m}},$$

Alors on déduit aisément de ce qui précède, que si n est $>m$, le maximum de l'expression proposée a lieu, quand

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n};$$

et que si n est $<m$, le minimum ou le maximum, suivant que $m+n$ est pair ou impair, de l'expression proposée a lieu encore quand

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}.$$

Le théorème se trouve donc complétement démontré. Nous devons seulement ajouter, pour la distinction du maximum et du minimum, que si la plus grande des variables est affectée du plus grand exposant, le maximum a lieu quand cette plus grande variable se trouve en dénominateur, et le minimum quand elle se trouve en numérateur; et que si la plus grande des variables est affectée du plus petit exposant, le maximum et le minimum sont déterminés comme dans le premier cas, ou inversement, selon que la somme des exposants est un nombre impair ou un nombre pair.

Nous aurons, dans la suite, plusieurs fois occasion d'appliquer le théorème précédent.

II.

Pr. *Trouver dans une parabole donnée la normale à laquelle correspond la plus petite partie intérieure à la courbe.*

Sol. Soit $y^2=2px$ l'équation de la parabole, considérons une de ses normales, et soient x',y' les coordonnées du point où elle rencontre rectangulairement la courbe, et x'',y'' les coordonnées du point où elle rencontre obliquement la courbe; soit enfin δ la distance des deux points x',y' et x'',y''. Nous aurons :

$$y'^2=2px',\quad y''^2=2px'';$$

$$y'-y''=\frac{y'}{p}(x''-x'),\quad \delta^2=(x'-x'')^2+(y'-y'')^2.$$

Les deux premières équations donnent

$$(y'-y'')^2=2p(x''-x')+2y'(y'-y''),$$

d'où l'on tire avec la troisième

$$x''-x'=\frac{2p(p^2+y'^2)}{y'^2},\quad y'-y''=\frac{2(p^2+y'^2)}{y'},$$

et substituant dans la quatrième

$$\delta=\frac{2(p^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y'^2}.$$

Or les deux quantités $p^2+y'^2$ et y'^2 ont une différence constante, la plus grande placée au numérateur est d'ailleurs affectée du plus grand exposant, donc le minimum de δ a lieu, quand

$$\frac{2}{3}(p^2+y''^2)=y'^2;$$

on a alors

$$y'=\pm p\sqrt{2},\ x'=p,\ x''=4p,\ y''=\pm 2p\sqrt{2},\ \delta=3\sqrt{3p}.$$

Quant à l'équation de la normale elle est

$$y=\pm\sqrt{2}(x-2p).$$

Cette normale jouit de plusieurs propriétés remarquables : elle est tangente à la développée, au point $(4p, \pm 2p\sqrt{2})$, où elle rencontre obliquement la parabole ; elle est normale à la branche de la développée située au-dessus de l'axe des x ; elle est divisée par l'axe des x dans le rapport de 2 à 1, etc. Ces propriétés se vérifient aisément ; j'en dois la connaissance à une communication amicale de M. *Serret*.

Le problème que nous venons de résoudre, nous conduit au suivant, dont la solution offre un peu plus de difficulté et exige l'emploi d'une autre méthode.

III.

Pr. *Trouver dans l'ellipse les normales auxquelles correspondent la plus grande et la plus petite partie intérieure.*

Sol. Soit $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, l'équation de l'ellipse donnée, considérons une de ses normales, et soient x', y', les coordonnées du point où elle rencontre rectangulairement la courbe, et x'', y'' les coordonnées du point où elle la rencontre obliquement ; soit enfin δ la distance des deux points x', y' et x'', y''. Nous aurons :

(1) $\quad a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2, \qquad$ (2) $\quad a^2y''^2+b^2x''^2=a^2b^2,$

(3) $y'-y''=\dfrac{a^2y'}{b^2x'}(x'-x''), \quad$ (4) $\delta^2=(x'-x'')^2+(y'-y'')^2.$

Les équations (1) et (2) donnent

(5) $a^2(y'-y'')^2+b^2(x'-x'')^2-2a^2y'(y'-y'')-2b^2x'(x'-x'')=0.$

Des équations (3) et (4), on tire

$$\frac{y'-y''}{a^2y'}=\frac{x'-x''}{b^2x'}=\pm\frac{\delta}{\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}},$$

d'où

$$y'-y''=\pm\frac{\delta a^2y'}{\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}},\quad x'-x''=\pm\frac{\delta b^2x'}{\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}};$$

substituant ces valeurs dans l'équation (5) et simplifiant, on a

$$(6)\qquad (a^6y'^2+b^6x'^2)\delta\mp 2(a^4y'^2+b^4x'^2)^{\frac{3}{2}}=0,$$

où on ne doit évidemment prendre que le signe supérieur.

Pour simplifier cette équation appelons X, Y les coordonnees d'une des extrémités du diamètre conjugué de celui qui passe par le point x', y' et a' la demi-longueur de ce diamètre conjugué; nous aurons :

$$\mathrm{Y}=\pm\frac{bx'}{a},\qquad \mathrm{X}=\mp\frac{ay'}{b},$$

d'où $\qquad \mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2=a'^2=\dfrac{a^4y'^2+b^4x'^2}{a^2b^2},$

et $\qquad a^2b^2(a^2\mathrm{X}^2+b^2\mathrm{Y}^2)=a^6y'^2+b^6x'^2;$

l'équation (6) revient donc à

$$\delta(a^2\mathrm{X}^2+b^2\mathrm{Y}^2)=2aba'^3;$$

d'ailleurs on a

$$a^2\mathrm{Y}^2+b^2\mathrm{X}^2=a^2b^2,$$

multipliant cette dernière égalité par δ et l'ajoutant à la précédente, il vient

$$\delta(a^2+b^2)a'^2=2aba'^3+a^2b^2\delta,$$

ou enfin $\qquad 2aba'^3-\delta(a^2+b^2)a'^2+a^2b^2\delta=0.\qquad (7)$

Maintenant pour avoir les limites de δ, il faut, comme l'on sait, chercher les conditions de possibilité du problème, où il s'agit de déterminer a', connaissant δ. Or ces conditions, sont évidemment que l'équation ci-dessus admette pour a' une valeur réelle comprise entre a et b; pour les exprimer analytiquement, changeons a' en $\frac{1}{x}$, et appliquons le théorème de M. *Sturm* à l'équation transformée, nous aurons pour la suite

$$X = x^3 - \frac{a^2+b^2}{a^2b^2}x + \frac{1}{ab\delta},$$

$$X_1 = 3x^2 - \frac{a^2+b^2}{a^2b^2},$$

$$X_2 = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2}x - \frac{3}{ab\delta},$$

$$X_3 = \frac{(a^2+b^2)^3}{a^4b^4} - \frac{27}{\delta^2}.$$

On doit d'abord avoir

$$\frac{(a^2+b^2)^3}{a^4b^4} - \frac{27}{\delta^2} > 0, \quad \text{d'où} \quad \delta > \frac{3a^2b^2}{a^2+b^2}\sqrt{\frac{3}{a^2+b^2}}.$$

En effet, cette condition est celle de la réalité des racines de l'équation transformée; or cette équation ayant une racine réelle négative, si elle en a une autre comprise entre $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$, ce que nous voulons exprimer, elle en aura trois réelles.

Portons ensuite successivement $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$, en place de x dans la suite; il vient, abstraction faite des facteurs positifs,

pour $\frac{1}{b}$: $2a-\delta$, $2a^2-b^2$, $\delta(a^2+b^2)-3ab^2$, $\delta^2(a^2+b^2)^3-27a^4b^4$,

pour $\frac{1}{a}$: $2b-\delta$, $2b^2-a^2$, $\delta(a^2+b^2)-3a^2b$, $\delta^2(a^2+b^2)^3-27a^4b^4$.

Les résultats provenant de la substitution de $\frac{1}{b}$ sont tous positifs, cela est évident pour les deux premiers et le quatrième de ces résultats, et pour le troisième cela résulte de

$$\delta > \frac{3a^2b^2\sqrt{3}}{(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}} > \frac{3a^2b}{a^2+b^2}.$$

Il suffit donc que les résultats provenant de la substitution de $\frac{1}{a}$, forment au moins une variation, cette condition est remplie, si l'on a $2b^2-a^2<0$. Ainsi dans ce cas la condition cherchée se réduit à celle de la réalité des racines qui nous a donné

$$\delta > \frac{3a^2b^2}{a^2+b^2}\sqrt{\frac{3}{a^2+b^2}};$$

si l'on a $2b^2-a^2<0$, on aura aussi

$$\delta(a^2+b^2)-3a^2b>0.$$

Cela résulte de

$$\delta > \frac{3a^2b^2}{a^2+b^2}\sqrt{\frac{3}{a^2+b^2}} > \frac{3a^2b}{a^2+b^2},$$

il faudra donc dans ce cas que l'on ait, avec la condition de la réalité des racines,

$$2b-\delta<0 \quad \text{ou} \quad \delta>2b.$$

Du reste, cette dernière condition comprend la première, ainsi qu'il est facile de le voir.

On conclut aisément de ce qui précède : le maximum de δ est toujours $2a$; ce qui est évident à priori, et le minimum est

$$\frac{3a^2b^2}{a^2+b^2}\sqrt{\frac{3}{a^2+b^2}} \quad \text{ou} \quad 2b,$$

selon que $2b^2-a^2$ est $<$ ou >0.

Dans le cas où

$$\delta = \frac{3a^2b^2}{a^2+b^2}\sqrt{\frac{3}{a^2+b^2}},$$

l'équation (7) a deux racines égales ; alors a' vérifie l'équation

$$3aba'^2-\delta(a^2+b^2)a'=0,$$

et par conséquent est égal à

$$\frac{\delta(a^2+b^2)}{3ab} = ab\sqrt{\frac{3}{a^2+b^2}}.$$

Dans le même cas

$$X = \pm\frac{ab}{c}\sqrt{\frac{2a^2-b^2}{a^2+b^2}},\quad Y = \pm\frac{ab}{c}\sqrt{\frac{a^2-2b^2}{a^2+b^2}},$$

$$x' = \pm\frac{a^2}{c}\sqrt{\frac{a^2-2b^2}{a^2+b^2}},\quad y' = \mp\frac{b^2}{c}\sqrt{\frac{2a^2-b^2}{a^2+b^2}},$$

$$x'' = \pm\frac{a^2}{c}\left(\frac{a^2-2b^2}{a^2+b^2}\right)^{\frac{3}{2}},\quad y'' = \pm\frac{b^2}{c}\left(\frac{2a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

On reconnaît aisément que les valeurs de x'' et de y'' vérifient l'équation de la développée de l'ellipse

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

On peut donc conclure que dans l'ellipse comme dans la parabole, la normale à laquelle correspond la plus petite partie intérieure est tangente à la développée de l'ellipse au point où cette développée rencontre l'ellipse, bien entendu lorsque cette rencontre a lieu, c'est-à-dire quand a^2-2b^2 est >0. Quand a^2-2b^2 est <0, la normale en question n'est autre que le petit axe de l'ellipse. (*La suite prochainement.*)

RELATIONS D'IDENTITÉ

Et équations fondamentales relatives aux courbes de second degré.

(Suite, voir p. 106.) (*)

—

Équation polaire. Foyers, directrices.

XXXIV. Soit z la distance d'un point de la courbe à l'ori-

(*) Voir pour les notations et les identités, t. I, p. 489.

gine; φ = angle que forme cette distance avec l'axe des x; φ' = angle que forme cette distance avec l'axe des y; on a :

$$\varphi+\varphi'=\gamma\,;\ x\sin\gamma=z\sin\varphi'\,;\ y\sin\gamma=z\sin\varphi\,;$$

mettant ces valeurs de x et de y dans l'équation générale, il vient :

$$z^2\,[\mathrm{A}\sin^2\varphi+\mathrm{B}\sin\varphi\sin\varphi'+\mathrm{C}\sin^2\varphi]+z\sin\gamma\,[\mathrm{D}\sin\varphi+\mathrm{E}\sin\varphi']+\mathrm{F}\sin^2\gamma=0. \qquad (24)$$

C'est ce qu'on appelle l'*équation polaire* de la courbe ; ordinairement, on suppose $\gamma=1^q$ et alors $\sin\varphi'=\cos\gamma$; l'origine se nomme *pôle*, et l'axe des x est l'*axe polaire*.

XXXV. Résolvant l'équation générale polaire, on trouve

$$z=-\frac{1}{2}\sin\gamma\left[\frac{\mathrm{D}\sin\varphi+\mathrm{E}\sin\varphi'\pm\sqrt{l\sin^2\varphi+2n\sin\varphi\sin\varphi'+l'\sin^2\varphi'}}{\mathrm{A}\sin^2\varphi+\mathrm{B}\sin\varphi\sin\varphi'+\mathrm{C}\sin^2\varphi'}\right]$$

Coroll. 1. Le dénominateur se décompose en deux facteurs réels inégaux, lorsque $m>0$; en deux facteurs réels égaux, lorsque $m=0$; en deux facteurs imaginaires, lorsque $m<0$; cette discussion ramène encore aux trois formes qu'affectent les coniques.

Coroll. 2. Si $n^2-ll'=0$. La quantité sous le radical devient un carré parfait ; mais $n^2-ll'=4\mathrm{LF}$ (identités, p. 490) ; donc $\mathrm{F}=0$; alors z est rationnel, et l'une des valeurs de z est évidemment nulle ; ce que donne aussi immédiatement l'équation générale.

Relations correspondant à un foyer à l'origine.

XXXVI. Cherchons les relations qui rendent la quantité sous le radical, indépendante de l'angle variable φ ; si cette indépendance est possible, il est évident que la quantité doit rester la même, quelque valeur qu'on donne à φ ; faisant donc successivement $\varphi=0$; $\varphi'=0$; $\varphi=\varphi'=\frac{1}{2}\gamma$; on a : $l'\sin^2\gamma=$

$l\sin^2\gamma = (l+l')\sin^2\frac{1}{2}\gamma + 2n\sin^2\frac{1}{2}\gamma$; d'où $l=l'$; $n=l\cos\gamma$ (2); admettant cette double relation, la quantité sous le radical devient :

$$l[\sin^2\varphi + \sin^2(\gamma-\varphi) + 2\cos\gamma\sin\varphi\sin(\gamma-\varphi)] =$$
$$l[\sin^2\varphi + \sin(\gamma-\varphi)\,[(\sin(\gamma-\varphi) + 2\cos\gamma\sin\varphi)] =$$
$$l[\sin^2\varphi + \sin(\gamma-\varphi)\sin(\gamma+\varphi)] = l\frac{[2\sin^2\varphi + \cos 2\varphi - \cos 2\gamma]}{2} =$$
$$l\frac{(1-\cos 2\gamma)}{2} = l\overline{\sin}^2\gamma.$$

Coroll. Si cette double relation subsiste, on a donc

$$z = -\frac{\frac{1}{2}\sin\gamma\,[D\sin\varphi + E\sin\varphi' \pm \sin\gamma\sqrt{l}\,]}{A\sin^2\varphi + B\sin\varphi\cos\varphi' + C\sin^2\varphi'}$$

On voit donc que l doit être positif; $n^2 - ll' = l^2(\cos^2\gamma - 1) = 4FL$; donc FL est négatif. Ainsi, l'origine dans ce cas est toujours dans l'intérieur de la courbe (XXII, p. 112).

XXXVII. Prenons des axes rectangulaires, alors $l=l'$; $n=0$; remplaçons dans l'équation générale de la courbe, les coefficients A,B,C,D,E,F, par leurs valeurs, tirées des identités, et ayant égard aux deux relations (2), cette équation devient :

$(k^2 - ml)y^2 - 2kk'xy + (k'^2 - ml)x^2 + 2l(k'y + kx) - l^2 = 0$; on peut la mettre sous cette forme :

$$(ky + k'x)^2 + (k'y + kx)^2 - [k'y + kx - l]^2 - ml(x^2 + y^2) = 0.$$

Développant et réduisant, on obtient

$$(y^2 + x^2)(k^2 + k'^2 - ml) = (k'y + kx - l)^2, \qquad (a)$$

la polaire de l'origine est $k'y + kx - l = 0$ (p. 113); donc $\frac{k'y + kx - l}{\sqrt{k^2 + k'^2}}$ est la distance d'un point de la courbe à cette polaire, et $\sqrt{x^2 + y^2}$ est la distance de ce même point à l'origine; or, l'équation (a) donne

$$\frac{k'y + kx - l}{\sqrt{k^2 + k'^2}\cdot\sqrt{y^2 + x^2}} = \sqrt{\frac{k^2 + k'^2 - ml}{k^2 + k'^2}}.$$

Ainsi, la distance d'un point quelconque de la courbe à la polaire de l'origine, divisée par la distance de ce même point à l'origine, donne un quotient constant.

Observation. Ce quotient étant fondamental dans les coniques, nous le désignerons sous le nom spécial de *rapport focal.*

XXXVIII. M. Bret est le premier qui ait démontré directement qu'il existe dans l'intérieur de la parabole un point, et dans les deux autres coniques deux points seulement, tels, qu'en les prenant pour origine, les axes étant rectangulaires, l'équation de la courbe prend la forme (*a*). Ces points sont les *foyers.* Il établit cette proposition en discutant les équations de condition, qui ramènent l'équation générale à cette forme particulière. (*Annales de Gergonne*, t. VIII, p. 317, année 1817-18.) D'autres ont suivi la même marche, et, d'après un usage généralement suivi en France, sans jamais nommer l'auteur (*) ; c'est une raison pour que nous le nommions toujours.

XXXIX. *Équations des coordonnées des foyers*; *ellipse et hyperbole.*

Prenons l'équation générale, et γ pour angle des axes; transportons l'origine au centre; l'équation devient

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + \frac{L}{m} = 0.$$

Soient α, β les coordonnées du foyer relatives à ces diamètres pris pour axes; transférons-y derechef l'origine des coordonnées, on aura $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + [2A\beta + B\alpha]y + [2C\alpha + B\beta]x +$

$$+ A\beta^2 + B\alpha\beta + C\alpha^2 + \frac{L}{m} = 0.$$

Pour que cette origine soit un foyer, on doit poser les deux relations (XXXVI)

(*) Nous devons maintenant excepter M. Cirodde. Voir sa Géométrie analytique, p. 387.

$$(2A\beta+B\alpha)^2-4A\left[A\beta^2+B\alpha\beta+C\alpha^2+\frac{L}{m}\right]=$$

$$=(2C\alpha+B\beta)^2-4C\left(A\beta^2+B\alpha\beta+C\alpha^2+\frac{L}{m}\right),$$

$$(2A\beta+B\alpha)\,(2C\alpha+B\beta)-2B\left(A\beta^2+B\alpha\beta+C\alpha^2+\frac{L}{m}\right)=$$

$$=\cos\gamma\left[(2A\beta+B\alpha)^2-4A\left(A\beta^2+B\alpha\beta+C\alpha^2+\frac{L}{m}\right)\right];$$

effectuant et réduisant, il vient

$$\alpha^2-\beta^2+\frac{4L}{m^2}(C-A)=0, \qquad (b)$$

$$\alpha^2\cos\gamma+\alpha\beta+\frac{2L}{m^2}(B-2A\cos\gamma)=0. \qquad (c)$$

Ces équations représentent deux hyperboles équilatères, concentriques.

Éliminant les quantités connues, il vient

$$2(A-C)\alpha\beta+\alpha^2[B-2C\cos\gamma]+\beta^2[2A\cos\gamma-B]=0,$$

équation du système de deux droites rectangulaires qui ne sont autres que les axes principaux de la conique (t. I, p. 496); donc les foyers sont sur les axes ou sur les intersections d'une hyperbole équilatère avec deux de ses diamètres rectangulaires; et dans ce cas, un diamètre rencontre toujours, et l'autre, jamais; par conséquent, il existe toujours deux foyers réels et deux foyers imaginaires.

Les deux équations (b) et (c) combinées donnent aussi celle-ci

$$\beta^2\cos\gamma+\alpha\beta=\frac{2L}{m^2}(2C\cos\gamma-B).$$

Éliminant B entre les deux équations (b) et (c) on obtient

$$\alpha^4\sin^2\gamma+\alpha^2[Q-2Q'\cos\gamma]-Q'^2=0;$$

$$Q=\frac{4L}{m^2}(C-A);\quad 2Q'=\frac{L}{m^2}(B-2A\cos\gamma);$$

d'où

$$2\alpha^2\sin^2\gamma = 2Q'\cos\gamma - Q + \sqrt{(2Q'\cos\gamma - Q)^2 + 4Q'^2\sin^2\gamma}.$$

On ne prend que le signe $+$, car le signe $-$ donne pour α^2 des valeurs négatives relatives aux foyers imaginaires, or

$$2Q'\cos\gamma - Q = \frac{4L}{m^2}[2A\sin^2\gamma - N],$$

$$(2Q'\cos\gamma - Q)^2 + 4Q'^2\sin^2\gamma = 4Q'^2 - 2QQ'\cos\gamma + Q^2 =$$

$$= \frac{16L^2}{m^4}[(B-2A\cos\gamma)^2 - 2(C-A)(B-2A\cos\gamma)\cos\gamma + (C-A)^2]$$

$$= \frac{16L^2}{m^4}[(B - 2A\cos\gamma)(B - 2C\cos\gamma) + (C-A)^2] =$$

$$= \frac{16L^2}{m^4}(N^2 + m\sin^2\gamma),$$ (*V*. t. I, p. 489),

$$\left.\begin{aligned} &\text{ainsi}\quad \alpha^2\sin^2\gamma = \frac{2L}{m^2}\left[2A\sin^2\gamma - N + \sqrt{N^2 + m\sin^2\gamma}\right] \\ &\text{et}\quad \beta^2\sin^2\gamma = \frac{2L}{m^2}\left[2C\sin^2\gamma - N + \sqrt{N^2 + m\sin^2\gamma}\right] \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Telles sont les coordonnées des foyers, relativement à deux diamètres quelconques pris pour axes. On voit que α a deux valeurs égales aux signes près; par conséquent les deux foyers sont à égales distances du centre; $\alpha\sin\gamma$ et $\beta\sin\gamma$ sont les distances du foyer aux deux diamètres pris pour axes. On a

$$\beta = \frac{2L}{m^2}\,\frac{2A\cos\gamma - B}{\alpha} - \alpha\cos\gamma;$$

ainsi, connaissant le signe de α, on a celui de β.

Si, dans l'ellipse, on prend le grand axe $2a$ pour axe des x, et le petit axe $2b$ pour axe des y, on trouve $\alpha^2 = a^2 - b^2$, $\beta^2 = 0$; donc les foyers sont sur le grand axe, et l'on a aussi (*V*. t. I, p. 493)

$$\alpha^2\sin^2\gamma = \frac{4AL\sin^2\gamma}{m^2} - b^2,$$

$$\beta^2\sin^2\gamma = \frac{4CL}{m^2}\sin^2\gamma - b^2.$$

On démontre de même que dans l'hyperbole les foyers sont sur le diamètre principal $2a$ qui rencontre ; et l'on a, en général, $\alpha^2 \sin^2\gamma = \frac{4AL\sin^2\gamma}{m^2} + b^2$,

$$\beta^2 \sin^2\gamma = \frac{4CL}{m^2}\sin^2\gamma + b^2,$$

où b est le demi-diamètre principal qui ne coupe pas la courbe.

Observation. 1° Les coordonnées des foyers par rapport à des axes quelconques sont donc $\alpha - \frac{k}{m}$ et $\beta - \frac{k'}{m}$.

2° Lorsque les diamètres sont conjugués, l'on a

$$(\alpha^2 + \beta^2)\sin^2\gamma = C^2 - b^2\cos^2\gamma ;$$

donc la somme des carrés des distances d'un foyer à deux diamètres conjugués, dans l'ellipse, est un maximum pour les axes principaux et un minimum pour les diamètres conjugués égaux ; dans l'hyperbole, cette somme est un minimum pour les axes principaux, et un maximum pour l'asymptote, considérée comme système de diamètres conjugués coïncidants.

XL. *Distances des foyers au centre; ellipse et hyperbole rapportées au centre.*

Désignant cette distance par c, on a

$$c^4 = \frac{16L^2}{m^4}[N^2 + m\sin^2\gamma]. \qquad (26)$$

On parvient à cette expression en calculant le carré de la différence des racines dans l'équation (3) (t. I, p. 493).

XLI. *Coordonnées du foyer dans la parabole.*

Soient toujours α, β les coordonnées du foyer ; transportant l'origine au foyer, il vient

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+D'y+E'x+F'=0,$$
$$D'=2A\beta+B\alpha+D,$$
$$E'=2C\alpha+B\beta+E,$$
$$F'=A\beta^2+B\alpha\beta+C\alpha^2+D\beta+E\alpha+F;$$

les relations focales (XXXVI) donnent

$$D'^2-4AF'=E'^2-4CF',\quad D'E'-2BF'=(D'^2-4AF')\cos\gamma;$$

développant, réduisant et ayant égard à l'équation $m=0$, il vient

$$2k'\beta-2k\alpha+l-l'=0,$$
$$k\beta+\alpha(k'+2k\cos\gamma)+n-l\cos\gamma=0,$$

il n'existe donc qu'un seul foyer, intersection de ces deux droites.

Ces équations donnent

$$\alpha=\frac{2k'l\cos\gamma+k(l-l')-2k'n}{2(k^2+k'^2+2kk'\cos\gamma)},\quad \beta=\frac{2kl'\cos\gamma+k'(l'-l)-2kn}{2(k^2+k'^2+2kk'\cos\gamma)},$$
$$k(l'-l)-2k'n=k(l+l')-2kl'-2k'n=k(l+l')-4EL,$$
$$k'(l'-l)-2kn=k'(l+l')-4CL,$$
$$k^2+k'^2+2kk'\cos\gamma=4NL,$$

donc

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{k(l+l')-4EL+2k'l\cos\gamma}{8NL}\\ \beta&=\frac{k'(l+l')-4DL+2kl'\cos\gamma}{8NL}\end{aligned}\right\},\ \text{coordonnées du foyer (27);}$$

rapportant la parabole aux axes principaux et prenant le diamètre principal pour axe des x, il vient $\beta=0$; donc le foyer est sur le diamètre principal.

XLII. *Équation de l'axe principal dans la parabole.*

Cette équation est

$$2Ay+Bx+D=2A\beta+B\alpha+D=\frac{k'+k\cos\gamma}{2N}.$$

En effet l'on a

$$2A\beta + B\alpha + D =$$

$$= \frac{(l+l')(2Ak'+Bk)-4L[2AD+BE-2(A+C)D]+\cos\gamma[4Akl'+2Bk'l+4Lkk'D]}{8NL},$$

$$2Ak'+Bk=0, \quad Bk'l=-2Ckl,$$

$$4Akl'+2Bk'l=4(Akl'-Ckl)=4k[Al'-Cl]=4k[L-Dk'],$$

donc $$2A\beta+B\alpha+D=\frac{k'+k\cos\gamma}{2N}. \qquad (28)$$

Observation. Cette équation de l'axe principal est plus simple que celle qu'on a donnée (XIV, p. 27).

XLIII. *Équation de la directrice dans la parabole.*

La directrice étant la polaire du foyer, l'équation de la directrice est

$$D'y+E'x+D\beta+E\alpha+2F=0,$$

or $$D'=\frac{k'+k\cos\gamma}{N}, \quad E'=\frac{k+k'\cos\gamma}{N},$$

$$8NL(D\beta+E\alpha)=(l+l')(Dk'+Ek)-4L(D^2+E^2)+2\cos\gamma(Dkl'+Ek'l),$$

les identités donnent $Dk'+Ek=2L$,

$$Dkl'+Dk'n=2DEL,$$

$$Ek'l+Ekn=2DEL,$$

d'où $$Dkl'+Ek'l=2L[2DE-n],$$

ou $$4N[D\beta+E\alpha]=l+l'-2(D^2+E^2)+2\cos\gamma[2DE-n],$$

$$4N[D\beta+E\alpha+2F]=l+l'-2(D^2+E^2)$$

$$+B(A+C)F+2\cos\gamma[2DE-n-4BF]=-l-l'+2n\cos\gamma.$$

Ainsi l'équation de la directrice est

$$2y(k'+k\cos\gamma)+2x(k+k'\cos\gamma)=l+l'-2n\cos\gamma.$$

XLIV. *Coordonnées du point d'intersection du diamètre principal et de la directrice.*

α et β étant les coordonnées du foyer, on a
Équation du diamètre principal

$$2Ay+Bx=2A\beta+B\alpha, \qquad (a)$$

Équation de la directrice

$$y(2A\beta + B\alpha + D) + x(2C\alpha + B\beta + E) = -D\beta - E\alpha - 2F,$$

ou bien

$$\beta(2Ay + Bx) + \alpha(By + 2Cx) + Dy + Ex = -D\beta - E\alpha - 2F,$$

et encore

$$\beta(2Ay + Bx) + \frac{B\alpha}{2A}(2Ay + Bx) + Dy + Ex = -D\beta - E\alpha - 2F.$$

Cherchant les intersections du diamètre principal et de la directrice, il vient

$$Dy + Ex = -D\beta - E\alpha - 2F - \beta(2A\beta + B\alpha) - \frac{B\alpha}{2A}(2A\beta + B\alpha),$$

ou bien

$$Dy + Ex = -2A\beta^2 - 2B\alpha\beta - 2C\alpha^2 - D\beta - E\alpha - 2F;$$

combinant cette équation avec l'équation (a), on en tire :

$$x = -\frac{4A}{k}(A\beta^2 + B\alpha\beta + C\alpha^2 + D\beta + E\alpha + F) + \alpha,$$

$$y = \frac{2B}{k}(A\beta^2 + B\alpha\beta + C\alpha^2 + D\beta + E\alpha + F) + \beta,$$

car $$-\frac{4C}{k'} = \frac{2B}{k};$$

on a l'identité

$$A\beta^2 + B\alpha\beta + C\alpha^2 + D\beta + E\alpha + F = \frac{1}{4A}\left[(2A\beta + B\alpha + D)^2 + 2k\alpha + l\right],$$

$$2k\alpha = \frac{k^2(l+l') - 4kEL + 2kk'l\cos\gamma}{4NL};\ \text{or}\ k^2 = 4AL,\ 2kk' = -4BL,$$

donc $$2k\alpha = \frac{A(l+l') - kE - Bl\cos\gamma}{N},$$

$$2k\alpha - l = \frac{A(l+l') - kE - Bl\cos\gamma - Nl}{N},$$

remplaçant dans le numérateur N par sa valeur

$A + C - B\cos\gamma$, il vient $2k\alpha - l = -\dfrac{L}{N}$, et $$2A\beta+B\alpha+D=\frac{k'+k\cos\gamma}{2N},$$

donc

$$A\beta^2+B\alpha\beta+C\alpha^2+D\beta+E\alpha+F=\frac{1}{4A}\left[\frac{k'^2+2kk'\cos\gamma+k^2\cos^2\gamma-4LN}{4N^2}\right]$$
$$=-\frac{L\sin^2\gamma}{4N^2}.$$

Pour parvenir à ce résultat il faut remplacer k'^2, kk', k^2, N, par leurs valeurs, et mettre $\cos^2\gamma=1-\sin^2\gamma$;

donc $$\left.\begin{aligned} x&=\frac{LA}{kN^2}\sin^2\gamma+\alpha=\frac{k\sin^2\gamma}{4N^2}+\alpha \\ y&=\frac{k'\sin^2\gamma}{4N^2}+\beta \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

XLV. *Coordonnées du sommet de la parabole.*

Le sommet étant au milieu de la distance du foyer à la directrice, on a donc

$$\left.\begin{aligned} x&=\alpha+\frac{k\sin^2\gamma}{8N^2} \\ y&=\beta+\frac{k'\sin^2\gamma}{8N^2} \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

XLVI. *Distance du sommet au foyer.*

Désignant cette distance par p; l'on a

$$p^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\gamma,$$

où x et y sont les coordonnées du sommet; substituant les valeurs trouvées ci-dessus, on a

$$p^2=\frac{L\sin^4\gamma}{N^3}. \qquad (32)$$

Ainsi deux paraboles sont égales lorsque $\frac{L\sin^4\gamma}{N^3}$ a la même valeur pour les deux; confirmation de ce qui a été trouvé (tome I, p. 493).

XLVII. *Rapport focal dans l'ellipse et l'hyperbole.*

Désignant ce rapport par u, on trouve au moyen de l'équation aux rapports des diamètres principaux

$$u = \frac{2N'(\pm N + N')}{m \sin^2 \gamma}, \qquad N'^2 = N^2 + m \sin^2 \gamma,$$

où N' est positif; dans l'ellipse, on prend $-N$, dans l'hyperbole $\pm N$ où les deux rapports focaux appartiennent aux hyperboles conjuguées. (*La suite prochainement.*)

NOTE

relative au lieu des projections d'un point sur les tangentes à une courbe.

PAR M. RICHAND,
ancien élève de l'École polytechnique.

I

Théorème. Soit AB (*fig.* 83), une courbe plane quelconque; P la projection du point D sur la tangente AP : je dis que si M est le milieu de AD, PM sera normale au lieu géométrique des points P.

Soit en effet A'P' une tangente voisine de AP, le cercle décrit sur DQ comme diamètre passera en P et P'; la ligne PP' est donc une sécante commune au cercle et au lieu des projections. Ainsi lorsque la tangente A'P' se rapprochera de AP, la sécante PP' tendra vers la tangente commune au cercle et au lieu géométrique des projections. Mais le cercle tend vers la circonférence décrite sur DA comme diamètre dont le centre est en M. On voit donc que PM est normale au lieu des points P.

On verrait de la même manière que dans le cas où P serait une projection oblique, il suffirait pour avoir la normale au nouveau lieu, de joindre le point P au centre du cercle circonscrit au triangle DPA.

Corollaire 1. Le théorème précédent, appliqué au lieu des projections du foyer d'une conique sur les tangentes, conduit immédiatement à ce résultat connu que le lieu est le cercle décrit sur l'axe focal pour l'ellipse et l'hyperbole; et la tangente au sommet pour la parabole; on déduit donc de là cet autre théorème :

Si on projette le foyer d'une conique sur une tangente, la ligne qui joint la projection au milieu du rayon vecteur mené au point de contact de la tangente est un diamètre de la courbe.

Corollaire 2. Méthode graphique pour mener une tangente à la cissoïde par un point donné sur la courbe.

Soit en effet P (*fig.* 84), un point d'une cissoïde regardée comme étant le lieu des projections du sommet d'une parabole sur les tangentes, il suffira de mener par ce point P une tangente PM à une parabole dont le foyer sera déterminé par la condition SF = SK. Comme le point de contact M de cette tangente peut se déterminer graphiquement, la ligne PI menée au milieu de SM sera normale à la cissoïde.

Les constructions indiquées plus haut font voir pareillement que si on projette un point du plan sur les normales à une courbe, il suffira pour avoir la normale au nouveau lieu de joindre un point quelconque de ce lieu au milieu du rayon vecteur mené au centre de courbure de la courbe proposée, situé sur la normale considérée.

II

Méthode inverse des projections sur les tangentes.

On s'est déjà occupé de la recherche du lieu des projections d'un point du plan sur les tangentes à une courbe plane, il est également possible de traiter la question inverse, c'est-à-dire, de regarder une courbe plane comme étant le lieu des projections d'un point du plan sur les tangentes à une autre courbe et de trouver par là même cette autre courbe.

En effet, si MN (*fig.* 85), est la courbe donnée et P le point que l'on a projeté, il suffira de mener les divers rayons PA, PB,... et de chercher le lieu des points Q intersections successives des perpendiculaires AQ, BQ à ces rayons.

Applications. 1° Prenons pour la courbe MN une ligne droite OY, et pour le point P un point situé sur l'axe OX. Le rayon PA aura pour équation

$$y = -\frac{1}{m}(x - a),$$

comme l'ordonnée à l'origine $OA = \frac{a}{m}$ l'équation de la perpendiculaire AQ à ce rayon sera

$$y = mx + \frac{a}{m};$$

on reconnaît là l'équation de la tangente à une parabole dont P est le foyer et OY la tangente au sommet.

On peut au reste trouver le lieu des intersections successives des droites :

$$(\text{AQ}) \qquad y = mx + \frac{a}{m}, \qquad (\text{BQ}) \quad y = m'x + \frac{a}{m'}.$$

On a en effet pour l'abscisse du point commun à ces droites

$$(m - m')\,x = \frac{a\,(m - m')}{mm'}; \text{ et pour } \quad m = m', \ x = \frac{a}{m^2};$$

éliminant m, entre $x = \frac{m^2}{a}$ et $y = mx + \frac{m}{a}$, il vient pour le lieu des points Q,

$$y^2 = 4ax.$$

On retrouve donc la parabole.

2° Prenons pour la courbe MN un cercle, l'origine des axes rectangulaires au centre, et le point P sur l'axe des x.

Les équations du rayon PA, et du cercle étant

$$\text{(PA)} \qquad y = -\frac{1}{m}(x-\alpha), \qquad y^2 + x^2 = R^2,$$

on trouve pour les coordonnées des poins communs :

$$x = \frac{\alpha \pm m\sqrt{R^2(m^2+1)-\alpha^2}}{m^2+1},$$

$$y = \frac{\alpha m \mp \sqrt{R^2(m^2+1)-\alpha^2}}{m^2+1}.$$

D'après la valeur de ces coordonnées l'équation réduite de la perpendiculaire AQ au rayon PA sera :

$$y = mx \mp \sqrt{m^2R^2 + R^2 - \alpha^2}.$$

On voit que c'est l'équation de la tangente à une conique à centre, dont les axes sont dirigés suivant les axes actuels de a courbe ; P est en outre le foyer, et l'axe focal est égal à R.

On trouve au reste pour le lieu des intersections successives de ces droites :

$$R^2y^2 + (R^2-\alpha^2)\,x^2 = R^2\,(R^2-\alpha^2),$$

équation d'une ellipse ou d'une hyperbole suivant que l'on a $R \gtrless \alpha$ c'est-à-dire suivant que le point donné est intérieur ou extérieur au cercle.

On retrouve le cercle lui même si $\alpha = 0$.

III

La méthode suivie dans les deux applications précédentes conduirait à des calculs interminables si la courbe primitive était d'un degré élevé ; on peut considérer la question sous un autre point de vue, et une intégration toujours possible conduira au résultat.

Soit $f(u, t) = 0 \ldots.$ (a) l'équation de la courbe primitive ;

$$u - y = p\,(t-x), \ldots.. \qquad (t)$$

l'équation de la tangente à la courbe cherchée ;

$$u - \beta = -\frac{1}{p}(t-\alpha), \ldots \qquad (p)$$

l'équation de la perpendiculaire abaissée du point (α, β) sur cette tangente. Il est évident que l'élimination de u et t entre les équations (a) (t) (p) conduira à l'équation différentielle de la courbe cherchée.

Les équations (t) et (p) donnent

$$u = \frac{\frac{y}{p} - x + \alpha + \beta p}{p + \frac{1}{p}}, \qquad t = \frac{px + \frac{\alpha}{p} + \beta - y}{p + \frac{1}{p}}.$$

L'équation différentielle de la courbe cherchée sera donc

$$f\left[\frac{y - px + \alpha p + \beta p^2}{p^2+1}, \quad \frac{\alpha + \beta p - p(y-px)}{p^2+1}\right] = 0.$$

Appliquons ces résultats à la lemniscate

$$(y^2 + x^2)^2 + a^2y^2 - a^2x^2 = 0.$$

Remplaçons y et x par les valeurs trouvées pour u et t et supposons $\alpha = \beta = 0$; il vient pour l'équation différentielle de la courbe cherchée :

$$\left[\frac{(y-px)^2 + p^2(y-px)^2}{(p^2+1)^2}\right]^2 + a^2\frac{(y-px)^2}{(p^2+1)^2} - a^2p^2\frac{(y-px)^2}{(p^2+1)^2} = 0,$$

ou, après les réductions faites :

$$(y - px)^2 = a^2(p^2-1) \quad \text{et} \quad y = px + a\sqrt{p^2-1},$$

d'où, en différentiant,

$$0 = xdp + \frac{ap}{\sqrt{p^2-1}};$$

la solution singulière donne

$$x = \frac{-ap}{\sqrt{p^2-1}}, \quad y = \frac{-a}{\sqrt{p^2-1}}, \quad p = \frac{x}{y},$$

et par suite

$$y^2 - x^2 = -a^2.$$

On voit donc que le lieu des projections du centre d'une hyperbole équilatère sur les tangentes est une lemniscate dont les foyers sont aux points où les directrices de l'hyperbole rencontrent l'axe.

Les équations différentielles auxquelles conduira la méthode précédente seront toujours de la forme

$$y = px + F(p)$$

et on sait qu'il est toujours possible d'intégrer ces équations.

(Lacroix, *Traité élémentaire de calcul différentiel*, § 270.)

QUESTIONS D'EXAMEN.

Modifier une formule géométrique quand les unités de volume, de surface et de ligne changent.

PAR M HUET,
Régent de physique au Collège de Pamiers.

Plusieurs questions de ce genre sont adressées souvent dans les examens ; pour donner l'idée de la méthode qu'on doit suivre, nous allons particulièrement traiter les deux questions suivantes.

1° Modifier la formule $P = \frac{1}{3}BH$ du volume de la pyramide en prenant la sphère pour unité de volume, son grand cercle pour unité de surface, et son rayon pour unité de longueur ; au lieu du cube, de sa face et de son arête, comme on le fait ordinairement et comme le suppose la formule ci-dessus.

2° Ou encore en prenant le tétraèdre régulier pour unité de volume, sa face pour unité de surface, et son côté pour unité de longueur.

Ces deux questions sont les mêmes et peuvent se résoudre d'une manière analogue. Elles se réduisent à comparer $\frac{1}{3}$ BH avec la mesure ordinaire de la sphère, et avec celle du tétraèdre en mettant en évidence les nouvelles unités de surface et de ligne.

Sphère $= \frac{4}{3}$ C.R, C étant son grand cercle.

Donc $\frac{\text{Pyr}}{\text{Sph}} = \frac{\text{BH}}{4\text{CR}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\text{B}}{\text{C}} \cdot \frac{\text{H}}{\text{R}} = \frac{1}{4}\,\text{B'H'} = \frac{1}{4}\,\text{BH}$, en supprimant les accents ; d'où $\text{P} = \frac{1}{4}\,\text{BH}$, ce qui étonnerait beaucoup en langage ordinaire. Mais le véritable sens de cette nouvelle formule abrégée serait : le rapport de la pyramide à la sphère prise pour unité égale le quart du produit du rapport de sa base au grand cercle par celui de sa hauteur au rayon, comme l'indique la formule $\frac{\text{P}}{\text{Sph}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\text{B}}{\text{C}} \cdot \frac{\text{H}}{\text{R}}$, dans laquelle les trois espèces d'unités sont en évidence, au lieu qu'elles sont sous-entendues dans $\text{P} = \frac{1}{4}\,\text{BH}$: tout comme la première $\text{P} = \frac{1}{3}\,\text{BH}$ est l'abrégé de $\frac{\text{P}}{\text{K}} = \frac{1}{3}\,\frac{\text{B}}{q} \cdot \frac{\text{H}}{c}$, K désignant le cube pris pour unité, q l'une de ses faces, et c le côté.

Le tétraèdre régulier ayant pour mesure ordinaire $\frac{1}{3}\,bh$, en le désignant par t on aura $\frac{\text{P}}{t} = \frac{\text{BH}}{bh} = \frac{\text{B}}{b} \cdot \frac{\text{H}}{h}$. Il reste à évaluer h en c qui est le côté du triangle équilatéral. En désignant par r le rayon du cercle circonscrit à ce triangle, on a

$$h = \sqrt{c^2 - r^2} = \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}\,c^2} = \frac{1}{3}\,c\sqrt{6}.$$

Donc

$$\frac{H}{h} = \frac{3H}{c\sqrt{6}} = \frac{H}{c} \cdot \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot \frac{H}{c}.$$

Donc

$$\frac{P}{t} = \frac{1}{2}\sqrt{6}\frac{B}{b} \cdot \frac{H}{c} = \frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot B' \cdot H' \quad \text{ou} \quad P = \frac{1}{2}\sqrt{6}\,BH,$$

en faisant $b = 1$, $c = 1$, $t = 1$, unités de surface, de ligne et de volume, qu'il ne faudra pas oublier dans l'énoncé et la traduction.

C'est encore ainsi par exemple, qu'un cercle serait mesuré par le carré de son rayon, si on prenait un cercle particulier pour unité de surface et son rayon pour unité de longueur. En effet, en désignant ces deux cercles par C, c, et leurs rayons par R et r, on aurait

$$\frac{C}{c} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{R^2}{r^2} = \frac{R}{r} \cdot \frac{R}{r} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \quad \text{d'où} \quad C = R^2,$$

en supposant $c = 1$, $r = 1$. Cette équation serait évidemment fausse, si on l'énonçait ainsi : « Un cercle est égal au carré de son rayon. » Puisque son aire est $> 3R^2$ et $< 4R^2$. On devrait dire : « Un cercle a pour mesure, le carré de son rayon, » ou plus exactement : « Le rapport d'un cercle à un autre, égale le carré du rapport du premier rayon au second, comme l'indique $\frac{C}{c} = \left(\frac{R}{r}\right)^2$. »

Par la même raison une sphère aurait pour mesure le cube de son rayon ; ce qui voudrait dire que le rapport d'une sphère à une autre, égale le cube du rapport des deux rayons.

Si on voulait évaluer un cylindre droit en prenant pour unité de volume un cylindre, sa base pour unité de surface, et sa hauteur pour unité de longueur, on aurait la même formule

$$\frac{\text{Cyl}}{\text{cyl}} = \frac{BH}{bh} = \frac{B}{b} \cdot \frac{H}{h} \quad \text{ou} \quad \text{Cyl} = BH.$$

en supposant cyl $= 1$, $b = 1$, $h = 1$. Mais il faudrait que B fût évalué en b, et H en h.

La géométrie est remplie de ces mesures abrégées, dont le véritable sens est facile à rétablir quand on remonte à leur origine.

THÉORÈME SUR LES TRANSVERSALES.

PAR M. V. DELACOUR,
Élève au Collège royal Bourbon.

Par un point P (fig. 86), *on mène des droites* PA, PA′, PA″... *qui coupent en* A, A′, A″,... B, B′, B″,... *les côtés d'un angle* AOB. *Si par le point* O, *on fait passer une droite* OL *quelconque, et dans l'espace même, qu'on prenne* OC=OB, OC′ = OB′, OC″ = OB″, etc. : *les lignes* AC, A′C′, A″C″,... *passeront toutes au même point* I.

Je suppose qu'on ait mené seulement deux sécantes PA, PA′, et que le point I ait été déterminé par l'intersection de AC, A′C′; si l'on considère une troisième sécante PA″, et qu'on fasse les constructions indiquées, les trois points A″,C″,I, seront en ligne droite.

Car le triangle AOB étant coupé par les deux transversales PA′, PA″ elles déterminent chacune sur ses côtés, six segments qui sont tels que le produit de trois d'entre eux, non consécutifs, est égal au produit des trois autres. C'est-à-dire que

$$(1) \qquad OA'.AP.BB' = AA'.BP.OB',$$

$$(2) \qquad OA''.AP.BB'' = AA''.BP.OB''.$$

La division membre par membre de ces deux équations, donne

$$\frac{OA'.BB'}{OA''.BB''} = \frac{AA'.OB'}{AA''.OB''},$$

et puisque $BB' = CC'$, $BB'' = CC''$, $OB' = OC'$, $OB'' = OC''$, la relation précédente conduit à celle-ci :

$$\frac{OA'.CC'}{OA''.CC''} = \frac{AA'.OC'}{AA''.OC''} \quad \text{ou bien} \quad \frac{OA'.CC'}{AA'.OC'} = \frac{OA''.CC''}{AA''.OC''}.$$

Que l'on multiplie maintenant chaque membre par le rapport $\frac{AI}{IC}$, et on aura

$$(3) \qquad \frac{OA'.AI.CC'}{AA'.IC.OC'} = \frac{OA''.AI.CC''}{AA''.IC.OC''}.$$

Mais dans le plan conduit par OA et OL, le triangle OAC étant coupé par la transversale IA', on a l'égalité

$$(4) \qquad OA'.AI.CC' = AA'.IC.OC',$$

qui, combinée avec la précédente, montre que

$$OA''.AI.CC'' = AA''.IC.OC'',$$

équation qui exprime que les trois points A'',C'',I sont tellement placés sur les côtés du triangle OAC, que le produit de trois distances (non consécutives) aux sommets est égal au produit des trois autres, donc ces trois points sont en ligne droite; donc A''C'' doit passer en I, et le théorème est démontré.

Remarque. La direction de OL étant arbitraire, on pourra lui donner une multitude de positions différentes, et tous les points I qui correspondent à ces droites, engendreront un lieu géométrique que je vais déterminer.

Je divise membre par membre les équations (1), (4), après avoir eu soin de remplacer dans cette dernière CC', par BB', et OC' par OB'. Il vient alors

$$\frac{AP}{AI} = \frac{BP}{CI}.$$

Donc PI est parallèle à BC. Il est aisé de reconnaître qu'en menant PQ parallèle à OB, les triangles PQI, BOC seront semblables. Car en considérant à la fois les égalités

$$\frac{AP}{BP}=\frac{AI}{CI}, \quad \frac{AP}{BP}=\frac{AQ}{OQ},$$

on a $\frac{AI}{CI}=\frac{AQ}{OQ}$, d'où résulte le parallélisme de OC et QI. Ainsi, ces deux triangles ont les côtés parallèles, ce qui établit leur similitude; et puisque $OB=OC$, les côtés homologues de PIQ sont égaux : $QI=QP$. Partant, les points I sont tous sur une sphère ayant son centre en Q, et pour rayon QP, puisque QI est une grandeur constante.

SOLUTION D'UN PROBLÈME D'ARITHMÉTIQUE.

PAR M. LIONNET,
Professeur au Collége royal Louis-le-Grand.

Étant donné un carré divisé en neuf carrés égaux entre eux, écrire aux centres de ces carrés, les neuf premiers nombres, de manière que la somme de trois chiffres quelconques, situés en ligne droite, soit constante.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Supposons le problème résolu, et appelons a, b, c, d, e, f, g, h, i, les chiffres écrits dans les différentes cases du carré donné.

1° La somme 45 de tous ces chiffres se compose des trois sommes égales $a+b+c$, $d+e+f$, $g+h+i$, de trois chiffres situés en ligne droite ; donc chacune de ces sommes partielles est égale au tiers de 45 ou au nombre 15, et il en est de même des cinq autres sommes $a+d+g$, $b+e+h$, $c+f+i$, $a+e+i$, $c+e+g$.

2° La somme 15×4, ou 60, des quatre nombres $a+d+g$, $g+h+i$, $i+f+c$, $c+b+a$ se compose de $(a+i) \times 2+(g+c) \times 2+(d+f)+(b+h)$; or $a+i=g+c=d+f=b+h$, puisque chacun de ces nombres ajouté au chiffre e du milieu reproduit le nombre 15; donc $60=(a+i) \times 6$ et, par suite, $a+i=\frac{60}{6}=10$; donc $e=15-10=5$.

3° La somme 15×2 des deux nombres $a+d+g$, $g+h+i$ est un nombre pair; d'ailleurs cette somme se compose du nombre pair $a+i$ ou 10, du nombre pair $g \times 2$ et du nombre $d+h$; donc $d+h$ est aussi un nombre pair: on prouverait de même que $h+f$, $f+b$, $b+d$ sont des nombres pairs, ce qui exige que les chiffres b, d, h, f soient tous pairs ou tous impairs et, par suite, que les chiffres restants a, g, i, c soient tous impairs ou tous pairs: donc $a+g$ est un nombre pair et, en le retranchant de la somme $a+d+g$ qui est égale à 15, on obtient pour d un nombre impair; donc enfin d, h, f, b sont des nombres impairs, et a, g, i, c des nombres pairs.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4° Cela étant, pour achever la solution du problème substituons à la lettre a un des quatre chiffres 2, 4, 6, 8, le chiffre 2 par exemple; il en résultera $i=15-(a+e)=15-7=8$. Faisons ensuite $c=4$ et, par conséquent, $g=6$, nous en déduirons $d=15-(a+g)=15-8=7$, $h=15-(g+i)=15-14=1$, $f=15-(c+i)=15-12=3$ et, par suite, $b=9$.

Remarque. La lettre a étant susceptible des quatre valeurs 2, 4, 6, 8 pour chacune desquelles la lettre c a deux valeurs, on voit que le problème admet huit solutions.

QUESTIONS D'EXAMEN.

LIEUX GÉOMÉTRIQUES DANS LA PARABOLE,

PAR M. MIDY,
Ancien professeur dans les Colléges royaux.

Première question. Trouver le lieu des foyers et celui des sommets de toutes les paraboles qui ont même directrice et une tangente commune. (V. t. I, p. 321, quest. 19.)

Première solution. Soient F (*fig.* 87) le foyer et S le sommet d'une des paraboles; OG la directrice et AT la tangente données. Prenons la première de ces droites pour axe des y, et pour axe des x la perpendiculaire à cette droite au point A, où elle est coupée par la tangente commune.

Cela posé, si M est le point de contact de la parabole avec AT, en menant MG parallèle à AX, les triangles MAG, MAF seront égaux, et GF sera perpendiculaire sur AM. C'est sur ces propriétés que repose la solution de la question.

Soit

$$y=\frac{1}{m}x \quad \ldots \quad (1)$$

l'équation de AT, et désignons AG par β · l'équation de la perpendiculaire GF sera

$$y-\beta=-mx \quad \ldots\ldots \quad (2);$$

la circonférence décrite du centre A et du rayon AG aura pour équation

$$y^2+x^2=\beta^2 \quad \ldots\ldots \quad (3);$$

éliminant β entre (2) et (3), il viendra

$$y^2+x^2=(y+mx)^2,$$

qui équivaut à

$$x\,[(1-m^2)\,x-2my\,]=0.$$

Le facteur $x=0$ donne l'axe des y, sur lequel la droite et la circonférence se coupent toujours.

L'autre facteur

$$(1-m^2)\,x-2my=0 \qquad (5)$$

donne le lieu cherché : c'est une droite qui passe par le point A.

Or l'abscisse du sommet est moitié de celle du foyer, et son ordonnée est la même. Il suffira donc de changer dans (5) x en $2x$ pour avoir le lieu des sommets. Par là, l'équation (5) devient

$$(1-m^2)\,x-2my=0.\;.\;.\;.\qquad (6).$$

C'est une seconde droite qui passe encore par le point A.

La géométrie conduit immédiatement à la même conséquence; car, pour toutes les paraboles considérées, le point A et l'angle MAG sont invariables, d'après l'hypothèse. Donc l'angle MAF l'est aussi; donc tous les points F cherchés sont en ligne droite avec le point A, et puisqu'on a toujours $\mathrm{OS}=\frac{1}{2}\mathrm{OF}$, il est de même pour les points S.

ANALYSE DE L'ARITHMÉTIQUE

DE M. DUMOUCHEL.

(Fin. — Voyez pour le commencement, page 412.)

—

Les définitions dont nous avons parlé, et quelques-autres sur lesquelles il n'y a rien à dire, composent avec la *numération* le premier chapitre de l'ouvrage. La formation des nombres, leur nomenclature, les règles pour les écrire en chiffres, et les énoncer, ont été données avec beaucoup de détails. En écrivant plus de dix pages sur ce sujet, l'auteur n'a pas, un seul instant, oublié que ses lecteurs étaient censés n'avoir aucune notion de ce qu'il voulait leur apprendre : je trouve, en cela, un mérite qui n'est pas commun. Dans un traité moins élémentaire, peut-être eût-il été convenable de donner de la numération, un aperçu plus élevé ? — A la manière dont on en parle dans quelques livres, il semblerait qu'elle consiste uniquement dans une indication plus ou moins détaillée des règles qui sont aujourd'hui suivies pour écrire les nombres et pour les énoncer. Présenter la numération sous un point de vue aussi restreint, c'est attacher trop peu d'importance à la perfection des langues; c'est trop peu tenir compte de l'influence que l'emploi des signes peut exercer sur le développement des idées (*).

Le second chapitre de l'ouvrage de M. Dumouchel, traite des *quatre opérations sur les nombres entiers. On y trouve* d'abord l'explication des signes employés dans le calcul, et les définitions de ces trois mots : *Axiome, Théorème, Problème.* La définition de l'*addition* vient ensuite. Puis, ces deux axiomes : « On peut ajouter ensemble des grandeurs de même » espèce. — On ne peut ajouter ensemble que des grandeurs » de même espèce. » Après cela, l'auteur explique, en peu de mots, la règle générale de l'addition, et sans parler d'axiome ni de théorème : ce qui me semble bien.

Les exemples de problèmes qui conduisent à faire des additions, seront pour les commençants d'une utilité réelle.

Le même ordre n'a pas été strictement observé dans la *soustraction.* La définition de la règle est immédiatement

(*) Les écrits de MM. *Gergonne* et *Alex. Humbolt* contiennent, au sujet de la numération, des observations très-judicieuses. (Voy. *Annales de mathématiques de Montpellier*, tome XXI, et le *Journal de Crelle*, tome IV.)

suivie de quelques problèmes dont les solutions dépendent de cette opération même. Et viennent les deux axiomes : « On ne peut retrancher l'une de l'autre que des quantités » de même espèce.—On peut retrancher l'une de l'autre des » quantités de même espèce. » Le premier de ces axiomes est au moins inutile, d'après ce qu'on a déjà admis pour l'addition, car s'il était possible de soustraire l'une de l'autre des quantités d'espèces différentes, on pourrait de même les additionner.

Quant à la *multiplication*, elle est d'abord définie, une opération qui a pour but de répéter un nombre, etc. ; mais, en note, on ajoute aussitôt : « Cette définition n'est que le » résultat d'une définition plus générale de la multiplication, » *définition applicable à tous les cas*, et qui est celle-ci :... » Je ferai de nouveau observer ici que s'il s'agit de comprendre en un seul énoncé tous les résultats auxquels on a donné le nom de *produit*, cette dernière définition n'est pas encore la définition générale, car elle ne s'applique pas, sans modifications du moins, au cas des quantités incommensurables ni à celui des expressions imaginaires. Rien n'empêche assurément, en considérant des nombres fractionnaires, de nommer produit le résultat obtenu au moyen d'une division et d'une multiplication ; mais au lieu de vouloir présenter le résultat de cette double opération, comme l'objet définitif, comme le but général de la multiplication des nombres, il serait mieux d'indiquer le motif qui lui a fait conserver le nom de produit.

Au reste, l'auteur explique d'une manière très-simple la règle à suivre pour multiplier les nombres, et sans trop se préoccuper de la plus grande généralité des définitions.

On sait déjà que le raisonnement complet de la *division* des nombres entiers n'a pas été donné dans cet ouvrage. On y trouve seulement une indication précise des calculs à effectuer pour obtenir les quotients cherchés. Plusieurs remarques ont été rassemblées dans un article qui a pour titre : « Développements relatifs à la division des nombres entiers. » Ces remarques me semblent généralement utiles, à l'exception, toutefois, de celle ci : « Il sera toujours facile de » reconnaître dans un problème, si le facteur cherché était » multiplicande ou multiplicateur dans l'opération qui a » donné le produit, etc. »

La première partie du troisième chapitre a été réservée à la numération et au calcul des nombres décimaux. La plupart des principes de cette théorie sont présentés avec beaucoup d'ordre et de clarté. Cependant, je dois encore ici mentionner une exception, car il m'a été difficile de suivre l'auteur dans la direction qu'il a prise, à la première page du chapitre, pour parvenir à l'origine des fractions décimales. Voici comment il entre en matière : « Dans l'évaluation » des grandeurs, on prend souvent pour terme de comparaison, ou pour unité, une grandeur plus grande que celle » que l'on veut mesurer. Ainsi, que l'on veuille mesurer la » largeur d'un livre, si on prend le mètre pour unité, il est » évident que la largeur du livre donné étant plus petite que » le mètre, il va falloir chercher quelque moyen d'exprimer » en nombre cette largeur.

» Voici comment on s'y est pris.

» On a supposé l'unité divisée en dix parties égales nommées *dixièmes*.... »

Et pourquoi partagerait-on l'unité en dix parties égales, plutôt qu'en tout autre nombre de parties, dans le seul but d'exprimer en nombres des rapports moindres que l'unité ? Si, par exemple, la largeur du livre à mesurer, était précisément égale à la douzième partie du mètre qui sert d'unité : en divisant l'unité en parties décimales, pour parvenir à l'expression numérique de la grandeur considérée, on s'y serait mal pris.

Dans la dernière section de ce chapitre, le système légal des poids et mesures a été exposé en détail et commenté avec soin.

Le chapitre 4 contient le calcul des fractions ordinaires. On y donne, sans démonstration, le moyen de trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres, par des divisions successives. Cette méthode due à *Euclide*, est des plus remarquables ; elle a, seule, constitué une des plus importantes théories de la science du calcul ; le raisonnement qui sert à l'établir est d'ailleurs assez simple pour n'embarrasser personne, il devrait se trouver dans tous les traités d'Arithmétique.

Le chapitre 5 est entièrement rempli par des applications numériques. L'auteur en a fait une analyse suffisante, en disant dans la préface de son ouvrage : « J'ai résolu, *avec le* » *seul secours du raisonnement*, toutes les questions de cal- » cul connues sous le nom de règles de trois, règles d'inté- » rêt, d'escompte, de société, etc. » Cette phrase que j'ai déjà trouvée ailleurs, signifie, je crois, qu'on a résolu les questions dont il s'agit, à l'aide d'un calcul dans lequel aucune proportion n'est écrite. Cela peut être bien ; mais il faudrait au moins s'exprimer de manière à ne pas faire présumer que l'emploi des proportions exclut tout à fait le raisonnement, car il est possible de les employer, très-raisonnablement. Je ne vois aucun motif réel pour être exclusif à cet égard. S'il est des cas où l'on fait bien de se passer des proportions, il y en a d'autres où l'on ferait mieux de s'en servir ; et quant aux raisonnements, le meilleur est encore celui qui conduit le plus simplement possible au résultat cherché.

G.

ANNONCES.

Éléments d'arithmétique et d'algèbre, à l'usage des écoles royales de navigation, par M. *C. F. Fournier*, examinateur de la marine. 2 vol. in-8°. Nantes, 1842. Se trouvent à Paris, chez Robiquet, libraire, quai des Augustins.

On rendra prochainement compte de cet ouvrage.

PROBLÈMES.

65. 1° On fait tourner l'angle θ de manière que ses côtés soient toujours tangents à une section conique; quel est le lieu décrit par un point quelconque du plan de l'angle? 2° On fait tourner une section conique de sorte qu'elle touche constamment les deux côtés d'un angle θ; quel est le lieu décrit par un point de la courbe?

Indiquer une équation qui puisse résoudre à la fois les deux questions; faire des applications à des cas particuliers.

(*Le Besgue.*)

66. On a : $$4a_1a_2 = (a_1 + a_2)^2 - (a_1 - a_2)^2;$$
$$24a_1a_2a_3 = (a_1 + a_2 + a_3)^3 - (a_1 + a_2 - a_3)^3 - (a_1 + a_3 - a_2)^3 - (a_2 + a_3 - a_1)^3.$$

Trouver la loi de décomposition analogue pour un produit de n facteurs?

67. On trouve dans l'*Analyse des infiniment petits*, du *marquis de l'Hospital*, la question suivante : « Un voyageur » partant du lieu C pour aller au lieu F, doit traverser deux » campagnes séparées par la ligne droite AEB; on suppose

» qu'il parcourt dans la campagne du côté C l'espace a, dans » le temps c, et dans l'autre, du côté de F, l'espace b, dans » le même temps c. On demande par quel point E de la » droite AEB il doit passer, afin qu'il emploie le moins de » temps qu'il est possible pour parvenir de C en F. » L'auteur, prenant pour inconnue la distance du point E au pied de la perpendiculaire menée du point C sur la droite AB, a seulement donné l'équation du problème, qui est du quatrième degré. On propose de déterminer le nombre des solutions et de discuter complétement le problème.

RECTIFICATION.

Page 385, ligne 9, *lisez* : il se borna au cas où le plan coupant est perpendiculaire *au plan du triangle par l'axe*, c'est-à-dire au plan mené par le sommet perpendiculairement au plan de la base et passant par le centre de cette base.

DES EXAMINATEURS

Pour l'admission à l'école de Saint-Cyr, 1843.

On nous communique les observations suivantes.

« Le pouvoir confié à deux juges non responsables, de prononcer sans appel sur le sort, sur l'avenir d'une partie notable et d'élite de la jeunesse française, constitue sans doute une magistrature puissante, une juridiction redoutable. Cependant, et cela est digne de remarque, quoique l'esprit ombrageux du siècle réclame pour les intérêts les plus minimes un luxe de garanties de toute espèce, aucune défiance ne s'est encore publiquement manifestée au sujet de ces opérations annuelles qui anéantissent souvent le but de tant de sacrifices, et viennent détruire l'espoir d'un grand nombre de familles.

» Cette sécurité insolite a sans doute sa source dans la confiance qu'inspire le personnel des examinateurs, hommes probes, éclairés, professeurs expérimentés. Il est à craindre qu'il n'en soit pas toujours ainsi, et déjà l'année 1843 présente pour les examens à Saint-Cyr deux tristes exceptions : l'une d'elles a déjà été signalée dans l'avant-dernier numéro des *Annales;* l'autre est relative à l'extrême faiblesse de l'instruction mathématique de l'un des professeurs chargés des examens, à Paris. Pour en parler, nous avons attendu la fin des examens, ne voulant pas augmenter les embarras de cet examinateur, homme de bonne réputation et, dit-on, d'une piété distinguée ; ces qualités, louables partout, précieuses dans un juge, sont malheureusement insuffisantes dans un examinateur. Une condition essentielle, à laquelle rien ne peut suppléer, c'est d'être au courant des matières de l'examen ; de parler et de comprendre la langue des candidats, de leur être supérieur en connaissances, ou, du moins, de ne jamais se montrer inférieur à ceux qu'on refuse d'admettre. Cette condition a-t-elle été remplie par l'examinateur dont nous parlons? — Toutes les personnes capables d'en juger, et qui ont assisté à ses examens, savent à quoi s'en tenir : il n'y a dans tout Paris qu'une voix à cet égard.

» Le désir de devenir *examinateur* a pu égarer ce professeur sur son mérite scientifique, mais ce serait lui rendre à lui-même un fort mauvais service et agir contre les intérêts du public, que de l'entretenir dans son illusion. La mission d'un examinateur est grave, et elle exige une vocation spéciale, sans laquelle on ne doit pas en accepter la responsabilité. »

SUR LES INTÉRÊTS COMPOSÉS INSTANTANÉS,

PAR M. FERRIOT,
Recteur honoraire de l'académie de Grenoble.

—

La proposition qu'on va voir a déjà paru, sans nom d'auteur, dans une des nombreuses éditions de l'Algèbre de M. le baron Reynaud. En la reproduisant aujourd'hui, je n'ai d'autre intention que de la répandre davantage.

Que devient la somme a prêtée à intérêts composés à r pour franc dans l'unité de temps, quand on suppose que l'intérêt se renouvelle à chaque instant.

Pour cela, remarquons que l'intérêt étant r dans l'unité de temps, sera $\frac{r}{2}$ dans la moitié de l'unité de temps ; $\frac{r}{3}$ dans le tiers de l'unité de temps, et par conséquent, $\frac{r}{u}$ dans la $u^{\text{ème}}$ partie de l'unité de temps : or, d'après la formule des intérêts composés, on a

$$A = a\left(1 + \frac{r}{u}\right)^u,$$

ce qui donne

$$A = a\left(1 + \frac{u.r}{1.u} + \frac{u(u-1)}{1.2}.\frac{r^2}{u^2} + \frac{u(u-1)(u-2)}{1.2.3}.\frac{r^3}{u^3} + \text{etc.}.\right)$$

$$= a\left(1 + \frac{r}{1} + \frac{\left(1-\frac{1}{u}\right)}{1.2}.\,r^2 + \frac{\left(1-\frac{1}{u}\right)\left(1-\frac{2}{u}\right)}{1.2.3}.\,r^3 + \text{etc}...\right)$$

Si actuellement on fait u infiniment grand, afin d'avoir l'intérêt relatif à un instant indivisible, on aura

$$A = a\left(1 + \frac{r}{1} + \frac{r^2}{1.2} + \frac{r^3}{1.2.3} + \ldots\right) = a.c^r.$$

Si on fait $r = 1$, c'est-à-dire, si on prête au franc pour franc, on a $A = a.e$, et par conséquent, après p années, $A = a \times e^p$.

Dans le cas général, la formule est

$$A = a.e^{pr}.$$

Nota. La même solution s'applique à ce problème : un vase contient a mètres cubes d'eau ; à chaque instant il y tombe une goutte dont la grosseur est proportionnelle au volume d'eau ; quel est le volume au bout de u unités de temps ; sachant d'ailleurs que la première goutte, renouvelée instantanément pendant l'unité de temps, aurait produit un accroissement r? C'est aussi une question de population traitée par Bernoulli (D.), et dont nous entretiendrons nos lecteurs. Tm.

QUESTIONS D'EXAMEN.

(Suite, v. 449.)

PAR M. MIDY,
Professeur de mathématiques.

Deuxième question. Trouver le lieu des foyers et des sommets de toutes les hyperboles qui ont même directrice et une asymptote commune.

Première solution. Soit YAY′ l'asymptote donnée, axe des y ; DAD′ la directrice donnée ; A l'origine ; XAX′ l'axe des x perpendiculaire à l'asymptote ; on aura $(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = (qy+px)^2$ (1). Équation de la courbe ; $qy+px=0$ (2). — Équation de la directrice.

Pour exprimer que l'axe des y est une asymptote, nous ferons dans (1) $x=0$, il viendra alors

$$(y-\beta)^2 - (qy)^2 + \alpha^2 = 0,$$

et nous écrirons que les deux racines de cette équation sont infinies. Ce qui donne les deux conditions

$$q=1, \quad \beta=0,$$

qui réduisent les deux équations (1) et (2) aux suivantes :

$$(x-\alpha)^2-p^2x^2-2pxy=0\,, \qquad (3)$$

$$px+y=0. \qquad (4)$$

De la condition

$$\beta=0\,,$$

il faut déja conclure que tous les foyers sont sur l'axe des x et qu'ils sont par conséquent en ligne droite avec le point de concours des deux droites données. L'un des lieux est donc déjà trouvé.

L'autre, celui des sommets, sera donné par l'intersection des courbes (3) avec la perpendiculaire menée du foyer sur la directrice.

Or, cette perpendiculaire a pour équation

$$y=\frac{1}{p}(x-\alpha)\,;$$

d'où l'on tire

$$x-\alpha=py.$$

Substituant cette valeur dans (3), il vient

$$y^2-\frac{2x}{p}y-x^2=0\,, \qquad (5)$$

pour l'équation du lieu.

Cette équation résolue donne

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{p^2+1}}{-p}\,x\,, \qquad (6)$$

équation d'une double droite passant par l'origine sur laquelle se trouvent les sommets. La première divise en deux parties égales l'angle DAF que fait la directrice avec AF, et l'autre, qui lui est perpendiculaire, divise aussi en deux parties égales l'angle FAD′, supplémentaire du premier.

C'est sur cette seconde droite que se trouve le second sommet S′ correspondant au second foyer.

Deuxième solution. En s'appuyant sur une des propriétés géométriques de la directrice, on sera conduit plus promptement et plus simplement encore aux mêmes résultats.

Soit, en effet, une hyperbole GSH (*fig.* 94), dont nous désignerons le demi-axe transverse par a et l'excentricité par c.

On sait que la directrice est la polaire du foyer. En nommant d la distance de cette droite au centre, on aura donc

$$dc = a^2.$$

Or, si du foyer F on abaisse la perpendiculaire FA sur l'asymptote UCU'; puis du point A, la perpendiculaire AD sur AF, le triangle rectangle CAF, dans lequel $CA = a$, donnera

$$CD \times CF = CA^2\ ;$$

d'où il suit que AD est la directrice.

Donc, puisque pour toutes les hyperboles considérées, les deux droites AD, AU sont invariables, la perpendiculaire AF sur la seconde l'est aussi, et l'une des deux propriétés se trouve ainsi démontrée.

Or, $CA = CS$. Donc, menant AX parallèle à SS', les angles SAX, SAC sont égaux, et, à cause de $CA = CS'$, les angles S'AX', S'AC le sont aussi. Mais puisque l'angle DAU est invariable, les angles CAX, CAX' le sont aussi, et la direction des droites rectangulaires AS, AS' est constante. Donc la seconde propriété se trouve démontrée.

D'ailleurs, cette seconde solution s'accorde avec la solution analytique trouvée.

Car, de l'égalité des angles SAX, SAC, il faut conclure celle des angles SAU, SAX', et, à cause des angles droits FAU, DAX', celle des angles SAF, SAD, et, par suite, celle des angles FAK, FAY'.

Il est facile d'expliquer, par de simples considérations géométriques, pourquoi, dans les deux questions que nous venons de traiter, les lieux cherchés sont des droites passant par le point de concours des droites données. Car, dans la première, les paraboles sont, par leur nature, des courbes semblables; et puisqu'elles ont la même directrice, leurs axes sont parallèles. Dans la seconde question, toutes les hyperboles ont leurs axes transverses perpendiculaires à la directrice commune, et par conséquent parallèles. D'ailleurs, puisqu'elles ont une asymptote commune, l'angle des asymptotes est constant, et, par suite, le rapport des axes l'est aussi. Donc, dans les deux cas, les courbes considérées sont semblables et parallèles, et les droites données en sont des lignes homologues. Donc, le point de concours de ces droites est le centre d'homologie commun à toutes ces courbes, et par conséquent tous les points homologues sont en ligne droite avec lui.

Il n'en serait pas de même si l'on cherchait le lieu des foyers ou des sommets de toutes les ellipses qui ont même directrice et une tangente commune, parce que ces données seraient insuffisantes pour déterminer la similitude de toutes ces courbes*. Mais si l'on y ajoutait cette dernière condition, les mêmes conséquences se reproduiraient encore.

Soit, en effet, SBS'B' (*fig.* 95) une des ellipses considérées. Supposons-la rapportée à ses axes. Son équation sera

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2. \qquad (1)$$

Soit LL' la directrice, et TM' une tangente à la courbe. x' et y' désignant les coordonnées du point M de contact, l'équation de cette tangente sera

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2. \qquad (2)$$

En nommant m la tangente de l'inclinaison de cette droite sur l'axe des x, l'on aura

$$m = -\frac{b^2x'}{a^2y'}. \qquad (3)$$

D'ailleurs, puisque le point (x', y') est sur la courbe

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2. \qquad (4)$$

Le point D, où la directrice coupe l'axe, en nommant d

---

* Dans l'ellipse, comme dans l'hyperbole, il suffit, pour la similitude, de connaître la directrice et la position d'un des diamètres conjugués égaux. Tm.

sa distance au centre, sera déterminée par la relation connue

$$cd = a^2,$$

c désignant l'excentricité. Nommons β l'ordonnée du point A où la tangente rencontre la directrice. En substituant ses coordonnées

$$x = -\frac{a^2}{c} \quad \text{et} \quad y = \beta,$$

dans l'équation (2), celle-ci devient

$$a^2\beta y' - b^2 x' \frac{a^2}{c} = a^2 b^2.$$

On en tire

$$\beta = \frac{b^2(c + x')}{cy'}. \qquad (5)$$

Toutes les ellipses devant être semblables, le rapport $\frac{b}{a}$ doit être constant. En le nommant p, l'on aura

$$b = ap.$$

Par suite,

$$c^2 = a^2 - b^2 = a^2(1 - p^2);$$

d'où

$$c = a\sqrt{1 - p^2} \quad \text{et} \quad d = \frac{a}{\sqrt{1 - p^2}};$$

puis

$$\beta = \frac{a^2p^2(c + x')}{cy'} \quad \text{et} \quad m = -\frac{p^2 x'}{y'}.$$

Combinant cette dernière relation avec (4), on en tire

$$x' = -\frac{am}{\sqrt{p^2 + m^2}}, \quad y' = \frac{ap^2}{\sqrt{p^2 + m^2}}.$$

Mettant ces valeurs ainsi que celle de c dans β, l'on a

$$\beta = \frac{a(\sqrt{p^2 + m^2}\sqrt{1 - p^2} - m)}{\sqrt{1 - p^2}}.$$

C'est l'ordonnée du point A qui doit varier avec a, c'est-à-dire lorsqu'on fera varier l'ellipse que l'on a considérée.

D'ailleurs,

$$DS = d - a = \frac{a(1 - \sqrt{1 - p^2})}{\sqrt{1 - p^2}}.$$

Supposons maintenant que l'on ait transporté l'origine en A, et que l'on prenne la droite LL' et la perpendiculaire AX sur cette droite pour axes nouveaux des y et des x, les coordonnées du point S relatives à ces nouveaux axes seront

$$y = -\frac{a(\sqrt{p^2 + m^2}\ \sqrt{1 - p^2} - m)}{\sqrt{1 - p^2}},\ x = \frac{a(1 - \sqrt{1 - p^2})}{\sqrt{1 - p^2}}.$$

Éliminant a, il vient

$$y = -\frac{\sqrt{p^2 + m^2}\ \sqrt{1 - p^2} - m}{1 - \sqrt{1 - p^2}}\ x$$

pour le lieu des sommets S. L'on aurait de même

$$y = -\frac{\sqrt{p + m^2}\sqrt{1 - p^2} - m}{1 + \sqrt{1 - p^2}}\ x$$

pour celui des sommets S'.

L'ordonnée du point F, ou du point F' est la même que celle du point S. Quant à l'abscisse, l'on a

$$DF = d - c = \frac{a}{\sqrt{1 - p^2}} - a\sqrt{1 - p^2} = \frac{ap^2}{\sqrt{1 - p^2}}$$

et $$DF' = d + c = \frac{a(2 - p^2)}{\sqrt{1 - p^2}}.$$

Les lieux des points F et F' seront donc les droites ayant pour équations

$$y = -\frac{\sqrt{p^2 + m^2}\ \sqrt{1 - p^2} - m}{p^2}\ x$$

et $$y = -\frac{\sqrt{p^2 + m^2}\ \sqrt{1 - p^2} - m}{2 - p^2}\ x.$$

Ainsi les lieux cherchés sont encore des lignes droites.
Ce qu'il fallait démontrer.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 72 (page 327, t. II).

PAR P. A. G. COLOMBIER.
Régent de mathématiques à Béziers.

Théorème. A et B sont deux nombres entiers et positifs ayant plus de la moitié des chiffres à gauche en commun ; et $A > B$. On a toujours

$$A^{\frac{1}{p}} - B^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{p};$$

p étant un nombre entier positif.

Démonstration. Il résulte de cet énoncé que A et B ont nécessairement le même nombre de chiffres, et que le nombre des chiffres a droite non communs est le même dans les deux nombres. Désignons-le par k. Appelons α le nombre formé sur la gauche dans A et B par les chiffres communs considérés dans leur valeur relative ; et a', b' les nombres formés sur la droite dans A et B pour les chiffres non communs, considérés dans leur valeur relative. On a

$$a' > b', \quad \text{et} \quad A = \alpha + a', \quad B = \alpha + b'.$$

Élevons à la puissance $\frac{1}{p}$ la valeur de A ; il vient

$$A^{\frac{1}{p}} = \alpha^{\frac{1}{p}} + \frac{a'}{p\alpha^{1-\frac{1}{p}}} - \frac{(p-1)\,a'^2}{1.2.p^2\alpha^{2-\frac{1}{p}}} + \frac{(p-1)\,(2p-1)\,a'^3}{1.2.3.p^3\alpha^{3-\frac{1}{p}}} - \ldots,$$

$$\pm \frac{(p-1)\,(2p-1)\,(3p-1)\,\ldots\ldots\,(\overline{r-1}\,p-1)\,a'^r}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\ldots\,r\,.\,p^r\,\alpha^{r-\frac{1}{p}}} \mp \ldots$$

On prend les signes supérieurs ou les signes inférieurs, suivant que r est impair ou pair.

Le développement de $B^{\frac{1}{p}}$ s'obtiendra en changeant dans celui de $A^{\frac{1}{p}}$, a' en b'. Il vient :

$$B^{\frac{1}{p}} = \alpha^{\frac{1}{p}} + \frac{b'}{p\alpha^{1-\frac{1}{p}}} - \frac{(p-1)\,b'^2}{1.2.p^2\alpha^{2-\frac{1}{p}}} + \frac{(p-1)(2p-1)\,b'^3}{1.2.3p^3\alpha^{3-\frac{1}{p}}} - \ldots\ldots$$

$$\pm \frac{(p-1)(2p-1)(3p-1)\ \ldots\ldots\ (\overline{r-1}\,p-1)\,b'^r}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ \ldots\ldots\ r\ .\ p^r\,\alpha^{r-\frac{1}{p}}} \mp \ldots\ldots$$

d'où

$$A^{\frac{1}{p}} - B^{\frac{1}{p}} = \frac{a'-b'}{p\alpha^{1-\frac{1}{p}}} - \frac{(p-1)\,(a'^2-b'^2)}{1.2.p^2\alpha^{2-\frac{1}{p}}} + \frac{(p-1)(2p-1)(a'^3-b'^3)}{1.2.3.p^3\alpha^{3-\frac{1}{p}}} - \ldots$$

$$\pm \frac{(p-1)\,(2p-1)\,(3p-1)\ \ldots\ldots\ (\overline{r-1}\,p-1)\,(a'^r-b'^r)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ \ldots\ldots\ r\ .\ p^r\,\alpha^{r-\frac{1}{p}}} \mp \ldots\ldots$$

ou bien,

$$p\left[A^{\frac{1}{p}} - B^{\frac{1}{p}}\right] = \frac{a'-b'}{\alpha^{1-\frac{1}{p}}}\left\{1 - \frac{(p-1)\,\overline{\dfrac{a'^2-b'^2}{a'-b'}}}{1.2.p.\alpha} + \frac{(p-1)(2p-1)\,\overline{\dfrac{a'^3-b'^3}{a'-b'}}}{1.2.3.p^2\alpha^2} - \ldots\right.$$

$$\left.\pm \frac{(p-1)\,(2p-1)(3p-1)\ldots\ldots(\overline{r-1}\,p-1)\,\overline{\dfrac{a'^r-b'^r}{a'-b'}}}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ \ldots\ldots\ r.p^{r-1}\alpha^{r-1}} \mp \ldots\right\}$$

La différence $a'-b'$ a au plus k chiffres. $\alpha^{1-\frac{1}{p}}$ sera le plus petit possible, et il en sera de même de $1-\dfrac{1}{p}$, c'est-à-dire, lorsqu'on aura $p=2$. Dès lors $\alpha^{1-\frac{1}{p}} = \sqrt{\alpha}$. Le nombre de chiffres de α étant $2k+1$, il s'ensuit que $\sqrt{\alpha}$ a $k+1$ chiffres. Ainsi, dans le cas le plus défavorable,

$$\frac{a'-b'}{\alpha^{1-\frac{1}{p}}} < 1.$$

Dans la série entre la parenthèse, un terme se forme sur le précédent, en multipliant ce dernier par

$$\frac{(rp-1)\dfrac{a'^{r-1}-b'^{r-1}}{a'-b'}}{(r-1)p\,.\,\alpha\dfrac{a'^r-b'^r}{a'-b'}}.$$

Il sera démontré que les termes de la série vont en décroissant, si nous démontrons que ce multiplicateur est moindre que l'unité; et comme $\dfrac{rp-1}{(r+1)p}$ est moindre que l'unité, il suffira de prouver que

$$\frac{a'^{r+1}-b'^{r+1}}{a'^r-b'^r}<1.$$

En effet, on a l'identité

$$\frac{a'^{r+1}-b'^{r+1}}{\alpha(a'^r-b'^r)}=\frac{a'}{\alpha'}+\frac{b'}{\left\{\left(\dfrac{a'}{b'}\right)^{r-1}+\left(\dfrac{a'}{b'}\right)^{r-2}+\ldots+\dfrac{a'}{b'}+1\right\}\alpha}.$$

En appelant T le nombre entier immédiatement au-dessous de $\left(\dfrac{a'}{b'}\right)^{r-1}+\ldots+1$, il vient

$$\frac{a'^{r+1}-b'^{r-1}}{\alpha(a'^r-b'^r)}<\frac{a'+\dfrac{b'}{\mathrm{T}}}{\alpha}.$$

Le numérateur, dans le deuxième membre, a, au plus, $k+1$ chiffres. Le dénominateur en a $2k+1$; dans le cas le plus défavorable, le deuxième membre est moindre que l'unité; il en est de même, à fortiori, du premier. Donc le multiplicateur qui sert à passer d'un terme au suivant dans la série, est moindre que l'unité; par conséquent les termes de la série sont décroissants; de plus, ils sont alternativement positifs et négatifs; donc, d'après un théorème connu, la quantité entre parenthèses est moindre que son premier terme 1. Donc la valeur de $p\left[A^{\frac{1}{p}}-B^{\frac{1}{p}}\right]$ est le produit de deux quantités moindres que l'unité, et dès lors il est vrai de dire qu'on a :

$$A^{\frac{1}{p}}-B^{\frac{1}{p}}<\frac{1}{p}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

NOTE SUR L'ANALYSE INDÉTERMINÉE

DU PREMIER DEGRÉ.

PAR A. CHEVILLARD,
Professeur au collége de Sorrèze.

—

On se sert ordinairement de la propriété des réduites pour former immédiatement les solutions finales de l'équation $ax+by=c$. Mais en analysant complétement la méthode si connue des indéterminées successives, il devient évident que cette méthode fondée sur le plus grand commun diviseur, comme la théorie des réduites, conduit explicitement aux mêmes résultats. On aurait donc tort de s'aider d'une théorie par l'autre, puisqu'au fond c'est la même. Je reprends rapidement le calcul des indéterminées pour arriver aux conséquences.

$$ax+by=c,\ y=\frac{c-ax}{b}=-qx+t,\ t=\frac{c-rx}{b},a=bq+r;$$

$$bt+rx=c,\ x=\frac{c-bt}{r}=-q't+t',\ t'=\frac{c-r't}{r},\ b=q'r+r';$$

$$rt'+r't=c,\ t=\frac{c-rt'}{r'}=-q''t'+t'',t''=\frac{c-r''t'}{r'},\ r=q''r'+r'';$$

$$r't''+r''t'=c,\ t'=\frac{c-r't''}{r''}=-q'''t''+t''',t'''=\frac{c-r'''t''}{r''},r'=q'''r''+r''';$$

$$r''t'''+r'''t''=c,\ t''=\frac{c-r''t'''}{r'''}=-q^{\text{IV}}t'''+t^{\text{IV}},\ t^{\text{IV}}=\frac{c-1.t'''}{r'''},\ r''=q^{\text{IV}}r'''+1;$$

$$r'''t^{\text{IV}}+t'''=c.$$

Exprimons maintenant y et x en fonction de l'indéterminée finale t^{IV}. On trouve en remontant, par les substitutions,

$t'''=c-r'''t^{\text{IV}}$. (1)

$t''=-q^{\text{IV}}t'''+t^{\text{IV}}=-q^{\text{IV}}c+q^{\text{IV}}r'''t^{\text{IV}}+t^{\text{IV}}=-q^{\text{IV}}c+t^{\text{IV}}r''$.

$t'=-q'''t''+t'''=q'''q^{\text{IV}}c-q'''t^{\text{IV}}r''+c-r'''t^{\text{IV}}=cQ'''-t^{\text{IV}}r'$,

$$Q'''=q'''q^{\text{IV}}+1.$$

$t=-q''t'+t''=-q''cQ'''+q''t^{\text{IV}}r'-q^{\text{IV}}c+t^{\text{IV}}r''=-cQ''+t^{\text{IV}}r$,

$$Q''=q''Q'''+q^{\text{IV}}.$$

$x=-q't+t'=cq'Q''=q't^{\text{IV}}r+cQ'''-t^{\text{IV}}r'=cQ'-t^{\text{IV}}b$,

$$Q'=q'Q''+Q'''.$$

$y=-qx+t=-qcQ'+qt^{\text{IV}}b-cQ''+t^{\text{IV}}r=-cQ+t^{\text{IV}}a$,

$$Q=qQ'+Q''.$$

Les valeurs finales

$$x=cQ'-bT,\quad y=-cQ+aT,$$

démontrent la loi connue sur la croissance en progressions des valeure entières de x et de y. De plus, elles montrent comment on peut les calculer sans le secours des indéterminées éliminées, puisqu'il suffira pour cela de former les équations (1). Voici comment on disposera les calculs :

$$ax+by=c.$$

(2) $$\begin{array}{cccccc} q & q' & q'' & q''' & q^{\text{IV}} & 1 \\ a\,| & b\,| & r\,| & r'\,| & r''\,| & r''' \\ r & r' & r'' & r''' & 1 & \end{array}$$

(3) $$\begin{array}{cccccc} Q & Q' & Q'' & Q''' & q^{\text{IV}} & 1 \end{array}$$

$$q'''q^{\text{IV}}+1=Q''',$$
$$q''Q'''+q^{\text{IV}}=Q'',$$
$$q'Q''+Q'''=Q',$$
$$qQ'+Q''=Q.$$
$$y=-cQ+aT,$$
$$x=cQ'-bT.$$

On cherchera le plus grand commun diviseur entre a et b en divisant d'abord a par b, quand même on aurait $a<b$.

On aura ainsi la ligne (2) terminée par le reste 1. On formera la ligne (3) en répétant les deux derniers nombres de la ligne (2). *Chaque autre nombre de la ligne* (3) *est égal au supérieur de la ligne* (2) *multiplié par le précédent dans* (3), *plus l'anté-précédent.* Q et Q' ainsi trouvés, y et x seront les valeurs ci-dessus, si le nombre des quotients est impair. S'il est pair, on voit bien que les calculs ci-dessus auraient donné pour y et x les mêmes valeurs changées de signes. Enfin, pour changer moins les valeurs finales, on disposera toujours la proposée de manière à ce que le terme constant soit le moindre des trois nombres a, b, c. c pourra être négatif, mais a et b seront toujours rendus positifs en posant, par exemple, $y = -y'$ si b est négatif. Je ne fais qu'une seule application, parce que je prends le cas le plus défavorable.

$$225x + 157y = 944.$$

Comme 944 est trop grand, je résous par rapport à y, qui a le moindre coefficient, et j'ai

$$y = \frac{944 - 225x}{157} = 6 - x + \frac{2 - 68x}{157} = 6 - x + y',$$

et il reste à résoudre

$$68x + 157y' = 2,$$

à laquelle j'applique le procédé.

	0	2	3	4	1
68 |	157 |	68 |	21 |	5 |	reste.
68	21	5	1		
	13	30	13	4	1

4, nombre pair de quotients.

Donc
$$y' = 2 \times 13 - 68T,$$
$$x = -2 \times 30 + 157T.$$

Ainsi $x = -60 + 157T$,

$$y = 6 + 60 - 157T + 26 - 68T = 92 - 225T.$$

QUESTIONS D'EXAMEN.

Volumes engendrés par les polygones réguliers lorsqu'ils tournent autour d'un de leurs côtés.

(Fin. — V. p. 353.)

PAR M. HUET,
Régent de physique au collége de Pamiers, ancien professeur de mathématiques spéciales à l'école de Sorrèze.

—

6° *Décagone* (fig. 88).

$$\text{vol}\,D = \text{vol}\,ABFG + 2\text{vol}\,FEDCB = \text{vol}\,R + 2\text{vol}\,K.$$

Or
$$\text{vol}\,K = \text{vol}\,FECB + \text{vol}\,EDC,$$
$$\text{vol}\,FECB = \text{vol}\,FECIB - \text{vol}\,BCI = \text{vol}\,T - \text{vol}\,T',$$
$$\text{vol}\,ECD = \text{vol}\,EDKI - \text{vol}\,DCIK = \text{vol}\,t - \text{vol}\,t'.$$

Préparation.

On trouve facilement $Om = \frac{1}{2}c\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

D'ailleurs, on a

$$mn = c\sqrt{5+2\sqrt{5}} = BF\,;\quad \overline{OD}^2 = \frac{1}{4}c^2(6+2\sqrt{5})\,;$$

d'où
$$OD = \frac{c}{2}\sqrt{6+2\sqrt{5}},$$

ou, en vertu d'une formule connue,

$$OD = \frac{c}{2}(1+\sqrt{5})\,;$$

EC sous-tendant le $\frac{1}{5}$ de la circonférence est égal au côté du pentagone, on a donc

$$\overline{EC}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{ED}^2 = \frac{c^2}{4}(6+2\sqrt{5}) + c^2 = \frac{c^2}{4}(10+2\sqrt{5})\,;$$

d'où $EC = \frac{c}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$; $EP = \frac{c}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$; $EI =$

$= IP + EP = EP + On = \frac{1}{4}c\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \frac{c}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} =$

$= \frac{c}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + 2\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)$;

$CI = PI - PC = On - EP = \frac{c}{4}(2\sqrt{5+2\sqrt{5}} - \sqrt{10+2\sqrt{5}})$;

$BI = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{CI}^2} = \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{16}(30+10\sqrt{5}) - 4\sqrt{70+30\sqrt{5}})} =$

$= \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{16}(10 - 2\sqrt{5})} = \frac{c}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \frac{c}{4}(1+\sqrt{5})$;

$IK = PD = OD - OP = OD - (nB + BI) = \frac{1}{2}c(\sqrt{5}+1) -$

$-\left(\frac{1}{2}c + \frac{c}{4}(1+\sqrt{5})\right) = \frac{c}{2}\sqrt{5} - \frac{c}{4}(1+\sqrt{5}) = \frac{c}{4}(\sqrt{5}-1)$;

$DK = On = Om = \frac{1}{2}c\sqrt{5+2\sqrt{5}}.$

Cela posé, on a $\text{vol}R = c.\pi c^2(5+2\sqrt{5}) = \pi c^3(5+2\sqrt{5})$;

$\text{vol}T - \text{vol}T' = \frac{1}{3}\pi BI\left\{\overline{BF}^2 + BF.EI + \overline{EI}^2 - \overline{CI}^2\right\} = \frac{1}{3}\pi BI$

$\left\{\overline{BF}^2 + BF.EI + (EI+CI)(EI-CI)\right\} = \frac{1}{3}\pi BI$

$(\overline{BF}^2 + BF.EI + BF.EC) = \frac{1}{3}\pi BI.BF(BF + EI + EC) =$

$= \frac{1}{3}\pi.\frac{1}{4}c^2(1+\sqrt{5})\sqrt{5+2\sqrt{5}}\left\{c\sqrt{5+2\sqrt{5}}+\right.$

$\left.+\frac{1}{4}c\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + 2\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{2}c\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right\} =$

$= \frac{1}{4}\pi c^3(1+\sqrt{5})\sqrt{5+2\sqrt{5}}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right\}$

$= \frac{1}{4}\pi c^3(1+\sqrt{5})\left\{\frac{1}{2}(5+2\sqrt{5}) + \frac{1}{4}\sqrt{70+30\sqrt{5}}\right\} =$

$$=\frac{1}{4}\pi c^3(1+\sqrt{5})\left\{\frac{1}{2}(5+2\sqrt{5})+\frac{1}{4}(5+3\sqrt{5})\right\}=$$

$$=\frac{1}{16}\pi c^3(1+\sqrt{5})(15+7\sqrt{5})=\frac{1}{16}\pi c^3(50+22\sqrt{5})=$$

$$=\frac{1}{8}\pi c^3(25+11\sqrt{5}).$$

$$\text{Vol}t-\text{vol}t'=\frac{1}{3}\pi \text{IK}(\overline{\text{EI}}^2+\overline{\text{DK}}^2+\text{EI.DK}-\overline{\text{CI}}^2-\overline{\text{DK}}^2-\text{CI.DK})=$$

$$=\frac{1}{3}\pi\text{IK}\left\{(\text{EI}+\text{CI})(\text{EI}-\text{CI})+\text{DK}(\text{EI}-\text{CI})\right\}=$$

$$=\frac{1}{3}\pi\text{IK}(\text{BF.EC}+\text{DK.EC})=\frac{1}{3}\pi.\text{IK.EC}(\text{BF}+\text{DK})=$$

$$=\frac{1}{3}\pi\,.\,\text{IK}\,.\,\text{EC}\,.\,3\text{DK}=\pi\,.\,\text{IK}\,.\,\text{EC}\,.\,\text{DK}=$$

$$=\pi\,.\,\frac{1}{4}c(\sqrt{5}-1)\,.\,\frac{1}{2}c\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,.\,\frac{1}{2}c\sqrt{5+2\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{1}{16}\pi c^3(\sqrt{5}-1)\sqrt{(10+2\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})}=$$

$$=\frac{1}{16}\pi c^3(\sqrt{5}-1)(5+3\sqrt{5})=\frac{1}{16}\pi c^3(10+2\sqrt{5})=\frac{1}{8}\pi c^3(5+\sqrt{5}).$$

Donc, $\text{vol}\,\text{K}=\frac{1}{8}\pi c^3(5+\sqrt{5})+\frac{1}{8}\pi c^3(15+11\sqrt{5})=$

$$=\frac{1}{8}\pi c^3(30+12\sqrt{5})=\frac{1}{4}\pi c^3(15+6\sqrt{5})=\frac{3}{4}\pi c^3(5+2\sqrt{5}).$$

Donc, $2\text{vol}\,\text{K}=\frac{3}{2}\pi c^3(5+2\sqrt{5})$;

ajoutant, $\text{vol}\,\text{R}=\pi c^3(5+2\sqrt{5})$.

Donc enfin, $\text{vol}\,\text{D}=\frac{5}{2}\pi c^3(5+2\sqrt{5})$.

7° *Dodécagone* (fig. 89).

Vol D = vol HGBA + 2 vol GFEDCB = vol R + 2 vol K.

Vol K = vol GFCB + vol FEDC.

Vol GFCB = vol GFIB — vol BCI = vol T — vol T'.

Vol FECB = vol FEKI — vol DKIC = vol t — vol t'.

Préparation.

On trouve aisément $Om = \frac{1}{2}c(2+\sqrt{3})$; d'ailleurs

$mn = 2Om = c(2+\sqrt{3})$; $\overline{OF}^2 = \overline{OG}^2 = \overline{Om}^2 + \overline{mG}^2 = c^2(2+\sqrt{3})$;

d'où $OF = c\sqrt{2+\sqrt{3}} = c\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{c}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$;

FC est le côté du carré inscrit, il est égal à $FO\sqrt{2}$, d'après le triangle rectangle FOC.

Donc, $FC = \frac{1}{2}c(\sqrt{12}+2) = c(1+\sqrt{3})$; $qC = \frac{1}{2}c(1+\sqrt{3})$;

$CI = qI - qC = \frac{1}{2}c(2+\sqrt{3}) - \frac{1}{2}c(1+\sqrt{3}) = \frac{1}{2}c$;

$BI = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{CI}^2} = \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{4}} = \frac{c}{2}\sqrt{3}$; $nI = nB + BI =$

$= \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c\sqrt{3} = \frac{1}{2}c(1+\sqrt{3}) = qC$; $IK = NK - NI = OP - nI =$

$= \frac{1}{2}c(2+\sqrt{3}) - \frac{1}{2}c(1+\sqrt{3}) = \frac{1}{2}c$; $FI = FC + IC =$

$= \frac{c}{2} + c(1+\sqrt{2}) = \frac{1}{2}c(3+2\sqrt{3})$; $EK = EP + PK =$

$= \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c(2+\sqrt{3}) = \frac{1}{2}c(3+\sqrt{3})$; $DK = PK - PD =$

$= \frac{1}{2}c(\sqrt{3}+2) - \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}c(1+\sqrt{3})$.

Cela posé,

$$\text{Vol R} = c.\pi.c^2(2+\sqrt{3})^2 = \pi c^3(7+4\sqrt{3}).$$

$$\text{Vol}\,T - \text{vol}\,T' = \frac{\pi}{3}\text{BI}\left(\overline{\text{BG}}^2 + \overline{\text{FI}}^2 + \text{BG.FI} - \overline{\text{CI}}^2\right) = \frac{1}{3}\pi\text{BI}$$

$$\left\{\text{BG(BG+FI)}+\text{(FI+CI)(FI}-\text{CI)}\right\} = \frac{1}{3}\pi\text{BI}\left\{\text{(BG+FI)BG}+\right.$$

$$\left.+\text{BG.FC}\right\} = \frac{1}{3}\pi\text{BI.BG(BG+FI+FC)} = \frac{1}{3}\pi.\frac{1}{2}c\sqrt{3}.c(2+\sqrt{3})$$

$$\left\{c\,(2+\sqrt{3}) + \frac{1}{2}c(3+2\sqrt{3}) + c\,(1+\sqrt{3})\right\} = \frac{1}{3}\pi.\frac{1}{2}c\sqrt{3}$$

$$c\,(2+\sqrt{3})\,.\,\frac{1}{2}c\,(3+2\sqrt{3}) = \frac{1}{4}\pi c^3(3+2\sqrt{3})^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\pi c^3(21+12\sqrt{3}) = \frac{3}{4}\pi c^3(7+4\sqrt{3}).$$

$$\text{Vol}\,t - \text{vol}\,t' = \frac{1}{3}\text{IK}.\pi\left(\overline{\text{FI}}^2 + \overline{\text{EK}}^2 + \text{FI.EK} - \overline{\text{CI}}^2 - \overline{\text{DK}}^2 - \text{CI.DK}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\text{IK}\left\{\text{(FI+CI)(FI}-\text{CI)}+\text{(EK+DK)(EK}-\text{DK)}+\text{FI.EK}-\right.$$

$$\left.-\,\text{CI.DK}\right\} = \frac{1}{3}\pi\text{IK}\left\{\text{BG(FC+ED)} + \text{FI.EK} - \text{CI.DK}\right\} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi.\frac{1}{2}c\left\{c(2+\sqrt{3})c(2+\sqrt{3}) + \frac{1}{2}c(3+2\sqrt{3}).\frac{1}{2}c(3+\sqrt{3}) -\right.$$

$$\left.-\,\frac{1}{2}\;\frac{1}{2}c(1+\sqrt{3})\right\} = \frac{1}{6}\pi c^3\left\{(2+\sqrt{3})^2 + \frac{1}{2}(7+4\sqrt{3})\right\} =$$

$$= \frac{1}{6}\pi c^3\left\{7+4\sqrt{3} + \frac{1}{2}(7+4\sqrt{3})\right\} = \frac{1}{4}\pi c^3(7+4\sqrt{3}).$$

Donc, $\text{vol}\,K = \frac{3}{4}\pi c^3(7+4\sqrt{3}) + \frac{1}{4}\pi c^3(7+4\sqrt{3}) =$

$= \pi c^3(7+4\sqrt{3}) = \text{vol}\,R.$

Donc, $\text{vol}D = \text{vol}R + 2\text{vol}K = 3\text{vol}R = 3\pi c^3(7+4\sqrt{3})$.

8. Vérifions maintenant ces résultats en calculant ces mêmes volumes par le théorème de Guldin.

Le centre de gravité d'un polygone régulier est au centre du cercle inscrit dans ce polygone, et le rayon de la circonférence qu'il décrit autour d'un côté est l'apothème dont la valeur est

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{4\,R^2 - c^2}$$

La circonférence $2\pi r = \pi\sqrt{4R^2 - c^2}$; donc en général le volume V est donné par la formule

$$V = S\pi\sqrt{4R^2 - c^2},$$

S étant la surface du polygone générateur. Appliquons cette formule aux sept polygones que nous venons de considérer.

1° Pour le triangle on a

$$V = \frac{1}{4}\ c^2\sqrt{3}.\pi\ \frac{1}{2}\ c\sqrt{3} = \frac{1}{4}\ \pi c^3.$$

2° Pour le carré on a

$$V = c^2.\pi\ c = \pi c^3.$$

3° Pour le pentagone on a

$$V = \frac{1}{4}\ c^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}.\quad \pi\ \frac{c}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}} =$$
$$= \frac{1}{4}\ \pi c^3\ (5 + 2\sqrt{5}).$$

4° Pour l'hexagone on a

$$V = \frac{3}{2}\ c^2\sqrt{3}.\quad \pi c\sqrt{3} = \frac{9}{2}\ \pi c^3.$$

5° Pour l'octogone on a

$$V = 2c^2\,(1 + \sqrt{2}).\ \pi c\,(1 + \sqrt{2}) = \pi c^3\,(6 + 4\sqrt{2}) =$$
$$= 2\,\pi\,c^3(3 + 2\sqrt{3}).$$

6° Pour le décagone on a

$$V = \frac{5}{2}\ c^2\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}.\ \pi c\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = \frac{5}{2}\ \pi\ c^3\,(5 + 2\sqrt{5}).$$

7° Pour le dodécagone on a

$$V = 3\ c^2\,(2 + \sqrt{3}).\ \pi c\,(2 + \sqrt{3}) = \pi\ (21 + 12\sqrt{3})\,c^3 =$$
$$= 3\pi c^3(7 + 4\sqrt{3}).$$

Résultats tout à fait identiques aux précédents.

Cette dernière méthode suppose qu'on a calculé d'avance S pour chacun des polygones ci-dessus. Ce calcul n'offre aucune difficulté, je me dispenserai de le développer.

Si on demandait les volumes précédents, en fonction de R ou en fonction de r, on les obtiendrait immédiatement en mettant dans les résultats que nous avons trouvés à la place de c, ou sa valeur en fonction de R, ou sa valeur en fonction de r, valeurs qu'on trouverait sans difficulté. On pourrait d'ailleurs suivre pour les trouver directement l'une des deux méthodes que nous avons suivies, et on trouverait par exemple pour les volumes en fonction de R :

$$1^\circ \text{ Triangle, } V = \frac{3}{4}\pi R^3 \sqrt{3};$$

$$2^\circ \text{ Carré, } V = 2\pi R^3 \sqrt{2};$$

$$3^\circ \text{ Pentagone, } V = \frac{5}{4}\pi R^3 \sqrt{5 + 2\sqrt{5}};$$

$$4^\circ \text{ Hexagone, } V = \frac{9}{2}\pi R^3;$$

$$5^\circ \text{ Octogone, } V = 2\pi R^3 \sqrt{4 + 2\sqrt{2}};$$

$$6^\circ \text{ Décagone, } V = \frac{5}{2}\pi R^3 \sqrt{5};$$

$$7^\circ \text{ Dodécagone, } V = \frac{3}{2}\pi R^3 (\sqrt{2} + \sqrt{6}).$$

THÉORÈMES

SUR LES FIGURES PLANES OU SPHÉRIQUES D'ÉGAL PÉRIMÈTRE OU D'ÉGALE SURFACE.

Démonstrations nouvelles et élémentaires.

PAR M. THIBAULT,
Professeur, licencié ès sciences.

Ces démonstrations, de la plus grande simplicité, n'exigent la connaissance d'aucun théorème relatif à la mesure des surfaces, ou à la théorie des parallèles.

Les figures sont représentées comme planes, mais on peut y substituer des figures sphériques tracées sur une même sphère, les lignes droites étant remplacées par des arcs de grands cercles. Seulement les théorèmes supposent que ces figures sphériques sont comprises chacune dans un seul hémisphère. Ils n'ont d'ailleurs besoin de démonstration que pour le cas où les figures ont des périmètres convexes, ce qui suppose que ces périmètres ne dépassent pas la circonférence d'un grand cercle.

I. *Lemme. fig.* 97. *Étant donné un polygone* ABCD...H *d'un périmètre* p, *on peut déterminer sur le prolongement d'un côté* AB *quelconque un point* I, *de manière que le polygone* AICD...H *ait un périmètre donné* $P > p$.

Car en faisant croître le côté AB d'une manière continue, on augmente aussi d'une manière continue le périmètre (*), depuis la valeur p jusqu'à l'infini (ou au moins jusqu'à ce qu'il soit égal à la circonférence d'un grand cercle s'il s'agit d'un polygone sphérique); dans l'intervalle ce périmètre est donc devenu égal à P.

II. *Théorème. De tous les polygones d'un même périmètre et d'un même nombre de côtés, le polygone régulier est le plus grand.*

Démontrons successivement que si un polygone ABCD...H n'a pas tous ses côtés égaux et tous ses angles égaux, il ne peut être le plus grand parmi les isopérimètres d'un même nombre de côtés.

1° Soit $AB < BC$. *fig.* 98. Prenons sur BC le point M assez près de C pour qu'on ait encore $AB < BM$, et joignons AM. Faisons ensuite le triangle AMN symétrique de MAB, en prenant $AN = MB$, $MN = AB$. La substitution du triangle AMN à

(*) On peut faire croître le périmètre par degrés moindres que toute quantité donnée δ; il suffit pour cela d'augmenter AB par degrés, tels que BB' égaux à δ. Car la différence des périmètres ABCD.. H, AB'CD.. .H est $BB' + B'C - BC$, quantité moindre que $2BB'$ ou δ, puisque l'on a $B'C < BB' + BC$.

la place de MAB ne produit pas de changement dans le périmètre ni dans la surface du polygone; mais alors ce polygone devient ANMCD...H qui a un angle rentrant NMC; car à cause de l'inégalité AB $<$ BM l'angle AMB est moindre que MAB ou AMN. Si donc on joint NC, le polygone ANCD...H a moindre périmètre et plus grande surface que ANMCD...H ou ABCD...H; donc (*Lemne* I) on peut déterminer le polygone AICD...H de même périmètre que ABCD...H, d'un même nombre de côtés, et plus grand que lui, puisqu'il contient ANCD...H.

2° Soit l'angle A $>$ B. *fig*. 99. Prenons sur BC le point M assez près de B pour que l'on ait encore l'angle HAM $>$ AMC; faisons ensuite le triangle AMN symétrique de MAB. La substitution du premier de ces triangles à la place du second ne produit pas de changement dans le périmètre ni dans la surface du polygone. Mais le nouveau polygone ANMCD...H a un angle rentrant HAN; car l'angle HAM étant plus grand que AMC, le supplément du premier est moindre que AMB ou MAN supplément du second. On en conclura donc, comme plus haut, que le polygone ABCD...H n'est pas le maximum.

III. *Théorème. De tous les polygones d'égale surface et d'un même nombre de côtés, le polygone régulier a le moindre périmètre.*

Car chacun de ces polygones, à l'exception de celui qui est régulier, pourrait être converti, comme dans la démonstration du théorème précédent, en un autre polygone d'égale surface et d'égal périmètre, ayant un angle rentrant, tel que ANMCD...H (*fig*. 98). En joignant NC on aurait le polygone ANCD...H plus grand que le précédent, et de moindre périmètre; puis, en retranchant de ce nouveau polygone une partie égale au triangle NMC au moyen d'une droite menée par C dans l'angle BCN; on le ramènerait à la même surface que le polygone considéré. Mais alors son périmètre deviendrait moindre qu'auparavant, et serait à plus forte raison moindre que celui de ce dernier polygone.

IV. *Théorème. De deux polygones réguliers d'égal périmètre, celui qui a le plus de côtés est le plus grand.*

A égalité de surface ce dernier polygone aurait le moindre périmètre.

Soit ABCD...H (*fig.* 100) un polygone régulier de n côtés. Joignons le sommet A avec un point M pris sur BC, et faisons le triangle AMN symétrique de MAB. Par la substitution du premier de ces triangles à la place du second, le polygone ABCD...H est changé en un autre d'égal périmètre et d'égale surface ; mais alors ce polygone devient irrégulier et de $n+1$ côtés ; donc, à égalité de périmètre, il a moindre surface que le polygone régulier de $n+1$ côtés. De même celui-ci a moindre surface que le polygone régulier isopérimètre de $n+2$ côtés, et ainsi de suite, ce qui démontre la première partie de l'énoncé. On démontrerait de même la seconde partie.

V. *Théorème. Étant donnée une portion de périmètre d'une figure plane ou sphérique, pour terminer le périmètre par une ligne brisée de longueur donnée, d'un nombre de côtés* n, *et de manière que la figure ait la plus grande surface possible, il faut que la ligne brisée soit régulière (c'est-à-dire composée de côtés égaux comprenant des angles égaux).*

On démontrerait ce théorème comme celui du n° II.

La figure ainsi construite aurait aussi moindre périmètre, à égalité de surface, que si on l'eût terminée par une ligne irrégulière de n *côtés.*

On le démontrerait comme le théorème n° III.

Cette figure aurait aussi une plus grande surface à égalité de périmètre, ou moindre périmètre à égalité de surface que si on l'eût terminée par une ligne brisée quelconque ayant moins de n *côtés.*

On le démontrerait comme le théorème n° IV.

VI. *Théorème. De toutes les figures planes, ou sphériques (comprises dans un seul hémisphère), celle qui a la plus grande surface à égalité de périmètre est la figure terminée par une circonférence, savoir le cercle pour les figures planes, et la zone à une base pour les figures sphériques.*

La figure de la plus grande surface doit être terminée évidemment par une ligne convexe; il sera démontré que cette ligne est une circonférence, si l'on fait voir qu'on peut tracer une circonférence dont la distance à tout point de cette ligne soit moindre que toute quantité donnée δ.

Inscrivons dans la figure maximum, et en faisant au moins le tour complet du périmètre, une suite de cordes égales AB, BC, CD, ... HI (*), assez petites pour que chacune des parties du périmètre sous-tendues par ces cordes soit moindre que 2δ (*fig.* 101).

Il y a égalité entre tous les angles B, C, ...H compris entre ces cordes; car si deux angles successifs C, D n'étaient pas égaux, et qu'on menât la corde BE, on aurait un quadrilatère BCDE qu'on pourrait convertir en un autre plus grand, de mêmes côtés, donc les angles en C et D seraient égaux (V). Ce changement pourrait se faire sans rien changer aux autres parties de la figure totale; il en résulterait donc pour celle-ci une augmentation de surface, sans que le périmètre ait changé, ce qui est contraire à la supposition que la surface était d'abord un maximum.

Puisque les angles B, C, D, etc., sont égaux, si on les partage par des bissectrices, celles-ci détermineront avec les cordes des triangles isocèles égaux, ayant un sommet commun O (**). Les points A, C, D...H, I, étant à égale distance

---

(*) On doit remplacer les cordes par des arcs de grands cercles, s'il s'agit des figures sphériques.

(**) Cela suppose que les bissectrices se couperont, ce qui peut se démontrer indépendamment d'aucun théorème basé sur la théorie des parallèles. D'abord, à cause de l'égalité parfaite des parties du plan ou de la surface de sphère interde O appartiennent à une même circonférence ; mais chacun des points situés sur le périmètre de la figure maximum entre les points B,C,...H,I se trouve séparé de l'un de ces derniers par une distance moindre que δ ; donc à fortiori sa distance la plus courte à la circonférence est moindre que δ.

La figure de moindre périmètre parmi celles qui ont la même surface est aussi terminée par une circonférence. Car si une figure A n'était pas ainsi terminée, elle serait moindre qu'une autre figure B d'égal périmètre comprise par une circonférence. On pourrait, au moyen d'une corde, partager B en deux segments, dont l'un serait équivalent à A. Mais ce segment aurait moindre périmètre que B, et par conséquent que A ; ainsi A ne serait pas la figure de moindre périmètre parmi celles qui ont une surface égale.

Corollaire. On peut toujours construire sur un plan ou sur une sphère donnée une circonférence de longueur donnée ; car parmi toutes les figures rectilignes ou sphériques d'un périmètre égal à cette longueur, si l'on considère celle qui a la plus grande surface possible, elle a pour périmètre une circonférence qui satisfait à la question.

On démontrerait de même qu'*on peut y construire une circonférence comprenant un cercle ou une zone de surface donnée.*

VII. *Un polygone rectiligne ou sphérique inscriptible* P *a une plus grande surface que tout autre polygone* P' *rectiligne ou sphérique de mêmes côtés.*

Ayant tracé la circonférence circonscrite à P (*fig.* 102),

---

ceptées entre BC, CD, etc., et les bissectrices, égalité qu'on peut démontrer par la superposition, si deux bissectrices consécutives ne se rencontraient pas, il en serait de même de toutes les autres. Or si aucune d'elles ne rencontrait la précédente, on ne pourrait joindre le point A à aucun point de la bissectrice de C, prolongée indéfiniment sans couper celle de B. A fortiori ne pourrait-on pas sans couper cette dernière joindre le point A à la bissectrice de D. De ce raisonnement répété pour toutes les bissectrices, on conclurait que l'on ne peut mener une droite du point A à aucun des points C, D ..H, I sans couper la bissectrice de l'angle B, ce qui est évidemment faux pour ce dernier point.

formons respectivement sur les côtés de P' des segments A', B', etc., égaux aux segments A, B, etc., interceptés entre la circonférence et les côtés de P. Les polygones P, P' réunis aux segments construits sur leurs côtés constituent deux figures d'égal périmètre; mais la première a une plus grande surface, puisqu'elle est terminée par une circonférence (VI); donc en retranchant de part et d'autre les segments égaux sur-ajoutés, on aura le polygone P plus grand que le polygone P'.

THEORÈME SUR LA CISSOÏDE.

PAR M. MARCOU (J.),
Élève au collége de Besançon.

Deux circonférences sont tangentes extérieurement l'une à l'autre, on mène à ces deux circonférences, une tangente commune; le rayon de la première étant constant et celui de la seconde étant variable, le point de tangence de cette dernière circonférence décrit une cissoïde (*fig.* 91).

Je prends pour axe des y, la perpendiculaire au point de contact des deux cercles, et la ligne des centres pour l'axe des x; soit $CO = R$; $C'O = \alpha$; R est constant et α est variable.

L'équation du cercle C est $y^2 + x^2 + 2Rx = 0$.

L'équation du cercle C' est $y^2 + x^2 - 2\alpha x = 0$.

Les points (x', y'), (x'', y'') étant sur les cercles, on a les relations

$$y'^2 + x'^2 + 2Rx' = 0, \qquad (1)$$

$$y''^2 + x''^2 + 2\alpha x'' = 0. \qquad (2)$$

Pour exprimer que les deux cercles ont une tangente commune, j'égale les deux coefficients d'inclinaison, et j'exprime qu'elles coupent l'axe des y au même point A.

Ce qui me donne les deux relations

$$\frac{x'+\mathrm{R}}{y'}=\frac{x''-\alpha}{y''}, \tag{3}$$

$$-\frac{\mathrm{R}x'}{y'}=\frac{\alpha x''}{y''}. \tag{4}$$

Éliminant entre les 4 équations (1), (2), (3), (4) x', y' et α; on aura l'équation du lieu des points (x'', y''). De (3) je tire $x'=\dfrac{y'(x''-\alpha)-\mathrm{R}y''}{y''}$;

de (4) je tire $x'=-\dfrac{\alpha x'' y'}{\mathrm{R}y''}$, égalant ces deux valeurs, on en déduit

$$y'=\frac{\mathrm{R}^2 y''}{\mathrm{R}(x''-\alpha)+\alpha x''},$$

$$\text{et } x'=\frac{-\alpha\mathrm{R}x''}{\mathrm{R}(x''-\alpha)+\alpha x''}.$$

Remplaçant y' et x' par ces valeurs dans l'équation (1), il vient

$$\mathrm{R}^2 y''^2-2\alpha\mathrm{R}x''^2+2\alpha^2\mathrm{R}x''-\alpha^2 x''^2=0,$$

$$\text{ou } \alpha^2(2\mathrm{R}x''-x''^2)-2\mathrm{R}x''^2\alpha+\mathrm{R}^2 y''^2=0.$$

De l'équation (2) je tire $\alpha=\dfrac{y''^2+x''^2}{2x''}$, remplaçant α par cette valeur dans la dernière équation, il vient

$$\frac{(y''^2+x''^2)^2}{4x''}(2\mathrm{R}-x'')-\frac{2\mathrm{R}x''^2(y''^2+x''^2)}{2x''}+\mathrm{R}^2 y''^2=0,$$

ou, supprimant les accents,

$$(y^2+x^2)(2\mathrm{R}y^2-2\mathrm{R}x^2-xy^2-x^3)+4\mathrm{R}^2y^2x=0.$$

$$(y^2+x^2+2\mathrm{R}x)2\mathrm{R}y^2-x(y^2+x^2)(2\mathrm{R}x+y^2+x^2)=0,$$

$$\text{ou enfin } (y^2+x^2+2\mathrm{R}x)(2\mathrm{R}y^2-xy^2-x^3)=0.$$

Le premier facteur égalé à zéro, représente le cercle C dont le rayon est constant; et le second facteur est l'équation d'une cissoïde qui a pour cercle générateur un cercle symétrique au cercle C, relativement à l'axe des y.

Note. Le facteur $y^2+x^2+2Rx=0$ est l'enveloppe de la droite mobile. Lorsque R devient négatif, les circonférences se touchent intérieurement, et n'ont qu'une tangente commune; toutefois la cissoïde reste réelle; que signifie-t-elle alors? Si R est aussi variable et qu'on donne entre α et R, la relation F $(\alpha,R)=0$, il suffit, pour obtenir le lieu du point de contact sur le cercle α, de substituer dans la relation $\alpha=\frac{y^2+x^2}{2x}$ et $R=\frac{x(y^2+x^2)}{2y^2}$; ou bien $R=-\frac{y^2+x^2}{2x}$; $\alpha=\frac{x(y^2+x^2)}{2y^2}$, pour avoir le lieu relatif au cercle R. Tm.

PROBLÈME SUR UNE DROITE MINIMUM.

PAR M. ROCHE.

Professeur à l'École d'artillerie de la marine.

1. Étant donné un point dans l'intérieur d'un angle, déterminer la direction d'une droite passant par ce point, de manière que la ligne interceptée entre les côtés soit un minimum.

Solution.

Soit CAB (*fig.* 96) l'angle donné et D le point intérieur. Supposons que la droite GDH soit la ligne cherchée. Menons du point D deux parallèles DP et DQ aux côtés de l'angle AC et AB. Désignons AP par p et AQ par q, et les lignes inconnues PH par x et GQ par y. Ces deux inconnues seront liées entre elles par les rapports égaux $\frac{y}{q}=\frac{p}{x}$ résultant des triangles semblables GQD, DPH. On aura ainsi $AH=p+x$;

$y = \frac{pq}{x}$, ; $AG = q + y = q\ \frac{(p+x)}{x}$; on pourra donc évaluer la distance GH que je représente par z d'après la formule trigonométrique $GH^2 = AG^2 + AH^2 - 2\ AG.AH \cos A$, A désignant l'angle CAB; cette équation deviendra par les valeurs précédentes

$$(z) \qquad z^2 = \frac{(p+x)^2\ (x^2 + q^2 - 2\,qx \cos A)}{x^2}$$

Pour exprimer la condition du minimum, je calcule la fonction dérivée du second membre et en l'égalant à zéro, j'ai l'équation suivante en représentant par c l'expression $\cos A$:

$$(x) \qquad x^3 - qcx^2 + pqcx - pq^2 = 0.$$

On obtiendrait de la même manière l'équation en y qui serait (y), $y^3 - pcy^2 + pqcy - qp^2 = 0$. On peut simplifier ces équations en représentant par m le rapport $\frac{p}{x} = \frac{y}{q}$ et par r le rapport $\frac{p}{q}$ que l'on peut toujours considérer comme plus petit que l'unité en comptant la distance x sur le côté de l'angle le plus éloigné du point D; en substituant donc pour x sa valeur $\frac{p}{m}$ ou pour y sa valeur qm et pour p sa valeur qr, les deux équations donneront

$$(m) \qquad m^3 - c\,m^2 + crm - r^2 = 0.$$

Avant de discuter cette équation, il convient d'examiner les cas les plus simples pour quelques-uns desquels la solution est déjà connue.

Premier cas $p = 0$, ou $q = 0$.

2. Ces deux cas sont ceux où le point D se trouve sur un des côtés de l'angle. Si l'on a $q = 0$, l'équation (x) devient $x = 0$, l'équation y donne $y = pc$, ou $y = p \cos A$, ce qui

indique que la ligne minimum est PG perpendiculaire à AB. Si l'on avait $p=0$, on aurait pareillement $x=q \cos A$, ce qui donnerait pour ligne minimum QH perpendiculaire à AB.

Second cas $q=p$, ou $r=1$

3. L'équation (m) devient $m^3 - cm + cm^2 - 1 = 0$ qu'on peut mettre sous la forme

$$(m-1)(m^2+(1-c)m+1)=0$$

Cette équation donne pour seule racine réelle $m=1$, d'où l'on déduit $x=p, y=q$, ce qui indique que le triangle AGH est isocèle et que la ligne GH est perpendiculaire à la bissectrice AD.

Troisième cas, $\cos A = 0$, ou $A = 90°$.

4. Dans ce cas, l'équation (m) se réduit à $m^3 = r^2$ et donne $m = \sqrt[3]{r^2}$. On a pareillement $x^3 = pq^2$, $y^3 = qp^2$, d'où l'on déduit $x = q\sqrt[3]{\frac{p}{q}}$, $y = p\sqrt[3]{\frac{q}{p}}$. Ce cas offre un moyen simple de résoudre le problème de la duplication du cube, et en général de la multiplication du cube, en déterminant par un tâtonnement géométrique ou par la construction géométrique de l'équation (z), où x représente l'abscisse et z l'ordonnée, le minimum de l'ordonnée; si $p=2q$ on aura $x = q\sqrt[3]{2}$.

Discussion de l'équation générale.

5. L'équation en m ayant son dernier terme négatif, a nécessairement une racine positive; si l'angle A est obtus c devient négatif et l'équation prend la forme $m^3 + crm^2 - crm - r^2 = 0$. Cette équation offrant deux permanences de signe et une seule variation, ne peut admettre qu'une racine positive, et les racines négatives seraient étrangères à la ques-

tion, vu que la ligne qui en résulterait ne rencontrerait qu'un des côtés de l'angle ; il suffit donc de considérer le cas de l'angle aigu où c est positif, je fais évanouir le second terme de l'équation en faisant $m = m' + \frac{cr}{3}$, l'équation transformée devient

$$(m') \qquad m'^3 + \frac{cr(3 - cr)}{3} m' - \frac{(2c^3r^3 + 27r^2 - 9c^2r^2)}{27} = 0.$$

Puisque nous supposons $r < 1$, le second terme de l'équation précédente est nécessairement positif, conséquemment l'équation n'a qu'une racine réelle. On conçoit facilement que le cas de $r > 1$ se ramènerait à celui-ci en faisant $r = \frac{1}{r'}$ et $m = \frac{1}{n}$, car l'équation deviendrait

$$(n) \qquad n^3 - cr'n^2 + cr'n - r'^2 = 0$$

Quatrième cas, $r = \frac{3}{c}$, $r = \frac{c}{3}$

6. Dans ces deux cas, l'équation (m) ou l'équation (n) se réduira à une simple extraction de racines ; en effet, dans le premier cas, le second terme de l'équation (m') disparaîtra et l'on aura

$$m' = \sqrt[3]{r^2 - 1} = \sqrt[3]{\frac{9 - c^2}{c^2}}$$

Dans ce cas, r est nécessairement plus grand que 1. Dans le cas ou r est plus petit que 1, on opérerait sur l'équation (n) semblable à l'équation (m) et l'équation en n', privée de second terme, se réduirait à une extraction de racine dans le cas de $r' = \frac{3}{c}$ ou $r = \frac{c}{3}$ et l'on aurait

$$n' = n + cr' = \sqrt[3]{r'^2 - 1} = \sqrt[3]{\frac{9 - c^2.}{3}}$$

Limites des racines.

7. L'équation (m), si on veut la résoudre numériquement donne immédiatement les limites des racines en la mettant sous la forme.

$$m^3 - r^2 - crm\,(m - 1) = 0.$$

En effet, supposons d'abord c positif la supposition $m = \sqrt[3]{r^2}$, r étant supposé plus petit que l'unité, donnera pour le premier membre un résultat positif, puisque $m - 1$ sera négatif; la supposition de $m = r'$ donnera un résultat négatif $r^2\,(1 - c)\,(r - 1)$. Si c est négatif, la première supposition donnera un résultat négatif; et la seconde en faisant $m = 1$, donnera un résultat positif $1 - r^2$.

Dans le premier cas, les valeurs de m sont comprises entre $r^{\frac{2}{3}}$ et r, et dans le second, entre $r^{\frac{2}{3}}$ et 1. Ce qui fait voir que ces valeurs sont toujours fractionnaires.

On en conclut que si p est plus petit que q, ou $r < 1$, on a $\frac{p}{x} < 1$ ou $x > p$, et $\frac{y}{q} > 1$ ou $y > q$.

Observations.

8. Les équations (m) et (n) ne contenant que le rapport des coordonnées obliques p et q, font voir que pour tous les points situés sur la droite AD, les lignes minimum sont parallèles entre elles.

On voit aussi que les limites des racines sont indépendantes de l'angle A.

Note. La droite GDH est tangente au point D à l'enveloppe que décrit une droite de longueur constante, inscrite dans l'angle; l'enveloppe devant passer par le point D. (*V.* p. 265, t. I.)

SUR L'EXPRESSION DE L'ARC ELLIPTIQUE.

PAR M. MORIN,
Ancien notaire à Nogent (Eure-et-Loir).

« Si l'on coupe un cylindre droit par un plan oblique à sa base et qui rencontre cette base en un diamètre, on détachera ainsi du cylindre un segment qui sera circonscrit : 1° par un demi-cercle faisant partie du plan de la base ; 2° par une demi-ellipse faisant partie du plan sécant ; 3° une surface convexe comprise entre les périmètres du demi-cercle et de la demi-ellipse.

» Appelant h la hauteur du segment, r le rayon de la base, on sait que le volume du segment est $\frac{2}{3}hr^2$ et que sa surface *convexe* est $2hr$, ou équivalent au rectangle ayant pour base le diamètre et pour hauteur celle du segment. »

On en conclut que, si l'on développe la surface du cylindre, la demi-ellipse deviendra une courbe des cosinus ayant pour équation $y = \frac{h}{r}\cos x$; et que, pour rectifier l'arc d'une ellipse ayant pour demi-petit axe r et pour demi-grand axe $\sqrt{h^2+r^2}$, on a l'intégrale $\int \frac{h}{r^2}\sqrt{\frac{r^4}{h^2}+\sin^2 x}.\,dx$ (x représente ici un arc du cercle ayant r pour rayon) (*).

Cette différentielle est beaucoup plus commode à intégrer par série que celle qui est donnée par les moyens ordinaires.

(*) Legendre parvient au même résultat par une autre considération. (*V. Fonct. elliptique*, t. I, p. 15.) Tm.

NOTE

sur l'erreur commise en prenant un arc pour son sinus.

PAR M. AUGUSTE DELADÉRÉERE
Licencié ès sciences mathématiques et physiques.

Je me propose de prouver que $a - \sin a > \frac{1}{10}a^3$, quand $a < 90^0$.

Pour cela je pars de la relation connue $a > \sin a$ qui me donne : en changeant a en $\frac{a}{2}$; $\frac{a}{2} > \sin\frac{a}{2}$; $a > 2\sin\frac{a}{2}$

$a\cos\frac{a}{2} > 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} = \sin a$. Donc puisque $a\cos\frac{a}{2} > \sin a$, j'aurai

(1) $a - \sin a > a\left(1 - \cos\frac{a}{2}\right) = a \times 2\sin^2\frac{a}{4}$; mais dans le premier quadrant, à mesure que l'arc diminue le cosinus augmente, on a donc la relation $\cos\frac{a}{4} > \cos\frac{90}{4} = \cos\frac{1}{4}45 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$, pour $a < 90^0$; et comme $\sin\frac{1}{4}a = \cos\frac{1}{2}a$

$$\text{tang.}\ \frac{1}{4}a\text{, on a } \sin\frac{1}{4}a > \frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}\ \text{tang.}\ \frac{1}{4}a\ ;$$

$$\sin^2\frac{1}{4}a > \frac{1}{4}\left(2+\sqrt{2}\right)\text{tang.}^2\frac{1}{4}a$$

$$2\sin^2\frac{1}{4}a > \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{2}\right)\text{tang.}^2\frac{1}{4}a > \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{2}\right)\frac{1}{4^2}a^2 =$$

$= \frac{2+\sqrt{2}}{32}a^2$. Substituant dans (1), on trouve

$$a - \sin a > a \times \frac{2+\sqrt{2}}{32}a^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{32}a^3 > \frac{3{,}2}{32}a^3 = \frac{1}{10}a^3,$$

car $\sqrt{2} > 1{,}2$ et $2 + \sqrt{2} > 3{,}2$.

On obtient aussi une limite inférieure de l'erreur commise en prenant l'arc pour le sinus, à l'aide d'une démonstration qui n'est pas beaucoup plus compliquée, pour prouver que

$$a - \sin a < \frac{1}{4} a^3.$$

Si nous voulons appliquer au calcul de l'arc 10'', nous aurons

$$\text{arc } 10'' - \sin 10'' \begin{cases} < \frac{1}{4} (0,000049)^3 < 0,00000000000003 \\ > \frac{1}{10} (0,000048)^3 > 0,00000000000001 \end{cases}$$

Ainsi la dernière limite montre qu'on ne peut pas compter sur la quatorzième décimale, ou, en d'autres termes, que arc 10'' et sin 10'' n'ont que les treize premières décimales communes.

C'est tout ce que l'on peut se demander en trigonométrie élémentaire, où l'on veut seulement prouver la possibilité de onstruire les tables; d'ailleurs la valeur de $\sin a$ en série donne immédiatement le moyen de calculer les deux limites.

En effet on a

$$\sin a = a - \frac{1}{1.2.3} a^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5} a^5 - \ldots \text{ d'où}$$

$$a - \sin a = \frac{1}{6} a^3 \left(1 - \frac{1}{20} a^2 + \frac{1}{740} a^4 \ldots\ldots\right)$$

donc à cause que la série est convergente pour

$a < 1$, $a - \sin a < \frac{1}{6} a^3$ et à fortiori $a - \sin a < \frac{1}{4} a^3$ (*).

On a aussi, puisque les termes sont alternativement positifs et négatifs,

$a - \sin a > \frac{1}{6} a^3 \left(1 - \frac{1}{20} a^2\right)$, et comme dans le premier

(*) V. t. I, p. 274.

quadrant $a < 1,6$, on aura

$$a - \sin a > \frac{1}{6}a^3 \left\{1 - \frac{1}{20}(1,6)^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{6}a^3\left(1 - \frac{256}{2000}\right) > \frac{1}{6}a^3\left(1 - \frac{13}{100}\right) = \frac{1}{6} \times \frac{87}{100}a^3 > \frac{1}{7}a^3.$$

Ainsi, par cette méthode, on trouve que l'erreur est plus grande que $\frac{1}{7}$ du cube de l'arc, pour $a < 1$.

Ceci prouve qu'en général, on ne pourra trouver une fraction plus grande que $\frac{1}{7}a^3$ pour la limite supérieure, puisque $\frac{1}{6}a^3$ est plus petit, comme l'a démontré M. Lyonnet, pour un arc quelconque (t. II de ces annales, p. 218).

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 39 (*p.* 395, *t.* I).

PAR M. VIDAL,

Élève au collège de Montpellier.

Démontrer que la courbe enveloppe d'une droite de longueur constante s'appuyant sur les côtés d'un angle droit est une épicycloïde engendrée par le point d'une circonférence roulant intérieurement sur une circonférence quatre fois plus grande (*fig.* 92).

Pour arriver à la démonstration de ce théorème, je vais chercher l'équation de l'épicycloïde engendrée par une circonférence roulant intérieurement sur une circonférence quatre fois plus grande; ensuite je verrai si on peut l'identifier avec l'équation de la courbe enveloppe d'une droite de longueur constante s'appuyant sur les côtés d'un angle droit: équation que M. Merlieux a trouvé être, à la p. 266 du t. I^{er}.

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{l^2} \ldots \qquad (1)$$

l désignant la droite dont la longueur est constante. Soit o le centre de la circonférence fixe, dont je désignerai le rayon par $4a$, le rayon de la petite circonférence sera donc alors a. Soit A la position première du point qui décrit l'épicycloïde, je prendrai pour axe des y la droite oA, et pour axe des x une perpendiculaire à cette droite menée par le centre du cercle fixe. Supposons qu'au bout d'un certain temps le centre du cercle mobile se soit transporté en o', alors le point A se sera mû, de telle manière que la longueur de l'arc AG sera égale à la longueur de l'arc GM ; désignons par α la longueur de ces deux arcs. Nous savons qu'on peut mesurer un angle par le rapport de l'arc qu'il intercepte sur la circonférence au rayon, nous aurions donc

$$\mathrm{A}o\mathrm{G} = \frac{\alpha}{4a},$$

et

$$\mathrm{M}o'\mathrm{G} = \frac{\alpha}{a}.$$

Je mène les coordonnées du point M que je désignerai par x et y. Ensuite par le centre o' du cercle mobile je mène o'E parallèle à l'axe des y jusqu'à la rencontre de MC prolongé ; nous aurons alors

$$\mathrm{MC} = x = o'\mathrm{D} - \mathrm{ME}$$
$$\mathrm{MP} = y = o\mathrm{D} - o'\mathrm{E},$$

puisque o'E est parallèle à oD, l'angle Fo'E sera égal à AoG, et par suite à $\frac{\alpha}{4a}$. Je joins o'M, nous aurons

$$\mathrm{M}o'\mathrm{F} = \pi - \frac{\alpha}{a},$$

on aura par conséquent

$$\mathrm{M}o'\mathrm{E} = \pi - \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha}{4a} = \pi - \frac{3\alpha}{4a}$$

Dans le triangle rectangle oo'D on a

$$o'D = 3a \sin \frac{\alpha}{4a},$$

$$oD = 3a \cos \frac{\alpha}{4a}.$$

On a de même dans le triangle OME :

$$ME = a \sin \frac{3\alpha}{4a},$$

$$o'E = a \cos \frac{3\alpha}{4a}.$$

Nous aurons donc en définitive :

$$x = 3a \sin \frac{\alpha}{4a} - a \sin \frac{3\alpha}{4a},$$

$$y = 3a \cos \frac{\alpha}{4a} + a \cos \frac{3\alpha}{4a}.$$

Mais nous savons que l'on a :

$$\sin \frac{3\alpha}{4a} = 3 \sin \frac{\alpha}{4a} - 4 \sin^3 \frac{\alpha}{4a},$$

$$\cos \frac{3\alpha}{4a} = 4 \cos^3 \frac{\alpha}{4a} - 3 \cos \frac{\alpha}{4a}.$$

En remplaçant dans la valeur de x et y, il vient :

$$x = 4a \sin \frac{3\alpha}{4a},$$

$$y = 4a \cos \frac{3\alpha}{4a}.$$

De la première je tire :

$$\sin \frac{\alpha}{4a} = \sqrt[3]{\frac{x}{4a}},$$

$$\cos \frac{\alpha}{4a} = \sqrt[3]{\frac{y}{4a}},$$

faisons la somme des carrés de ces deux valeurs, et il vient

$$\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{16a^2}} = 1,$$

d'où

$$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{16a^2}.$$

Voilà l'équation de l'épicycloïde ; nous voyons que cette équation devient identique avec l'équation (1) si on pose

$$l = 4a;$$

l'épicycloïde décrite est donc la courbe enveloppe d'une droite s'appuyant sur les côtés d'un angle droit dont la longueur serait égale au rayon du cercle fixe. C. Q. F. D.

Nota. Si le diamètre de la circonférence mobile devenait égal au rayon du cercle fixe, on trouvera facilement ce théorème de Lahire, que la courbe droite décrite est une ligne droite passant par le centre et par le point A.

La méthode que j'ai donnée pour trouver l'équation de l'épicycloïde n'est qu'un cas particulier de celle que donne Euler dans son introduction à l'analyse des infiniment petits (l. 11, § 523), méthode qui conduit à l'équation générale de l'épicycloïde tant rallongée que raccourcie.

Un cercle mobile a son centre sur une droite fixe et touche un cercle fixe; quel est le lieu du pôle d'une seconde droite fixe relativement à ce cercle mobile; que devient ce lieu, lorsque le cercle fixe se réduit à un point, ou devient une droite? (Q. 74, p. 328.)

PAR M. VIDAL,
Elève du Collége de Montpellier

—

1. Je prendrai pour axe des x la droite sur laquelle doit

se trouver le centre du cercle mobile, et pour axe des y la perpendiculaire abaissée sur cette droite par le centre du cercle fixe. Si je désigne par b l'ordonnée du centre du cercle fixe et par r son rayon, son équation sera

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Je désigne par a et r', l'abscisse du centre et le rayon du cercle mobile, son équation serait

$$(x - a)^2 + y^2 = r'^2. \tag{1}$$

Il faut maintenant exprimer que ce cercle est tangent au cercle fixe. Il suffit d'écrire

$$r'^2 = (r \pm \sqrt{a^2 + b^2})^2.$$

Dans le deuxième membre, il faudra prendre le radical avec le signe $\pm$ parce que la longueur de la perpendiculaire peut être prise positivement ou négativement. En remplaçant r'^2 par cette valeur dans l'équation (1) il vient

$$(x - a)^2 + y^2 = (r \pm \sqrt{a^2 + b^2})^2, \tag{2}$$

qui est maintenant l'équation d'un cercle ayant son centre sur la droite fixe et tangent au cercle donné. Soit $y = mx + g$ l'équation de la droite fixe ; le pôle de cette droite se trouvera sur la perpendiculaire abaissée du centre du cercle sur cette droite, ses coordonnées devront donc satisfaire à l'équation

$$y = -\frac{1}{m}(x - a). \tag{3}$$

Je désigne par (α,β) les coordonnées d'un point quelconque pris sur la droite fixe ; si par ce point je mène deux tangentes au cercle (2), l'équation de la corde de contact sera

$$\alpha x + \beta y - a\alpha - ax + a^2 = (r \pm \sqrt{a^2 + b^2})^2.$$

Il faut exprimer que le point (α,β) est sur la droite fixe, pour cela il n'y a qu'à remplacer β par $m\alpha + g$, cette dernière équation devient

$$\alpha x + (m\alpha + g)y - a\alpha - ax + a^2 = \left(r \pm \sqrt{a^2 + b^2}\right)^2.$$

Le pôle de la droite devra encore se trouver sur cette droite; par conséquent, si je désigne par x et y les coordonnées de ce point, il n'y a plus qu'à éliminer a, entre cette équation et l'équation (3); de la première, je tire $a = my + x$; en portant dans la deuxième, il vient

$$\alpha x + (m\alpha + g)y - (my + x)\alpha - (my + x)x + (my + x)^2 =$$
$$= \left(r \pm \sqrt{(my + x)^2 + b^2}\right)^2.$$

ou bien en réduisant,

$$gy - (my + x)x + (my + x)^2 = \left(r \pm \sqrt{(my + x)^2 + b^2}\right)^2 =$$
$$= r^2 + (my + x)^2 + b^2 \pm 2r\sqrt{(my + x)^2 + b^2},$$

d'où

$$gy - (my + x)x = r^2 + b^2 \pm 2r\sqrt{(my + x)^2 + b^2}; \qquad (4)$$

c'est l'équation du lieu cherché.

II. Les perpendiculaires abaissées du centre du cercle mobile sur la droite fixe rencontrent ces cercles en des points qui forment un lieu ; cherchons l'équation de ce lieu, pour cela il n'y a qu'à éliminer a entre les équations (2) et (3); en faisant cette élimination il vient

$$\{x - (my + x)\}^2 + y^2 = \left(r \pm \sqrt{(my + x)^2 + b^2}\right)^2,$$

d'où

$$(m^2 + 1)y^2 = \left(r \pm \sqrt{(my + x)^2 + b^2}\right)^2,$$

d'où

$$y\sqrt{1 + m^2} = r \pm \sqrt{(my + x)^2 + b^2},$$

en faisant passer r dans le premier membre et élevant au carré

$$y^2(1 + m^2) + r^2 - 2ry\sqrt{1 + m^2} = (my + x)^2 + b^2,$$

d'où

$$y^2 + r^2 \pm 2ry\sqrt{1+m^2} = x^2 + 2mxy + b^2. \qquad (5)$$

C'est l'équation d'une hyperbole équilatère. Je vais faire marcher en même temps la discussion de cette courbe et celle de la courbe demandée.

III. L'équation (4), dans le cas général du quatrième degré, ne présente rien de remarquable. Mais dans des hypothèses particulières, c'est-à-dire pour des positions remarquables des données de la question, le lieu prend diverses formes que nous allons examiner les unes après les autres.

1° Supposons que le centre du cercle fixe se trouve à l'origine, nous aurons alors $b=0$, les deux équations (4) et (5) deviennent alors

$$gy - (my+x)x = r^2 \pm 2r(my+x);$$
$$y^2 + r^2 \pm 2ry\sqrt{1+m^2} = x^2 + 2mxy.$$

Lorsque m est différent de zéro, c'est-à-dire lorsque la droite fixe n'est pas parallèle à l'axe des r, les deux équations qu'on déduirait de la première représentent deux hyperboles semblables et semblablement placées, vu les termes du deuxième degré qui sont les mêmes. On trouverait très facilement les coordonnées du centre et la longueur des axes de ces hyperboles. Ces deux hyperboles ont une asymptote parallèle à l'axe des y, les deux autres sont toutes les deux perpendiculaires à la direction de la droite fixe. La deuxième équation est toujours celle de deux hyperboles équilatères qui ne présentent rien de remarquable.

Si en même temps que nous avons $b=0$, nous avions aussi $m=0$, c'est-à-dire si la droite fixe DE était parallèle à l'axe des x, la première équation deviendrait (*fig.* 90)

$$gy - x^2 = r^2 \pm 2rx,$$

et la deuxième

$$y^2 + r^2 \pm 2ry = x^2.$$

Dans la première je fais passer x^2 dans le deuxième membre, et il vient

$$(x \pm r)^2 = gy,$$

$$\text{d'où } x = \pm r \pm \sqrt{gy}.$$

Le lieu est alors deux paraboles, égales, ayant pour paramètre g, dont les sommets sont aux deux points A, A', extrémités du diamètre du cercle donné, et qui ont pour axes les deux perpendiculaires à l'extrémité de ce diamètre ; ces deux paraboles se trouveront au-dessus de l'axe des x, si la droite DE se trouve au-dessus de cet axe ; et elles se trouveront au-dessous, si la droite se trouve au-dessous. Ces deux paraboles couperont l'axe des y au même point c et à une distance de l'origine égale à $\frac{r^2}{g}$. Dans le cas de la figure ce point se trouvera dans l'intérieur du cercle donné.

Le deuxième lieu devient dans ce cas-ci quatre droites, que l'on obtiendra en formant le carré inscrit dans le cercle donné qui aurait les sommets aux points A_1 B, A_1' B_1'.

Si nous avions maintenant, outre $b = 0$ et $m = 0$, $g = 0$, le deuxième lieu ne changerait pas, ce qui est assez évident ; le premier se réduirait aux deux droites AF, A'G, qui, dans le cas précédent, étaient les axes des deux paraboles que nous avions trouvées ; c'est ce qu'aurait pu nous montrer l'intuition, puisque les deux paraboles que nous avions trouvées dans le cas précédent avaient pour paramètre g.

Si la droite donnée était perpendiculaire à l'axe des x, on trouverait l'axe des x et deux droites parallèles à l'axe des y.

Supposons maintenant que le rayon du cercle fixe devienne égal à zéro ; c'est-à-dire qu'il se réduise à un point ; examinons ce que devient le lieu dans les diverses hypothèses que nous avons discutées ci-dessus. Les équations des deux lieux que nous examinons deviennent.

$$gy - (my + x)\,x = b^2, \qquad y^2 = x^2 + 2mxy + b^2.$$

Lorsque nous avons $b \gtrless 0$, $m \gtrless 0$, $g \gtrless 0$, la première de ces équations représente une hyperbole ayant une asymptote parallèle à l'axe des y, et l'autre perpendiculaire à la droite donnée ; la deuxième est celle d'une hyperbole équilatère dont le centre est à l'origine des coordonnées. Si $b \gtrless 0$, $m = 0$, $g \gtrless 0$, le premier lieu devient une parabole, ayant pour axe l'axe des y, et pour paramètre g ; le deuxième devient une hyperbole équilatère dont les asymptotes, seront les bissectrices des angles des axes et dont les sommets seront sur l'axe des y, à des distances de l'origine égales à b. Si $b \gtrless 0$; $m = 0$, $g = 0$, le premier lieu ne peut plus exister ; résultat que nous aurions pu prévoir, et le deuxième ne change pas. Supposons maintenant que b étant toujours différent de zéro, la droite fixe devienne parallèle à l'axe des y ; alors le premier lieu se réduit à l'axe des x et à une parallèle à l'axe des y, et le deuxième devient l'origine.

Soit $b = 0$, $m \gtrless 0$, $g \gtrless 0$, alors le premier lieu devient une hyperbole passant par l'origine, et le deuxième se réduit à deux droites passant aussi par l'origine. Si $b = 0$, $m = 0$. $g \gtrless 0$, le premier lieu devient une parabole, ayant son sommet à l'origine, l'axe des y pour axe et g pour paramètre. Le deuxième se réduit aux bissectrices des angles des axes Enfin, si $b = 0$, $m = 0$, $g = 0$, le premier lieu se réduit à l'axe des y, et le deuxième ne change pas. Voilà tous les cas qui peuvent se présenter lorsqu'on a un point fixe au lieu d'un cercle fixe.

Supposons maintenant, qu'au lieu d'un point fixe, nous ayons une droite fixe ; alors en prenant pour origine le point où cette droite rencontre celle sur laquelle doit se trouver le centre du cercle mobile, et pour axe des y une perpendiculaire à cette droite, et désignant par $y = m'x$ l'équation de la droite à laquelle le cercle mobile doit être constamment tangent, et $y = mx + g$, l'autre droite, le lieu sera

$$(1 + m'^2)\, gy = (1 + m'^2)(my + x)\, x - (my + x)^2.$$

Equation qui représente dans le cas général une hyperbole passant par l'origine des coordonnées, et qu'on discuterait comme nous l'avons fait dans les cas précédents. On trouverait, dans tous les cas, une hyperbole, une parabole ou des lignes droites (*).

QUESTION D'EXAMEN,

PAR M. L. A. LE COINTE.

Théorème. Démontrer que la ligne qui passe par les milieux des cordes concourantes à l'origine, et appartenant à la courbe ayant pour équation

$$y^2 + x^2 - 2ax + \mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right) = 0,$$

cette courbe est supposée rapportée à des axes rectangulaires, et $\mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right)$ est une fonction d'un degré quelconque en $\frac{y}{x}$ est un cercle dont le centre est sur l'axe des x, à une distance de l'origine égale à $\frac{a}{2}$, et qui est tangent à l'axe des y.

Soit $y = mx$ l'équation d'une des cordes concourantes à l'origine, si nous remplaçons dans l'équation

$$y^2 + x^2 - 2ax + \mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right) = 0,$$

(*) Cette belle solution renferme la théorie des caustiques. Tm.

y par mx, nous aurons l'équation

$$(m^2 + 1)\, x^2 - 2ax + \mathrm{F}\,(m) = 0, \qquad (1)$$

qui est simplement du second degré en x; mais cette équation nous donnant les abscisses des points de rencontre de la corde $y = mx$ avec la courbe, il en résulte que toute droite concourante à l'origine ne rencontre la courbe dont l'équation est $y^2 + x^2 - 2ax + \mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right) = 0$, qu'en deux points.

Désignons par x' l'une des racines de l'équation (1), ou l'abscisse de l'un des points de rencontre de la corde $y = mx$ avec la courbe, et par x'' l'autre racine, ou l'abscisse du second point d'intersection de la même corde avec la courbe; alors, les coordonnées du premier point d'intersection, seront : x' pour l'abscisse, mx' pour l'ordonnée, et celles du second seront : x'' pour l'abscisse, mx'' pour l'ordonnée.

Cela posé, désignons par x_1, y_1 les coordonnées du point milieu de la corde dont l'équation est $y = mx$, on aura

$$x_1 = \frac{x' + x''}{2},$$

mais d'après l'équation (1), on a

$$x' + x'' = \frac{2a}{m^2 + 1}, \text{ par conséquent } x_1 = \frac{a}{m^2 + 1};$$

$$\text{on a ensuite } y_1 = mx_1 = \frac{ma}{m^2 + 1},$$

de la valeur d'x_1, on déduit $m = \pm\sqrt{\frac{a - x_1}{x_1}}$,

et substituant cette valeur de m dans celle de y_1, on aura

$$y_1 = \pm\sqrt{(a - x_1)\, x_1}, \text{ d'où } y_1^2 + x_1^2 = ax_1,$$

telle est l'équation qui représente le lieu géométrique des points milieux des cordes concourantes à l'origine.

On voit de suite que ce lieu géométrique est un cercle passant par l'origine, et ensuite en remarquant que l'équation $y_1^2 + x_1^2 = ax_1$ peut se mettre sous la forme

$$y_1^2 + \left(x_1 - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

on reconnaît immédiatement que ce cercle a son centre sur l'axe des x, que son rayon est égal à $\frac{a}{2}$, et qu'il est tangent à l'axe des y en vertu de ce qu'il passe par l'origine.

(C.Q.F.D.)

Application. Supposons que $F\left(\frac{y}{x}\right)$ se réduise à $\frac{y_0}{x_0}$ ou à 1, alors l'équation $y^2 + x^2 - 2ax + F\left(\frac{y}{x}\right) = 0$ deviendra $y^2 + x^2 - 2ax + 1 = 0$, ou bien $y^2 + (x-a)^2 = a^2 - 1$, équation qui représente un cercle.

Si l'on construit le cercle représenté par cette équation, et celui représenté par celle-ci : $y^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$; on verra facilement que ce dernier cercle est le lieu des points milieux des cordes concourantes à l'origine et appartenant à la courbe.

Remarque. Le second cercle passe par le centre du premier, puisque son équation est satisfaite par $x = a, y = 0$.

Observation. Cette question peut être considérée comme faisant suite à celle que M. Midy a donnée dans les Nouvelles Annales, tome I^er^, page 481.

SOLUTIONS DES PROBLÈMES 27 (p. 247), 15 et 18 (p. 351), 38 (p. 395), t. I^er.

PAR M. A. VACHETTE,
Licencié ès sciences.

Problème 27.

Soit la première équation $f(x)=0$ du degré m,
la deuxième $\varphi(y)=0$ du degré n,
l'équation cherchée $\psi(\zeta)=0$ sera du degré mn.

Désignons par S les sommes de $f(x)$, S′ celles de $\varphi(y)$, S″ celles de $\psi(\zeta)$.

Cherchons généralement S''_{2p} et S''_{2p+1}

$$S''_{2p}=(y-x)^{2p}+\ldots=mn(S'_{2p}+S_{2p})-$$
$$-\frac{2p}{1}\Sigma(y^{2p-1}x+yx^{2p-1})+\frac{2p(2p-1)}{1\,.\,2}\Sigma(y^{2p-2}x^2+y^2x^{2p-2})-$$
$$-\ldots\pm\frac{2p(2p-1)\ldots(p+1)}{1\,.\,2\,.\quad p}\Sigma\, x^py^p.$$

On a $\pm$ suivant que p est pair ou impair

$$S''_{2p+1}=(y-x)^{2p+1}+\ldots=mn(S'_{2p+1}+S_{2p+1})-$$
$$-\frac{2p+1}{1}\Sigma(y^{2p}x-yx^{2p})+\frac{(2p+1)2p}{1\,.\,2}\Sigma(y^{2p-1}x^2-y^2x^{2p-1})-$$
$$-\ldots\frac{(2p+1)\ldots(p+2)}{1\,.\,2\,.\quad p}\Sigma(y^px-yx^p).$$

On a $\pm$ suivant que p est pair ou impair,

ou remarquant que $\Sigma(y^kx^{k'}+y^{k'}x^k)=mn(S'_kS_{k'}+S'_{k'}S_k)$, on aura

$$S''_{2p} = mn \left\{ (S_{2p} + S'_{2p}) - \frac{2p}{1} (S'_{2p-1} S_1 + S'_1 S_{2p-1}) + \right.$$

$$+ \frac{2p(2p-1)}{1 \cdot 2} (S'_{2p-2} S_2 + S'_2 S_{2p-2}) -$$

$$\left. - \ldots \pm \frac{2p(2p-1)..(p+1)}{1 \cdot 2 \ldots p} S'_p S_p \right\}$$

$$S''_{2p+1} = mn \left\{ (S'_{2p+1} - S_{2p+1}) - \frac{2p+1}{1} (S'_{2p} S^1 - S'_1 S_{2p}) + \right.$$

$$+ \frac{(2p+1)2p}{1 \cdot 2} (S'_{2p-1} S_2 - S'_2 S_{2p-1}) -$$

$$\left. - \ldots \pm \frac{(2p+1)\ldots(p+2)}{1 \cdot 2 \ldots p} (S'_{p+1} S_p - S'_p S_{p+1}) \right\}$$

Problème 15.

Appliquons à $\begin{array}{ll} f(x) = x^2 - px + q & m = 2 \\ \varphi(y) = y^3 - ay^2 + by - c & n = 3 \end{array}$

le degré de $\psi(\zeta)$ sera 6

$$S''_1 = 6 (S'_1 - S_1)$$

$$S''_2 = 6 \left\{ (S'_2 + S_2) - 2S'_1 S_1 \right\}$$

$$S''_3 = 6 \left\{ (S'_3 - S_3) - 3(S'_2 S_1 - S'_1 S_2) \right\}$$

$$S''_4 = 6 \left\{ (S'_4 + S_4) - 4(S'_3 S_1 + S'_1 S_3) + 6S'_2 S_2 \right\}$$

$$S''_5 = 6 \left\{ (S'_5 - S_5) - 5(S'_4 S_1 - S'_1 S_4) + 10 (S'_3 S_2 - S'_2 S_3) \right\}$$

$$S''_6 = 6 \left\{ (S'_6 + S_6) - 6(S'_5 S_1 + S'_1 S_5) + 15(S'_4 S_2 + S'_2 S_4) - \right.$$

$$\left. - 40 S'_3 S_3 \right\}$$

Si $f(x) = 0$ et $\varphi(y) = 0$ ont K racines communes, l'équation $\psi\zeta = 0$ a K racines nulles; on a donc ainsi un moyen de trouver le degré du plus grand commun diviseur entre deux polynômes d'une lettre, à coefficients numériques.

Problème 18.

Proposons-nous de chercher les sommes, deux à deux, des racines de la première avec celles de la deuxième ; on aura :

$$S''_{2p} = mn \left\{ (S_{2p}+S'_{2p}) + \frac{2p}{1}(S_{2p-1}S'_1 + S'_{2p-1}S_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{2p(2p-1)}{1\ .\ 2}(S_{2p-2}S'_2+S'_{2p-2}S^2) + \frac{2p(2p-1)\ldots.(p+1)}{1\ .\ 2\ .\ .\ \ p}S_pS'_p \right\}$$

$$S''_{2p+1} = mn \left\{ \left(S_{2p+1} + S'_{2p+1}) + \frac{2p+1}{1} \right) S_{2p}S'_1 + S'_{2p}S_1) + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{(2p+1)\ldots.(p+2)}{1\ .\ 2\ .\ \ p}(S_{p+1}S'_p + S'_{p+1}S_p) \right\}$$

Solution du problème 38 (p. 395).

L'équation

$$x^n - nax^{n-1} - \frac{n(n-1)}{1\ .\ 2}a^2x^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}a^3x^{n-3} - \text{etc.} - a^n = 0$$

revient à

$$x^n = (x+a)^n - x^n,$$

ou

$$2x^n = (x+a)^n\ ;$$

extrayant les racines $n^{\text{ièmes}}$ on aura

$$x\sqrt[n]{2} = x + a \qquad x = \frac{a}{\sqrt[n]{2} - 1}$$

mais $\sqrt[n]{2}$ a n valeurs que l'on obtient en multipliant $\sqrt[n]{2}$ prise arithmétiquement par les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1, donc les n valeurs de 2 seront

$$x = \frac{a}{\sqrt[n]{2}\left(\cos\frac{u\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{u\pi}{n}\right) - 1},$$

u ayant les valeurs 0, 1, 2,....(n—1)

DÉTERMINATION DES TANGENTES AUX COURBES POLAIRES,

PAR M. RISPAL,
Élève du collége de Rouen.

Soit ABC (*fig.* 103), une courbe dont l'équation polaire est $\rho = f\omega$; menons une sécante qui la coupe en B et en C. Menons les rayons vecteurs OB, OC. Soit

$OB = \rho$, $BOD = \omega$, $COB = h$, $OC = \rho_1$, $BDA = \alpha$, $BC = n$.

Il est clair que l'on a $\rho = f\omega$, $\rho_1 = f(\omega + h)$; à la limite, lorsque la sécante est devenue tangente, $h = 0$, si donc nous pouvons déterminer α dans ce cas, nous connaîtrons alors la direction de la tangente.

Le triangle COB nous donne $n^2 = \rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \cos h$,

(1) ou $\qquad n^2 = f^2\omega + f^2(\omega + h) - 2f\omega f(\omega + h)\cos h.$

Le même triangle donne encore

(2) $$\frac{\sin C}{\sin h} = \frac{f(\omega)}{n};$$

or $\qquad C + \omega + h + \alpha = \pi, \quad$ donc $\quad C = \pi - [\omega + h + \alpha]$

et $\qquad \sin C = \sin(\omega + \alpha + h);$

l'équation (2) devient ainsi

$$\sin(\omega + \alpha + h) = \frac{f\omega . \sin h}{n};$$

de cette dernière, on tire $n = \dfrac{f\omega . \sin h}{\sin(\omega + \alpha + h)}$

et en substituant cette valeur dans l'équation (1), on a

$$\frac{f^2\omega \sin^2 h}{\sin^2(\omega + \alpha + h)} = f^2\omega + f^2(\omega + h) - 2f\omega f(\omega + h)\cos h,$$

d'où

$$\sin^2(\omega + \alpha + h) = \frac{f^2\omega(1 + \cos h)(1 - \cos h)}{f^2\omega + f^2(\omega + h) - 2f\omega f(\omega + h)\cos h}$$

Cette dernière valeur se réduit à $\frac{0}{0}$ pour $h=0$, ce qui nous indique la présence d'un facteur commun que nous devons faire disparaître.

On sait que l'on peut faire, successivement, les dérivées des deux termes de la fraction, jusqu'à ce que l'on en trouve une qui ne se réduise plus à $\frac{0}{0}$ pour $h=0$, et la valeur que l'on trouve alors est celle que doit prendre en effet, la fonction.

Ici la dérivée première prise par rapport à h, devient encore indéterminée. Cette dérivée est ici

$$\frac{f^2\omega \sin h \cos h}{f'(\omega+h)f'(\omega+h)-f\omega f''(\omega+h)\cos h+f\omega f'(\omega+h)\sin h}$$

et lorsqu'on y fait $h=0$, elle devient $\frac{0}{0}$.

Si on passe à la dérivée seconde, on a

$$\frac{f^2\omega\cos^2 h - f^2\omega \sin^2 h}{f'^2(\omega+h)+f'(\omega+h)f''(\omega+h)-f\omega f'''(\omega+h)\cos h + f\omega f''(\omega+h)\sin h+f\omega f'(\omega+h)\sin h+f\omega f'(\omega+h)\cos h}$$

et lorsqu'on y fait $h=0$, on trouve pour la limite cherchée

$$\sin^2(\omega+\alpha)=\frac{f^2\omega}{f^2\omega+f'^2\omega},$$

ou $\sin^2(\omega+\alpha)=\frac{\rho^2}{\rho^2+\rho'^2}$ (en désignant par ρ' la dérivée de ρ),

valeur qui détermine $\omega+\alpha$ et par suite α.

Comme on est obligé de faire deux dérivations, on en conclut que le facteur commun était h^2.

Au lieu d'employer la méthode des dérivations successives qui tient au calcul différentiel, on peut suivre une voie plus élémentaire, mais aussi plus longue.

Nous avions donc trouvé

$$\sin^2(\omega+\alpha+h)=\frac{f^2\omega(1+\cos h)(1-\cos h)}{f^2\omega+f^2(\omega+h)-2f\omega f(\omega+h)\cos h}$$

on sait par la trigonométrie que $\cos h = 1-\frac{h^2}{1.2}+\ldots,$

donc $\qquad 1-\cos h = h^2\left(\frac{1}{1.\ 2}-\frac{h^2}{1.\ 2.\ 3.\ 4}+\ldots\right);$

le numérateur sera donc

$$P=f^2\omega(1+\cos h)\,h^2\left[\frac{1}{1.\ 2}+\ldots \text{ termes en } h\right];$$

passons au dénominateur.

On a $\qquad f(\omega+h)=f\omega+\frac{h}{1}f'\omega+\frac{h^2}{1.\ 2}f''\omega+\ldots,$

donc $\quad f^2(\omega+h)=f^2\omega+2f\omega.f'\omega\, h+\left.\begin{matrix}f\omega f''\omega\\ +f'^2\omega\end{matrix}\right|h^2+\ldots$

et $\qquad 2f\omega f(\omega+h)\cos h=2f^2\omega\cos h+2f\omega f'\omega\cos h.\, h+$
$+f\omega f''\omega\cos h.\ h^2+\ldots;$

donc, en désignant le dénominateur par Q, on aura

$$Q=(1-\cos h)\,[2f^2\omega+2f\omega f'\omega h+\ldots]+$$
$$+h^2\,[f'^2\omega+\text{ termes en } h];$$

remplaçant $1-\cos h$ par sa valeur trouvée plus haut, on a pour la fraction $\sin^2(\omega+\alpha+h)$.

$$\frac{f^2\omega(1+\cos h)\left[\frac{1}{1.2}+\text{ termes en } h\right]}{\left[\frac{1}{1.2}+\text{termes en } h\right][2f^2\omega+\text{term. en } h]+[f'^2\omega+\text{term. en } h]}$$

Si maintenant on y fait $h=0$ on trouve

$$\sin^2(\omega+\alpha)=\frac{f^2\omega}{f^2\omega+f'^2\omega},$$

car les termes en h disparaissent lorsque l'on fait $h=0$, et comme $\rho=f\omega$, on aura $\sin^2(\omega+\alpha)=\frac{\rho^2}{\rho^2+\rho'^2}$; de là on tire $\cos^2(\omega+\alpha)=\frac{\rho'^2}{\rho^2+\rho'^2}$, et par suite $\operatorname{tg}^2(\omega+\alpha)=\frac{\rho^2}{\rho'^2}$, et enfin $\operatorname{tg}(\omega+\alpha)=\pm\frac{\rho}{\rho'}$.

Comme application prenons l'équation $\rho = a \cos \omega$ qui en coordonnées rectangulaires, représente le cercle $y^2 = ax - x^2$; on a

$\rho' = -a \sin \omega$, d'où $\operatorname{tg}(\omega + \alpha) = -\dfrac{1}{\operatorname{tg} \omega}$, et comme $\operatorname{tg} \omega =$

$= \dfrac{y'}{x'}$, $\operatorname{tg}(\omega + \alpha) = -\dfrac{x'}{y'}$, $\operatorname{tg}''(\omega + \alpha) = \dfrac{\operatorname{tg} \omega + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} \alpha} =$

$= \dfrac{y' + x' \operatorname{tg} \alpha}{x' - y' \operatorname{tg} \alpha} = -\dfrac{x'}{y'}$, d'où $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{y'^2 - x'^2}{2 y' x'}$; or comme

$y'^2 = ax' - x'^2$, on a $tg\ \alpha = \dfrac{a - 2x'}{2 y'}$.

Or si on différencie l'équation $y^2 = ax - x^2$, on trouve $2 y' dy' = adx' - 2x' dx'$, d'où l'on tire en effet

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{a - 2 x'}{2 y'}.$$

Il est inutile de multiplier les exemples.

N. B. En développant la formule, on trouve

$\operatorname{tg} \alpha = -\dfrac{\rho + \rho' \operatorname{tg} \omega}{\rho' - \rho \operatorname{tg} \omega}$. On aurait pu y arriver plus rapidement de la manière suivante : en effet $tg\ \alpha = \dfrac{dy}{dx}$ comme on sait; si on passe de là aux coordonnées polaires, $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{d\,(\rho \sin \omega)}{d\,(\rho \cos \omega)} =$

$= \dfrac{\sin \omega .\ d\rho + \rho \cos \omega .\ d\omega}{\cos \omega .\ d\rho - \rho \sin \omega .\ d\omega}$; divisant les deux termes par $\cos \omega .\ d\omega$ on trouve $tg\ \alpha = \dfrac{\rho + \dfrac{d\rho}{d\omega} \operatorname{tg} \omega}{\dfrac{d\rho}{d\omega} - \rho \operatorname{tg} \omega}$ or $\dfrac{d\omega}{d\rho} = \rho'$; et l'angle α est compté ici dans un sens inverse. On retombe ainsi sur l'équation $\operatorname{tg} \alpha = -\dfrac{\rho + \rho' \operatorname{tg} \omega}{\rho' - \rho \operatorname{tg} \omega}$.

BIBLIOGRAPHIE.

Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire, par H.-Ch. de Lafrémoire, ancien élève de l'École polytechnique, répétiteur de mathématiques au collége Louis-le-Grand ; 1 vol. in-8° de 439 pages, 13 planches gravées de 359 fig. 1844 (*).

En visitant une collection, on examine le nombre, la qualité des matériaux, leur arrangement successif, allant du simple au composé, et ensuite la classification, qui permet de retrouver facilement chaque objet et d'établir des comparaisons d'identités ou de différences. C'est sous ces divers points de vue qu'il faut considérer cette collection de Théorèmes et de Problèmes. L'ouvrage est divisé en quatre parties · 1° *la géométrie plane* (p. 1-344), renfermant 389 questions et propositions sur les perpendiculaires, les parallèles, les triangles, les quadrilatères, les polygones, les angles et les cercles ; 2° *géométrie de l'espace* (p. 345-413), contenant 56 problèmes sur les tétraèdres et les trois corps ronds ; 3° *exemples de calcul numérique* (p. 404-415), l'on y trouve 19 exemples d'évaluations numériques de divers volumes et aires ; 4° *problèmes à résoudre* (p. 416-439), en tout 180 problèmes, savoir : 153 sur la géométrie plane et 27 sur la géométrie de l'espace. Les solutions peuvent se découvrir à l'aide des objets traités dans les trois premières parties. En général toutes ces questions sont du genre *facile* et parfois trop facile. Il paraît que dans l'arrangement l'auteur a suivi le plan de Legendre, et il résout même de nouveau les problèmes contenus dans ce dernier ouvrage ; ce qui forme peut-être double emploi.

Les méthodes de raisonnement sont aussi dans le genre graphique des anciens et désigné abusivement sous le nom de

(*) Chez Carilian-Gœury et Vor Dalmont ; imprimerie de Hennuyer et Turpin : Hibon, graveur. Prix : 6 fr.

méthode synthétique; l'analyse et la synthèse sont deux modes de procéder inhérents à la nature de l'esprit humain, aussi intimement liés à la vie intellectuelle que l'inspiration et l'expiration à la vie physique. On fait de l'analyse en *géométrie pure* et de la synthèse en *algèbre pure.* Et nous faisons souvent l'une et l'autre, comme M. Jourdain, de la prose, sans nous en douter. De là aussi cette question souvent soulevée sur les avantages d'une méthode sur l'autre; question aussi raisonnable que de demander lequel est préférable dans le cœur, du ventricule droit ou du ventricule gauche. Cette digression n'est pas inutile; car il règne à ce sujet une confusion d'idées que l'excellente dissertation de M. Gergonne n'a pas encore dissipée (*Annales*, VII, p. 345).

L'ouvrage de M. de Lafrémoire étant d'une utilité pratique et générale, et devant obtenir plusieurs éditions, nous croyons indispensable d'en indiquer les lacunes.

On ne dit pas un seul mot de la *proportion harmonique.* Toutefois, la théorie des transversales, la géométrie de situation, les méthodes intuitives de l'école de Monge, sont presque entièrement établies sur les propriétés qui se déduisent de la proportion harmonique, et ces déductions sont moins pénibles que celles qui sont relatives à la proportion géométrique.

Dans une prochaine édition, il serait convenable de faire disparaître beaucoup de problèmes insignifiants et de les remplacer par ceux que nous venons d'indiquer. Sans attendre cette édition, nous engageons l'auteur à publier de suite une table des matières. Au milieu de cet océan de problèmes et de théorèmes, comment trouver celui dont on a besoin? C'est un genre d'omission d'autant moins explicable que l'absence d'une préface prive le lecteur de toute espèce de direction. Sans ce complément, nous craignons que le succès de l'ouvrage ne soit gravement compromis. Tm.

SUR LA RECHERCHE DES LIMITES DES RACINES D'UNE ÉQUATION,

ET SUR LA DETERMINATION DES RACINES COMMENSURABLES

PAR M. THIBAULT,
Professeur à Paris, licencié ès sciences mathématiques et ès sciences physiques.

—

I. *Sur la recherche des limites des racines.*

On démontre dans tous les traités d'algèbre que $\sqrt[n]{N}+1$ est une limite supérieure des racines positives de l'équation $x^m+P_1x^{m-1}+\ldots\ldots+P_m=0$, N étant le plus grand des coefficients négatifs et n le nombre des termes qui précèdent le premier de ces coefficients. Cette limite, comme l'on sait, est presque toujours beaucoup trop élevée; la méthode de Lagrange (*) donne une limite généralement plus rapprochée, mais qui, pour l'ordinaire, surpasse de plusieurs unités celle qu'on trouve par la méthode de Newton. Or on peut, comme nous allons voir, parvenir au même but que par cette dernière méthode, par la décomposition du premier membre en diverses parties, décomposition qui n'est soumise à aucune règle particulière, et en suivant une marche plus simple, plus prompte, qui n'exige pas, comme celle de Newton, l'emploi des polynômes dérivés et souvent des substitutions nombreuses.

1. Observons d'abord que *la substitution d'un nombre* a

(*) Rappelons que la limite de Lagrange est $\sqrt[n]{N}+\sqrt[n']{N'}$, cette expression représentant la somme des deux plus grands nombres qu'on obtient en extrayant de chaque coefficient négatif la racine ayant pour indice le nombre de termes qui précèdent ce coefficient. (Voir les Nouvelles Annales de mathématiques, t. I, page 243.)

pour x *dans le polynôme* $P_0x^m + P_1x^{m-1} + \ldots\ldots + P_m$ *peut s'effectuer en calculant successivement, chacune au moyen de la précédente, les quantités*

$$\begin{aligned} P_0a + P_1 &= T_1 \\ T_1a + P_2 &= T_2 \\ T_2a + P_3 &= T_3 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ T_{m-1}a + P_m &= T_m ; \end{aligned}$$

car en substituant dans chacune de ces quantités l'expression de la précédente, on trouve :

$$\begin{aligned} T_2 &= P_0a^2 + P_1a + P_2 \\ T_3 &= P_0a^3 + P_1a^2 + P_2a + P_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T_m &= P_0a^m + P_1a^{m-1} + \ldots\ldots + P_m ; \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la dernière quantité T_m est le résultat de la substitution de a pour x dans $P_0x^m + P_1x^{m-1} + \ldots\ldots + P_m$ (*).

2. Lorsque P_0 est positif, il résulte de la loi de formation successive des quantités T_1, T_2, ... T_m que si, pour un nombre positif donné a, aucune d'elles n'est négative, chacune ne peut qu'augmenter, et par conséquent reste positive si l'on remplace a par un nombre plus grand. Ainsi, puisque T_m ou $P_0a^m + P_1a^{m-1} + \ldots\ldots + P_m$ serait toujours positif si on augmentait la valeur de a, il en résulte que le nombre substitué a est alors une limite supérieure des racines positives. Plus généralement, quel que soit le signe de P_0, on

(*) Telle est la marche qu'il faut employer pour trouver le plus promptement possible le résultat de la substitution d'un nombre a à la place de x dans un polynôme proposé. Le plus souvent, quelque grand que soit le degré du polynôme, on reconnaît par là dès les premiers calculs si le résultat de la substitution opérée complétement doit être positif ou négatif (c'est ce qui résulte des observations faites plus loin (4)), que le signe de T_{n+1}, ... T_m est le même que celui de T_n si cette dernière quantité surpasse ou égale numériquement le plus grand des coefficients de signe contraire au sien qui suivent P_n, a étant égal au moins à 2; or en effet l'objet unique de la substitution est le plus fréquemment de connaître le signe du résultat.

voit de même que *le nombre positif* a *est une limite supérieure si aucune des quantités* T_1, T_2, ... T_m *n'est de signe contraire à celui de* P_0.

3. Si une ou plusieurs des quantités T_1, T_2, ... étaient de signe contraire à celui de P_0, il ne faudrait pas toujours rejeter le nombre a comme n'étant pas une limite assurée. Nous allons démontrer en effet que *si une ou plusieurs de ces quantités, savoir :* T_n *ou* $T_{n-1}a+P_n$, $T_{n'}$ *ou* $T_{n'-1}a+P_{n'}$ .... *sont de signe contraire à* P_0, *mais que* $T_{n-1}a+\frac{1}{2}P_n$, $T_{n'-1}a+\frac{1}{2}P_{n'}$, ... *soient de même signe que* P_0 *ou nuls*, a *est encore une limite supérieure, lorsque* T_m *est de même signe que* P_0. Il suffira pour cela de faire voir que toutes les dérivés de T_m, prises par rapport à a, sont alors de même signe que P_0, puisque en remplaçant a par $a+h$ dans T_m on obtient $T_m+T'_m a+\frac{1}{2}T''_m a^2+\frac{1}{2.3}T'''_m a^3+$ ..... ; or, cette proposition résulte de ce que plus généralement toutes les dérivées de chacune des quantités T_1, T_2, ... sont alors de même signe que P_0.

En effet, supposons, pour fixer les idées, que P_0 soit positif, nous démontrerons d'abord qu'il en est de même de toutes les dérivées premières T'_1, T'_2, ..., ensuite que la même chose a lieu pour toutes les dérivées secondes T''_1, T''_2, ..., et ainsi de suite.

Pour démontrer que toutes les dérivées premières sont positives, il suffit de faire voir que si cela est vrai pour T'_1, T'_2, ... T'_n, il en sera de même pour T'_{n+1}. Or, de $T_{n+1}=T_n a+P_{n+1}$ on déduit $T'_{n+1}=T_n+T'_n a$; donc si T_n n'est pas négatif, T'_{n+1} est positif, puisque par hypothèse T'_n est positif. Mais si T_n est négatif, remplaçons T_n et T'_n par leurs valeurs $T_{n-1}a+P_n$, $T_{n-1}+T'_{n-1}a$, il vient

$T'_{n+1} = 2\left(T_{n-1}a + \frac{1}{2}P_n\right) + T'_{n-1}a^2$, quantité encore positive, puisque par hypothèse T'_{n-1} est positif, et que, d'après la condition énoncée, $T_{n-1}a + \frac{1}{2}P_n$ est positif ou nul. Maintenant, comme on a $T'_1 = P_0$ quantité positive, T'_2 est donc aussi positif, par conséquent aussi T'_3, et ainsi de suite.

De même, pour démontrer que les dérivées secondes sont toutes positives, il suffira de faire voir que si cela a lieu pour $T''_1, T''_2, \ldots T''_n$, il en sera de même pour T'''_{n+1}. Or, de $T'_{n+1} = T_n + T'_n a$ on tire $T''_{n+1} = 2T'_n + T''_n a$, quantité positive, puisque T''_n l'est par hypothèse, de même que T'_n d'après ce qui précède. Mais on a $T''_1 = 0$, d'où $T''_2 = 2T'_1 + T''_1 a = 2P_0$ quantité positive, donc T''_3 est aussi positif, par conséquent aussi T''_4, et ainsi de suite.

La même démonstration s'appliquera évidemment aux dérivées troisièmes, quatrièmes, etc.

4. Bien souvent il suffit de calculer les premières des quantités $T_1, T_2, \ldots . T_m$ pour connaître dès lors si a doit être ou non admis comme limite. Ainsi, *lorsque le nombre essayé* a *n'est pas moindre que* 2 *aussitôt qu'on est parvenu à une quantité* T_n *au moins égale numériquement au plus grand des coefficients de signe contraire au sien qui suivent* P_n, *le nombre* a *doit dès lors être admis pour limite ou rejeté*, *selon que* T_n *est de même signe que* P_0, *ou de signe contraire*, car alors toutes les quantités suivantes $T_{n+1}, T_{n+2}, \ldots . T_m$ sont de même signe que T_n. En effet, T_{n+1} ou $T_n a + P_{n+1}$ est alors de même signe que T_n et au moins égal à $2T_n + P_{n+1}$ ou $T_n + (T_n + P_{n+1})$, quantité dont la seconde partie est de même signe que la première T_n ; ainsi T_{n+1} est au moins égal à T_n, et par conséquent au plus grand coefficient de signe contraire qui se trouve après P_{n+1}. On étendra suc-

cessivement la même démonstration à T_{n+2}, T_{n+3}, ... T_m.

5. Appliquons, par exemple, la méthode indiquée à la recherche des limites supérieures et inférieures des racines positives et des racines négatives de l'équation

$$x^7 - 3x^6 - 8x^5 - 26x^4 + 4x^3 - 31x^2 - 28x + 8 = 0.$$

A l'égard des racines positives on trouve 6 pour limite supérieure la plus rapprochée; car en faisant $a = 5$ on a successivement

$$T_1 = 5 - 3 = 2,\ T_2 = 2.5 - 8 = 2,\ T_3 = 2.5 - 26 = -16,$$

et de plus $2.5 - \frac{26}{2} < 0$; donc 5 doit être rejeté (3).

En faisant ensuite $a = 6$ on trouve

$$T_1 = 6 - 3 = 3,\ T_2 = 3.6 - 8 = 10,\ T_3 = 10.6 - 26 = 34;$$

or, cette dernière quantité, qui est positive, surpasse numériquement le plus grand coefficient numérique suivant, qui est -31; donc 6 est une limite (4).

Passons à la limite inférieure, et pour cela changeons dans la proposée x en $\frac{1}{x}$; il vient

$$8x^7 - 28x^6 - 31x^5 + 4x^4 - 26x^3 - 8x^2 - 3x + 1 = 0.$$

On trouve de suite 5 pour moindre limite des racines positives de cette transformée. En effet, pour $a = 4$ on a

$$T_1 = 8.4 - 28 = 4, \quad T_2 = 4.4 - 31 = -15;$$

or T_2, qui est de signe contraire à P_0 ou $+8$, surpasse numériquement 4, plus grand des coefficients de même signe que P_0 qui suivent -31; donc 4 doit être rejeté (3). En second lieu, pour $a = 5$ on a

$$T_1 = 8.5 - 28 = 12, \quad T_2 = 12.5 - 31 = 29;$$

or T_2, de même signe que P_0, surpasse numériquement -26, plus grand des coefficients négatifs qui suivent -31;

donc 5 est une limite (4). Ainsi $\frac{1}{5}$ est la limite inférieure cher chée pour la proposée.

(On voit que le calcul des quantités T_1, T_2. etc., pour l'équation transformée peut s'exécuter sur la proposée même, en considérant les coefficients dans un ordre inverse.)

Pour les racines négatives, changeons x en $-x$ dans l'équation proposée, c'est-à-dire les signes des coefficients des puissances paires ou des puissances impaires de x; on a

$$x^7+3x^6-8x^5+26x^4+4x^3+31x^2-28x-8=0.$$

Cette transformée admet 1 pour plus simple limite supérieure. En effet $a=0$ donne évidemment -8 pour la valeur du premier membre; ensuite $a=1$ donne $T_1=4$, $T_2=4-8=-4$ $\left(\text{mais en même temps on a } 4-\frac{8}{2}=0\right)$, $T_3=-4+26=22$, et les quantités suivantes T_4, etc., sont toutes évidemment positives.

Pour la limite inférieure la plus simple de cette transformée, on trouve $\frac{1}{2}$. En effet, si, en prenant les coefficients à rebours, on forme $T_1=-8a-28$, $T_2=T_1a+31$, etc, on a pour $a=1$ les valeurs

$$T_1=-36;\ T_2=-36+31=-5,$$
$$T_3=-5+4=-1,\ T_4=-1+26=25,$$

et toutes les autres quantités T_5, etc., sont évidemment positives ou de signe contraire à -8. Ensuite, par $a=2$ on a $T_1=-8.2-28=-44$, quantité négative ou de même signe que -8, et surpassant numériquement 31, plus grand des coefficients positifs qui précèdent -28.

Les limites des racines de la proposée sont donc $\frac{1}{5}$, 6 pour les racines positives, et $-\frac{1}{2}$, -1 pour les racines négatives, ce qui est exactement le même résultat, qu'on trouve bien plus longuement par la méthode de Newton. Par la méthode ordinaire on aurait trouvé $\frac{1}{5}$, 32 et $-\frac{1}{3}$, -29.

On voit par cet exemple que la recherche des limites par la méthode proposée n'exige pas en général plus de temps pour une équation d'un degré très-élevé que pour celles du troisième ou du quatrième degré. Du reste, on peut s'assurer que cette méthode conduit aux limites les plus simples des équations traitées à cet égard par la méthode de Newton, ou par la décomposition du premier membre dans les traités d'algèbre de MM. Lefébure, Mayer et Choquet, Bourdon.

II. *Sur la recherche des racines commensurables.*

La recherche des racines entières s'effectue, comme on sait, par une suite de divisions et d'additions alternatives. Si a est une racine entière de $P_0x^m+P_1x^{m-1}+\ldots+P_m=0$, la règle prescrite pour le reconnaître est représentée par la suite des identités

$$\frac{P_m}{a}=Q_{m-1},\quad \frac{Q_{m-1}+P_{m-1}}{a}=Q_{m-2},\ldots \frac{Q_1+P_1}{a}=Q_0,\ Q_0+P_0=0$$

Lorsque l'on a ainsi déterminé toutes les racines entières $a, b, c,\ldots$ en opérant de la même manière sur les coefficients de l'équation proposée, on en débarrasse l'équation en effectuant le produit $(x-a)(x-b)\ldots\ldots$, par lequel on divise $P_0x^m+\ldots+P_m$; après quoi il faut encore chercher si ces mêmes nombres ne sont pas encore racines de l'équation obtenue pour quotient.

Or, on peut suivre dans la recherche des racines entières une marche plus simple, qui d'abord abrége cette recherche quand il y a plusieurs racines entières, et qui en outre débarrasse immédiatement l'équation des racines sans autre calcul.

Observons que $P_m + P_{m-1}x + \ldots + P_0x^m$ divisé par $a-x$ n'est autre chose que $Q_{m-1} + Q_{m-2}x + \ldots + Q_0x^{m-1}$. Ainsi $Q_0x^{m-1} + Q_1x^{m-1}x \ldots + Q_{m-1} = 0$ est l'équation débarrassée de la racine a. Opérons sur celle-ci pour reconnaître une nouvelle racine b, (ou pour vérifier si a n'est pas encore racine), elle sera débarrassée de la nouvelle racine, et ainsi de suite, les calculs allant toujours en se simplifiant.

Comme l'équation proposée peut admettre les racines ± 1 une ou plusieurs fois, il faut opérer pour ces nombres comme pour toute autre diviseur de P_m, et en débarrasser l'équation immédiatement s'ils sont racines, c'est-à-dire s'ils conduisent à $Q_0 + P_0 = 0$. C'est même par les deux nombres ± 1 qu'il convient de commencer la recherche des racines entières, car la valeur $Q_0 + P_0$ trouvée par ± 1 n'est autre chose que le résultat de la substitution de ± 1 dans $P_0x^m + \ldots + P_m$ (au signe près pour la substitution de -1, si m est impair), substitution qui donne, comme on sait, des caractères pour rejeter de suite plusieurs diviseurs de P_m comme n'étant pas racines. En effet, on a

$$P_0 + Q_0 = P_0 + \frac{P_1 + Q_1}{a} = P_0 + \frac{P_1}{a} + \frac{P_2 + Q_2}{a} =$$

$$= P_0 + \frac{P_1}{a} + \frac{P_2}{a^2} + \frac{P_3 + Q_3}{a^3} = \ldots = \frac{P_0a^m + \ldots + P_m}{a^m}.$$

Soit par exemple l'équation $x^7 + 3x^6 - 11x^5 - 23x^4 + 18x^3 - 28x^2 - 56x + 96 = 0$. (96 ayant un grand nombre de diviseurs on diminuerait beaucoup les essais en observant que par le procédé indiqué dans l'article précédent, on trouve de suite -5 et $+4$ pour limites des racines réelles.)

Pour plus grande facilité des calculs je dispose ainsi les opérations :

x^7	$+3x^6$	$-11x^5$	$-23x^4$	$+10x^3$	$-28x^2$	$-56x$	$+96$	nomb. essayés
0,	—1,	4,	7,	30,	12,	40,	96	1 racine
	180,	181,	185,	178,	148,	136,	96	1
	—48,	9,	—45,	38,	—68,	56,	—96	—1
	.	.	.	28,	26,	44,	48	2
	0,	1,	2,	—11,	—8,	4,	—48	—2 racine
		0,	—1,	0,	11,	—14,	24	—2 racine
			.	6,	—12,	13,	—12	—2
			0,	1,	3,	—2,	8	3 racine
				0,	—1,	+1,	—2	—4 racine

$x^2 - x + 2 = 0$, équation débarrassée de racines entières.

En prenant $a = 1$, on trouve $\frac{96}{a} = 96$, que l'on écrit à côté de 1 sous le dernier terme du premier membre. On a ensuite $\frac{96-56}{a} = 40$ qu'on écrit à gauche sous le coefficient -56. Puis on trouve $\frac{40-28}{a} = 12$ qu'on écrit sous -28, et ainsi de suite. En achevant de la sorte jusqu'au dernier coefficient on voit que 1 est racine, et en même temps que l'équation débarrassé de la racine 1 est $-x^6 + 4x^5 + 7x^4 + 30x^3 + 12x^2 + 40x + 96 = 0$.

J'opère de même sur cette dernière équation dont les coefficients se trouvent déjà tout écrits dans l'ordre convenable pour vérifier si les nombres $1, -1$, en sont racines ; je trouve qu'ils ne le sont pas et de plus que les résultats de leur substitution est 180 et 48. Ainsi 180 doit être divisible par toutes les racines entières diminuées de l'unité et 48 par toutes les racines augmentées de l'unité ; caractères qui excluent tous les diviseurs de 96 excepté $\pm 2, \pm 3, -4$. On trouve ensuite que 2 n'est pas racine de l'équation débarrassée de la racine 1, mais que -2 en est racine ; on obtient en même temps $x^5 + 2x^4 - 11x - 8x^2 + 4x - 48 = 0$ pour l'équation débarrassée des racines $1, -2$.

Opérant de nouveau sur les coefficients de cette dernière qui sont déjà tout disposés convenablement dans le tableau, on trouve que — 2 est encore racine et que l'équation débarrassée de trois racines reconnues est $-x^4+11x^2-14x+24=0$.

On trouve ensuite de même que la nouvelle équation n'admet plus pour racine — 2, mais qu'elle admet 3 ; de plus on voit que l'équation débarrassée des quatre racines trouvées est $x^3+3x^2-2x+8=0$.

Il est inutile d'essayer maintenant les nombres 3, — 3 qui ne divisent plus le dernier terme 8, mais on trouve que — 4 est racine, et que l'équation débarrassée encore de cette racine est $x^2-x+2=0$.

Cette dernière n'a plus de racines entières, puisque son dernier terme n'admet plus pour diviser le nombre — 4, qui est le dernier nombre à essayer.

L'équation proposée revient donc à

$$(x-1)(x+2)^2(x-3)(x+4)(x^2-x+2)=0.$$

Note. La méthode de Newton, consiste à rendre positives, toutes les fonctions dérivées. L'observation ingénieuse de M. Thibault fournit un criterium pour reconnaître si ces fonctions sont positives, sans avoir besoin de les calculer; moyen d'abréviation astreint à la condition assez stricte, que T_m soit positif; car dans une équation P_0 est toujours censé positif. La méthode de Lagrange a l'avantage de donner une limite, immédiatement. Nous rappellerons à cette occasion trois théorèmes sur les limites des racines que Biet a consignés dans les Annales de Gergonne (tome 6, p. 112). Voici le premier théorème : Dans chaque suite de coefficients négatifs, prenez le plus grand positivement, et divisez-le par la somme des coefficients positifs qui le précèdent; augmentez le quotient d'une unité ; la plus grande somme ainsi obtenue, est la limite supérieure des racines positives.

Lorsque les coefficients négatifs sont petits relativement aux coefficients positifs, ce théorème fournit de suite, une limite très-rapprochée. Dans un autre article nous rapporterons les trois théorèmes, avec les démonstrations. Il serait intéressant d'avoir une méthode directe, sans recourir à l'élimination, pour trouver les racines entières *complexes*. C'est le nom que donne M. Gauss, aux racines imaginaires $a+b\sqrt{-1}$ lorsque a et b sont des nombres entiers. Il est évident que dans ce cas, le dernier terme tout connu, doit admettre des diviseurs bi-carrés. Les solutions que procurent ces diviseurs doivent satisfaire aux deux équations à deux inconnues, qu'on obtient en remplaçant l'inconnue x par le type $z+y\sqrt{-1}$. Tm.

SUR LE PARALLÉLOGRAMME DES FORCES.

PAR M. S. REALIS.

La démonstration suivante du parallélogramme des forces n'est qu'une modification de celle que M. Poisson a donnée dans son Traité de mécanique; j'ai pensé qu'elle pourrait ne pas être inutile dans l'enseignement élémentaire, à cause qu'en démontrant la proposition pour deux forces faisant entre elles un angle commensurable avec l'angle droit, on y évite de considérer cet angle comme résultant de la somme d'une infinité d'autres infiniment petits, ainsi qu'on le fait dans la démonstration citée. Je me borne à considérer le cas de deux forces égales, puisqu'il est très-facile d'étendre ensuite la proposition au cas de deux forces quelconques.

Il s'agit donc de prouver que la résultante de deux forces égales, appliquées en un même point et représentées par des droites prises sur leurs directions à partir de ce point, est représentée, en grandeur et en direction, par la diagonale du losange construit sur les deux forces données.

Il est d'abord évident que cette résultante doit passer par le milieu de l'angle des composantes; sa direction est donc connue, et il ne reste que sa grandeur à déterminer. Soient P la valeur commune des composantes, $2x$ l'angle compris entre leurs directions, R la valeur de la résultante; pour une valeur donnée de x, R doit varier proportionnellement à P, donc on pourra poser :

$$R = P\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction de x qu'il s'agit de déterminer. Par la nature même de la question on a $\varphi(0) = 2$, $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; il reste à examiner ce que devient $\varphi(x)$ pour les valeurs de x comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Pour cela, on regardera chacune des forces P comme la résultante de deux forces Q, égales entre elles et comprenant entre leurs directions l'angle arbitraire $2z$, en sorte que le système des deux forces P se trouvera remplacé par le système de quatre autres forces Q, égales, dont les deux qui avoisinent la résultante R font entre elles l'angle $2x - 2z$, et les deux autres l'angle $2x + 2z$. On aura donc $P = Q\varphi(z)$, et comme la force R reste la même, soit qu'elle provienne de la composition des deux forces P, ou de celle des quatre forces Q, il en résultera

$$R = P\varphi(x) = Q\varphi(x)\varphi(z) = Q\varphi(x + z) + Q\varphi(x - z),$$

d'où

$$\text{(A)} \qquad \varphi(x)\varphi(z) = \varphi(x + z) + \varphi(x - z).$$

C'est à l'aide de cette équation qu'il faut tâcher de reconnaître la forme de la fonction cherchée.

Il y a un cas dans lequel on détermine immédiatement la valeur de la fonction, c'est le cas de $x = z = \frac{\pi}{4}$. On tire en effet de l'équation (A)

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) + \varphi(0);$$

or,

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 0; \quad \varphi(0) = 2;$$

donc

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 2; \quad \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2},$$

et comme $P\sqrt{2}$ n'est autre chose que la diagonale du carré dont le côté est P, on voit que la règle du parallélogramme des forces se trouve vérifiée dans le cas de deux forces égales faisant entre elles un angle droit (*).

De l'équation (A), en y faisant successivement $x = z$, $2z$, $3z$, $4z$, ... $(n-1)z$, on déduit

$$\begin{aligned}
&\varphi(2z) = \varphi(z)^2 - 2\\
&\varphi(3z) = \varphi(z)^3 - 3\varphi(z)\\
&\varphi(4z) = \varphi(z)^4 - 4\varphi(z)^2 + 2\\
\text{(B)}\qquad &\varphi(5z) = \varphi(z)^5 - 5\varphi(z)^3 + 5\varphi(z)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi(nz) = \varphi(z)^n - n\varphi(z)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2}\varphi(z)^{n-4} -\\
&\qquad - \frac{n(n-4)(n-5)}{2.3}\varphi(z)^{n-6} + \ldots..
\end{aligned}$$

(*) Sans recourir à l'équation (A), il est très-facile de démontrer directement le cas de deux forces égales à angle droit. Soient appliquées en un point donné deux forces Q égales et directement opposées, et une force R=2Q agissant perpendiculairement à leur direction. La résultante du système sera évidemment R. Soit P la résultante des deux forces égales Q et ½ R; on pourra substituer aux trois forces données, deux forces P à angle droit, égales entre elles et on verra immédiatement que si les forces P étaient plus grandes ou plus petites que les diagonales des carrés construits sur leurs composantes, la résultante R serait plus petite ou plus grande que la diagonale du carré construit sur les composantes P. Pour éviter cette contradiction, il faut nécessairement admettre que la résultante de deux forces égales à angle droit est représentée par la diagonale du carré construit sur les composantes.

Ces relations sont identiques avec celles qui existent entre les doubles cosinus des différents multiples d'un arc et le double cosinus de l'arc simple, et s'obtiennent de la même manière, à cause qu'on peut satisfaire à l'équation (A) en posant $\varphi(x) = 2 \cos x$, et par suite

$$\varphi(z) = 2\cos z;\ \varphi(x+z) = 2\cos(x+z);\ \varphi(x-z) = 2\cos(x-z).$$

Il s'en suit donc que si, pour une valeur donnée de z, on a $\varphi(z) = 2\cos z$, on est en droit d'en conclure $\varphi(nz) = 2\cos nz$. Mais si pour $nz = \alpha$ on a $\varphi(nz) = 2\cos\alpha$, on ne pourra pas en conclure $\varphi\left(\frac{\alpha}{n}\right) = 2\cos\frac{\alpha}{n}$, car l'équation

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{n}\right)^n - n\varphi\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2}\varphi\left(\frac{\alpha}{n}\right)^{n-4} - \ldots - 2\cos\alpha = 0$$

admettra par sa nature les n racines que donne la formule $\varphi\left(\frac{\alpha}{n}\right) = 2\cos\frac{2k\pi+\alpha}{n}$ en y faisant $k = 0, 1, 2, 3, \ldots (n-1)$, en sorte qu'il y aura incertitude sur la véritable valeur de $\varphi\left(\frac{\alpha}{n}\right)$. Cependant, dans le cas de $n = 2$, les deux valeurs de $\varphi\left(\frac{\alpha}{n}\right)$ étant égales et de signe contraire, c'est évidemment la valeur positive qui satisfait à la question, de manière qu'on aura $\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos\frac{\alpha}{2}$; il en résulte aussi $\varphi\left(\frac{\alpha}{4}\right) = 2\cos\frac{\alpha}{4}$, et en général $\varphi\left(\frac{\alpha}{2^\mu}\right) = 2\cos\frac{\alpha}{2^\mu}$.

Cela posé, il ne sera pas difficile de prouver que la valeur de $\varphi\left(\frac{\alpha}{n}\right)$, qui correspond à $k = 0$, est la seule admissible dans la question qui nous occupe, quel que soit le nombre entier n.

D'abord, en vertu de l'équation $\varphi(2z) = \varphi(z)^2 - 2$, on peut conclure de $\varphi\left(\frac{\alpha}{n}\right) = 2\cos\frac{2k\pi+\alpha}{n}$ cette équation

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{2n}\right) = 2\cos\frac{2k\pi+\alpha}{2n}$$

et en général

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{2^{\mu}n}\right) = 2\cos\frac{2k\pi+\alpha}{2^{\mu}n};$$

de cette dernière formule, et en vertu encore des équations (B), on déduit

$$\varphi\left(\frac{\alpha}{2^{\mu}}\right) = \cos\left(\frac{k\pi}{2^{\mu-1}}+\frac{\alpha}{2^{\mu}}\right).$$

Maintenant on voit bien que si l'on suppose $\mu-1$ égal à l'exposant de la plus grande puissance de 2 contenue dans k, le quotient de $\frac{k}{2^{\mu-1}}$ sera un nombre impair, et on obtiendrait

$$\varphi\frac{\alpha}{2^{\mu}} = -2\cos\frac{\alpha}{2^{\mu}};$$

on voit de même que toutes les valeurs de $\mu-1$ supérieures à cet exposant mèneraient à des valeurs de $\varphi\left(\frac{\alpha}{2^{\mu}}\right)$ incompatibles avec la véritable valeur qu'on a trouvée égale à $+2\cos\frac{\alpha}{2^{\mu}}$. Ainsi, la supposition de k différent de zéro dans la formule $\varphi\left(\frac{\alpha}{n}\right) = 2\cos\frac{2k\pi+\alpha}{n}$, ne saurait convenir à la question.

Ayant donc $\varphi\left(\frac{\alpha}{n}\right)=2\cos\frac{\alpha}{n}$, on aura aussi $\varphi\left(\frac{m\alpha}{n}\right)=2\cos\frac{m\alpha}{n}$, m et n étant des nombres entiers quelconques. Il suit de là que si un angle α, différent de zéro, vérifie l'équation $\varphi(\alpha) = 2\cos\alpha$, tout angle $x = \frac{m\alpha}{n}$, commensurable avec α, vérifiera à son tour l'équation $\varphi\left(\frac{m\alpha}{n}\right) = 2\cos\frac{m\alpha}{n}$, ou

$\varphi(x) = 2\cos x$; or, en prenant $\alpha = \frac{\pi}{4}$ on a

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4},$$

donc, etc. Pour un angle x incommensurable avec α on aura encore $\varphi(x) = 2\cos x$, car les nombres m et n pourront toujours être choisis de manière que $\frac{m\alpha}{n}$ diffère aussi peu qu'on voudra de x.

Si l'on achève maintenant le losange des deux forces P, représentées en grandeur et en direction par deux droites faisant entre elles l'angle $2x$, la grandeur de la diagonale sera $2P\cos x$. Par ce qui précède, la résultante des forces P coupe en deux parties égales l'angle $2x$ et a pour expression $R = 2P\cos x$; elle est donc représentée en direction et en intensité par la diagonale du losange.

RELATIONS D'IDENTITÉ

et équations fondamentales relatives aux courbes du second degré.

(Suite, v. 436.)

—

XLVII. *Théorèmes principaux concernant les foyers.*

Théorème I. *La distance d'un point de la conique à un foyer divisée par sa distance à la directrice correspondante*, est un quotient constant, moindre que l'unité dans l'ellipse, égal à l'unité dans le parabole, supérieur à l'unité dans l'hyberbole ; dans le cercle ce quotient est nul.

Théorème II. Une corde étant parallèle à l'axe focal ; dans l'ellipse, la somme des rayons vecteurs qui passent par les extrémités de la corde au même foyer est égale à l'axe focal; dans l'hyperbole, c'est la différence de ces rayons vecteurs qui est égale à l'axe focal.

THÉORÈME III. La somme des deux rayons vecteurs menés d'un même point de la courbe aux deux foyers, est constante dans l'ellipse; dans l'hyperbole, c'est la différence de ces rayons qui est constante.

THÉORÈME III (bis). Dans l'ellipse, la somme des rayons vecteurs qui vont des extrémités d'un diamètre au même foyer est constante; dans l'hyperbole, la différence est constante, pour un diamètre qui rencontre.

THÉORÈME IV. Le carré de la distance d'un point de la courbe à un foyer, divisé par le produit des distances de ce même point aux deux directrices, donne un quotient constant.

Observation. Ce théorème, conséquence immédiate du théorème I, est très-important, parce qu'il transporte aux surfaces du second degré, les propriétés focales des lignes planes du second degré. On doit cette belle généralisation à M. Amyot, professeur au collége de Saint-Louis, et il l'a consignée dans un mémoire adressé à l'Académie des sciences (*Comptes rendus*, 1er Sem. 1843, p. 783); nous nous en occuperons lorsque nous en serons aux identités et équations fondamentales des surfaces du second degré.

THÉORÈME V. Toute corde passant par le foyer est égale au carré du $\frac{1}{2}$ diamètre parallèle divisé par l'axe focal.

Observation. Dans l'hyperbole, le diamètre est terminé à l'hyperbole conjuguée.

Démonstration. Prenant un foyer pour pôle, l'axe focal pour axe, l'équation polaire de l'ellipse est $z = \dfrac{b^2}{a - c\cos\varphi}$; en prenant le second foyer pour pôle, on a $z = \dfrac{b^2}{a + c\cos\varphi}$;

la somme de ces deux rayons vecteurs, pour la même valeur de φ, est égale à la corde qui passe par un de ces foyers et répondant à ce même angle φ; désignant cette corde par q, on aura $q = \dfrac{2ab^2}{a^2 - c^2 \cos^2 \varphi}$; d étant la longueur du demi-diamètre parallèle à cette corde, on a (voy. p. 28) $d^2 = \dfrac{a^2 b^2}{a^2 - c^2 \cos^2 \varphi}$; donc $q = \dfrac{2d^2}{a}$; C.Q.F.D.

Théorème VI. La somme des deux cordes conjuguées passant par un foyer est constante; la différence est constante dans l'hyperbole.

C'est une conséquence du théorème précédent et de la propriété des diamètres conjugués.

Théorème VI (bis). Si l'on mène par le centre n demi-diamètres, partageant l'aire de l'ellipse en n parties équivalentes, la somme de toutes les cordes parallèles à ces demi-diamètres et passant par le même foyer est constante pour la même valeur de n.

Le théorème précédent est un cas particulier de ce théorème général que nous démontrerons plus loin.

Théorème VII. La somme des réciproques des segments formés par une corde passant par un foyer est une quantité constante.

Démonstration. Les réciproques des segments ont pour valeurs $\dfrac{a - c\cos\varphi}{b^2}$ et $\dfrac{a + c\cos\varphi}{b^2}$, dont la somme est égale à $\dfrac{2a}{b^2}$.

Théorème VIII. La somme des réciproques des cordes rectangulaires qui passent par un foyer est constante dans l'ellipse; la différence est constante dans l'hyperbole; conséquence du théorème V.

Théorème IX. Une corde coupant une directrice, la droite qui joint le point d'intersection avec le foyer correspondant, est une bissectrice de l'angle des deux rayons vecteurs qui aboutissent aux extrémités de la corde.

Démonstration. Soient M, M', T, les extrémités de la corde et le point où elle rencontre la directrice, et F le foyer ; on a $\frac{FM}{FM'} = \frac{MT}{M'T}$; car, les distances des points M et M' à la directrice, sont proportionnelles à MT et M'T; TF est donc bissectrice de l'angle formé par M'F et MF prolongé ; dans l'hyperbole, lorsque la corde est extérieure, le point T tombe entre M et M', et alors la droite TF est bissectrice de l'angle MFM' et non du supplément.

Théorème X. Une tangente coupant une directrice ; la droite qui joint le point d'intersection au foyer voisin, est perpendiculaire sur le rayon vecteur qui va au point de contact ; conséquence du théorème précédent.

Théorème XI. Le rayon vecteur qui va du foyer au point de rencontre de deux tangentes est bissecteur de l'angle formé par les rayons vecteurs qui vont aux deux points de contact.

Démonstration. Soient M, M' les deux points de contact. T l'intersection de MM' avec la directrice polaire du foyer F ; N le point de rencontre des deux tangentes ; I le point où la droite FN coupe la corde MM'. Or, N étant le pôle de MM' et F le pôle de la directrice, FN sera la polaire du point T. Donc le sécante TM est divisée harmoniquement aux points T,M' I,M ; et les quatre droites FT, FM', FI, FM, forment un faisceau harmonique. Mais FT est une bissectrice (théorème IX), donc FI est une bissectrice de l'angle M'FM ; C. Q. F. D.

Théorème XII. Une tangente mobile interceptée entre deux tangentes fixes, est vue de l'un et de l'autre foyer, toujours sous le même angle égal à la moitié de l'angle formé par les deux rayons vecteurs qui vont aux points de contact des tangentes fixes ; conséquence du théorème précédent.

Théorème XIII. Si une droite mobile, interceptée dans un angle fixe, est vue toujours sous le même angle d'un point fixe, situé dans le même plan, l'enveloppe de la droite mobile est une conique, décrite du point fixe comme foyer, et touchant les deux côtés de l'angle; c'est la réciproque du théorème précédent.

Théorème XIV. Le lieu géométrique de la projection d'un foyer sur une tangente, est un cercle concentrique à la conique, et d'un rayon égal à la moitié de l'axe focal; dans la parabole, ce cercle devient une droite tangente au sommet.

Théorème XV. Le lieu géométrique du point symétrique au foyer, relativement à une tangente, est un cercle, ayant pour centre le second foyer, et pour rayon, l'axe focal; dans la parabole, ce cercle se confond avec la directrice.

Observation. M. le professeur Vincent a désigné le cercle sous le nom très-juste de *cercle directeur*, et M. le professeur Blum a fait voir que ce cercle peut servir, par un moyen simple, à décrire d'un mouvement continu les deux coniques à centre, de la même manière que la directrice a toujours été employée pour décrire la parabole (v. p. 60).

Théorème XVI. Un cercle assujetti à avoir son centre sur une conique, et à passer constamment par le même foyer, a pour enveloppe, le cercle directeur dont le centre est au second foyer.

Théorème XVII. La partie d'un rayon vecteur, interceptée entre deux diamètres conjugués, dont l'un passe par l'extrémité du rayon vecteur, est égale à la moitié de l'axe focal; ce théorème est de M. Chasles.

Théorème XVIII. Si l'on prolonge la perpendiculaire abaissée du foyer sur la tangente, jusqu'à la directrice correspondante, le point d'intersection et le point de contact, sont sur un même diamètre.

Théorème XIX. La projection de la normale sur le rayon vecteur qui passe par le point de départ de la normale, est égale à la moitié du paramètre de l'axe focal.

Théorème XX. La tangente, la normale et les deux rayons vecteurs qui passent par le point de contact, forment un faisceau harmonique; dans la parabole, un de ces rayons vecteurs devient un diamètre.

Théorème XXI. Dans l'ellipse, le produit des deux rayons vecteurs qui aboutissent aux extrémités d'un diamètre, plus le produit des rayons vecteurs qui vont aux extrémités du diamètre conjugué, est une somme constante.

Cette proposition est de M. Brassine, professeur à l'école d'artillerie de Toulouse.

Théorème XXII. La normale, terminée au grand axe, et multipliée par la distance du foyer à la tangente, et divisée par le rayon vecteur, est une quantité constante.

Théorème XXIII. Dans l'ellipse, la demi-somme des angles sous lesquels une corde est vue des deux foyers, plus l'angle sous lequel la corde est vue de son pôle, est égale à deux angles droits.

Démonstration. Soient F et F' les deux foyers; TT' la corde; C le pôle de la corde; et soient menées les droites FT, FT', F'T, F'T', CT, CT'; faisons $FTF' = \alpha$; $FT'F' = \beta$ d'après une propriété connue, l'on a :

$FTC = 1^q + \frac{1}{2}\alpha$; $F''TC = 1^q - \frac{1}{2}\alpha$; $F'T'C = 1^q + \frac{1}{2}\beta$; $FT'C = 1^q - \frac{1}{2}\beta$;

le quadrilatère FTCT′ donne

$$T+C+T'+F'=4^q=1^q-\tfrac{1}{2}\alpha+C+1^q+\tfrac{1}{2}\beta+F'\ ;$$

d'où

$$C+F'+\tfrac{1}{2}(\beta-\alpha)=2^q\ ;$$

le quadrilatère F′T′CT donne de même :

$$C+F+\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)=2^q$$

ajoutant ces équations, et divisant par 2, il vient :

$$C+\tfrac{1}{2}(F+F')=2^q\ ;\quad \text{C. Q. F. D.}$$

Observation. Dans l'hyperbole, la demi-somme est remplacée par la demi-différence ; dans la parabole, l'angle sous lequel la corde est vue, du foyer situé à l'infini, devient nul.

Théorème XXIV. La bissectrice d'un angle circonscrit à une conique est également la bissectrice de l'angle formé par les deux droites qui vont du sommet aux deux foyers.

Démonstration. Dans le triangle CTF on a

$$CTF+TFC+FCT=2^q=1^q+\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}TFT'+FCT\ ;$$

d'où

$$FCT=1^q-\tfrac{1}{2}\alpha-\tfrac{1}{2}TFT',$$

et de même

$$F'CT'=1^q-\tfrac{1}{2}\beta-\tfrac{1}{2}T'F'T\ ;$$

mais

$$\alpha+TFT'=\beta+T'F'T\ ;$$

donc

$$FCT=F'CT'\ ;\quad \text{C. Q. F. D.}$$

Ce théorème est de M. Poncelet. Prop. projectives, p. 277.

DU CHOIX DE L'EXEMPLE PARTICULIER

pour la discussion des équations du premier degré dans l'enseignement.

PAR M. P-A. BRETON,
Ingénieur des ponts et chaussées.

Monge avait dit que tout calcul algébrique où le nombre des variables ne dépasse pas trois, est l'écriture d'une figure en géométrie, et que réciproquement toute opération géométrique représente un calcul algébrique.

Je crois qu'on est bien loin d'avoir tiré de cette remarque importante tout le secours qu'elle peut fournir à l'enseignement : Monge et, après lui, les auteurs des cours de géométrie descriptive ont traité les constructions géométriques par les procédés purement géométriques, et on enseigne, en général, séparément la géométrie descriptive et la géométrie analytique.

L'enseignement gagnerait beaucoup à l'emploi d'une sorte de mélange, le plus intime possible, de ces deux branches de la science. Il faudrait simplement que l'élève traçât des épures dont toutes les lignes seraient cotées par leur équation, et tous les points cotés par leurs coordonnées, suivant une échelle indiquée sur l'épure.

Pour cela, après avoir choisi et rapporté les données suivant l'échelle, l'élève aurait à effectuer une série de calculs numériques dont les règles sont contenues dans les formules de la géométrie analytique. Et remarquez que c'est la marche suivie de fait, dans un grand nombre d'applications : ainsi, tous les jours les architectes, les mécaniciens, les ingénieurs, construisent des dessins cotés, dans lesquels beaucoup de résultats sont déterminés à la fois par le trait et par le calcul, qui se vérifient mutuellement. La marche que je propose aurait donc déjà l'avantage de préparer l'élève aux applications pratiques. Aussi voyons-nous que c'est un ingénieur en chef des ponts et chaussées (M. Cousinery) qui a donné un traité du calcul par le trait.

Mais l'objet de cette note est principalement de montrer l'avantage que retirerait l'enseignement de l'algèbre d'une alliance plus intime avec la géométrie, si on avait soin d'effectuer cette alliance à partir de la discussion des équations *du premier degré.*

L'usage est de choisir le problème des courriers pour discuter les racines d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues. Cet exemple me semble mal choisi pour deux raisons : 1° Il s'agit de déterminer un temps et une longueur, qui sont deux quantités hétérogènes ; il est évidemment utile que l'élève puisse saisir facilement la symétrie des opérations qu'il pratique sur les deux inconnues, et pour cela il faudrait deux quantités homogènes.

2° Quand l'élève a résolu algébriquement le problème des courriers, s'il en fait une application numérique, il n'aura qu'un résultat de calcul qu'il ne pourra réaliser sans de grandes difficultés : il lui faudrait placer sur une même ligne deux curseurs assujettis à se mouvoir avec des vitesses uniformes et choisies arbitrairement, et compter sur une horloge le temps employé par les deux curseurs pour se réunir.

Si, au contraire, on suppose que l'élève connaisse déjà en géométrie les propriétés des triangles semblables, cela suffira pour qu'il puisse comprendre comment une ligne droite représente une équation à deux variables, et un très court *exercice l'habituera à tracer une ligne droite donnée par son* équation, et à trouver l'équation d'une ligne droite déjà tracée. La recherche des points d'intersection de cette droite avec les axes coordonnés fournira un premier exemple très-clair pour discuter l'équation générale du premier degré à une inconnue.

Ce serait une erreur de croire qu'il faut pour cela posséder déjà quelques notions de trigonométrie, afin de faire entrer dans le calcul la tangente d'un angle. On n'a à considérer en effet que le rapport des accroissements simultanés des deux coordonnées, qu'on peut appeler une *pente*. Tous les jours une foule d'employés des ponts et chaussées calculent des intersections de lignes droites en divisant la différence de deux ordonnées par la différence algébrique des pentes, sans pour cela avoir besoin d'aucune notion de trigonométrie.

En exerçant ensuite l'élève à mener, par le calcul et par le trait, une droite par deux points donnés, la discussion des grandeurs et des signes de la pente fournirait un deuxième exemple très-utile de discussion d'une équation à une seule inconnue.

Ensuite le calcul et la construction du point de rencontre de deux lignes droites, fournira une base très-commode pour discuter un système de deux équations à deux inconnues. Dans le cas où les valeurs des inconnues deviennent toutes deux infinies, comme elles sont homogènes, il est naturel de demander ce que devient le rapport de ces deux infinis : on voit sans peine, soit par le calcul, soit par le trait, que ce rapport se réduit à la pente commune des deux droites. Il serait impossible, ou du moins bien difficile, de donner à ce rapport une signification facile à saisir, quand on discute ce système de deux équations sur l'exemple du problème des *courriers*.

On objecte que ce serait sortir de l'algèbre pure, mais je réponds qu'en prenant deux points qui se meuvent avec des vitesses uniformes, on ne s'écarte pas moins de l'algèbre pure, car on fait de la mécanique : je crois seulement qu'il vaut mieux prendre un exemple dans la géométrie. Si on veut rester dans l'algèbre pure, il faut alors établir la discussion sans le secours d'aucun exemple, et je doute que ce parti soit préféré par aucune personne ayant un peu d'expérience de l'enseignement.

Mais l'exemple des courriers ne peut plus servir dès que l'on veut considérer trois inconnues. Si on a employé celui des deux lignes d.oites pour deux inconnues, il sera bien facile de donner une discussion complète d'un système de trois équations à trois inconnues, en prenant pour exemple l'intersection de trois plans.

A cet effet, il faudra que l'élève possède les notions géométriques principales sur les plans dans l'espace, et on lui fera facilement concevoir comment une équation de 1er degré à trois inconnues représente un plan dans l'espace ; il sera nécessaire en outre de l'exercer à quelques épures de géométrie descriptive, savoir :

1° Tracer deux projections d'une droite donnée par ses équations, ou par ses deux traces.

2° Construire les traces d'un plan donné par ses équations.

3° Construire l'intersection de deux plans.

4° Construire l'intersection de trois plans.

Et toujours ces épures devront être calculées et cotées en même temps que dessinées.

Alors on établira une discussion sur le système des solutions des équations de trois plans, dans laquelle on aura à distinguer un plus grand nombre de cas particuliers que pour deux équations à deux inconnues.

En effet, les trois racines étant finies, on aura 8 cas à distinguer suivant les combinaisons de leurs signes.

Quand les racines deviendront infinies, il faudra distinguer le cas où les 3 intersections, 2 à 2, des plans seront parallèles ;

celui où deux des plans, deviendront parallèles, celui où les trois plans deviendront parallèles, et dans ce dernier cas, il faudra en outre distinguer celui où deux de ces trois plans parallèles se confondent.

Quand les racines se présenteront sous cette forme $\frac{0}{0}$, on aura à distinguer le cas où les trois plans se coupent suivant une seule ligne droite, celui où deux des plans se confondent, celui où tous les plans se confondent.

La recherche des caractères analytiques de tous ces cas ne peut manquer de constituer un exercice utile, surtout en ayant soin de faire construire pour chacun une épure cotée; et le temps nécessaire pour épuiser de cette manière la discussion des équations du 1er degré jusqu'au nombre de trois inconnues inclusivement serait moins long qu'on ne le croirait au premier coup d'œil. D'ailleurs la facilité que cet exercice assurerait à l'élève pour les études ultérieures donnerait en définitive une économie notable de temps.

Il me semble qu'à l'époque actuelle l'innovation que je propose est éminemment opportune : cela paraît assez indiqué par l'emploi de plus en plus fréquent des courbes figuratives dans une foule d'applications, et par celui des surfaces figuratives, qui a donné lieu récemment à une communication intéressante de M. Lalanne à l'Académie des sciences, et à la publication par le ministère des travaux publics de *tables graphiques à double entrée*, propres à accélérer extraordinairement les calculs de terrassements de toutes sortes de voies.

Note. La géométrie ordinaire, la géométrie descriptive, la trigonométrie, les sections coniques, devraient constituer un seul et même enseignement. Mon manuel de géométrie en montre la possibilité ; mieux présentée, plus convenablement développée, cette méthode serait la plus courte, la plus facile, la plus appropriée à propager la science. A cet effet, les procédés du calcul littéral, la résolution des équations des deux premiers degrés, devrait suivre l'arithmétique et précéder l'enseignement géométrique, et c'est une marche assez généralement suivie. Lorsque les élèves en sont aux équations du 1er degré, ils ne connaissent pas encore les théorèmes nécessaires pour comprendre *les pentes*. Le problème des courriers appartient au fond commun de l'intelligence, et ne présente aucune difficulté, lorsque les courses s'exécutent sur des lignes fermées. La proportionnalité entre des quantités hétérogènes telles que l'espace et le temps, est une notion familière aux élèves dès l'arithmétique. Tm.

CONSIDÉRATIONS SUR LE TRIANGLE RECTILIGNE.

(V. p. 79 et 196, t. I.)

—

27. L'angle AEB est supplément de l'angle C; ainsi le cercle qui passe par les trois point A, B, E est égal au cercle qui passe par les trois points A, B, C; on a donc ce théorème :

« Le cercle qui passe par deux sommets d'un triangle et par le point de rencontre des trois hauteurs est égal au cercle circonscrit au triangle. »

28. Désignons par G', G'', G''' les centres des trois cercles ex-inscrits dans les angles C, B, A; le triangle $G'G''G'''$ est circonscrit au triangle ABC; l'angle G''' opposé à A, est égal à $90°-\frac{1}{2}A$; l'angle $G''=90°-\frac{1}{2}B$ et l'angle $G'=90°-\frac{1}{2}C$; d'où

$$\sin G'''=\cos\frac{1}{2}A;\ \sin G''=\cos\frac{1}{2}B;\ \sin G'=\cos\frac{1}{2}C.$$

l'aire du triangle G'G''G''' est la somme des aires des quatre triangles ABC, ABG', ABG'', BCG'''; or l'on a évidemment

$$\text{aire}\,ABG'=\frac{cS}{a+b-c};\text{aire}\,ACG''=\frac{bS}{a+c-b};\text{aire}\,BCG'''=\frac{aS}{b+c-a};$$

un calcul facile, fondé sur les fonctions symétriques, donne donc aire $G'\,G''\,G''' = \frac{pr}{4S} = t.$

29. Soient $G''\,G''' = m'$; $G'\,G''' = m''$; $G'\,G'' = m'''$; on aura

$$t=\frac{1}{2}\,m'm''\cos\frac{1}{2}\,A=\frac{1}{2}\,m'm'''\cos\frac{1}{2}\,B=\frac{1}{2}\,m''m'''\cos\frac{1}{2}\,C;$$

$$\text{d'où } t^3=\frac{1}{8}\,(m'm''m''')^2\cos\frac{1}{2}\,A\cos\frac{1}{2}\,B\cos\frac{1}{2}\,C.$$

$$\text{On a } \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};\ \text{et de là } \cos^2\frac{1}{2}\,A=\frac{p(b+c-a)}{4bc},$$

$$\text{ainsi } \left(\cos\frac{1}{2}\,A\cos\frac{1}{2}\,B\cos\frac{1}{2}C\right)^2=\frac{pS^2}{4r^2},$$

$$\cos\frac{1}{2}\,A\cos\frac{1}{2}\,B\cos\frac{1}{2}\,C=\frac{pS}{2r};\ \text{d'où}$$

$$(m'm''m''')^2=\frac{8t^3}{\cos\frac{1}{2}\,A\cos\frac{1}{2}\,B^4\,\frac{1}{2}\,C}=\frac{16t^3\rho}{pS}=\frac{16\rho^4p}{S^4}$$

$$\text{et } m'm''m'''=\frac{4\rho^2p}{S^2}$$

$$\text{de là le rayon du cercle circonscrit à } G'G''G''=\frac{m'm''m'''}{4t}=\frac{r}{2S},$$

or, le rayon du cercle circonscrit est $\frac{r}{4S}$, nous avons donc ce théorème :

« Le rayon du cercle qui passe par les centres de trois cercles ex-inscrits est le double du rayon du cercle circonscrit. »

30. L'angle G''GG''' est le supplément de l'angle G''G'G''' ; donc le cercle qui passe par les trois points G'', G''', G est

égal à celui qui passe par les trois points G′, G″, G‴ ; de là ce théorème :

La circonférence qui passe par trois quelconques des centres des cercles qui touchent à la fois les trois côtés d'un triangle est double de la circonférence circonscrite.

On a $$2m'm''S\cos\frac{1}{2}A = pr\ (29),$$

d'où, en remplaçant $\cos\frac{1}{2}A$ par sa valeur

$$m''^2m'^2 = \frac{pr^3}{S^2}\cdot\frac{bc}{b+c-a},$$

on a deux équations semblables pour $m'^2m'''^2$, $m''^2m'''^2$, et l'on en tire

$$m''^2 = \frac{prb(a+c-b)}{4S^2};\ m'^2 = \frac{prc(a+b-c)}{4S^2},\ m'''^2 = \frac{pra(b+c-a)}{4S^2}.$$

32. Le théorème du § 29 se démontre facilement par des considérations géométriques. En effet, les trois bissectrices sont les hauteurs du triangle G′G″G‴, et les trois sommets du triangle ABC sont les pieds de ces hauteurs. Or, le cercle circonscrit au triangle G′G″G‴ est évidemment le double du cercle des neuf points qui passent par les sommets A, B, C, etc. ; donc..... (*Voir* p. 197, t. I).

Sur les trois hauteurs du triangle.

33. Soient h', h'', h''' les trois hauteurs : la première relative au côté a, la seconde à b et la troisième à c ; on a donc $ah' = bh'' = ch''' = 2S$. Concevons un second triangle ayant pour côtés $\frac{h''h'''}{z}$, $\frac{h'h'''}{z}$, $\frac{h'h''}{z}$, z étant une longueur quelconque ; ce second triangle est évidemment semblable au premier, savoir : le premier côté est homologue au côté a, le second au côté b et le troisième au côté c. Soit σ l'aire de ce second triangle, on aura

$$16z^4\sigma^2 = 2h'^2h''^2h'''^2(h'^2+h''^2+h'''^2) - h'^4h''^4 - h'^4h'''^4 - h''^4h'''^4 = 16H^2$$

$z^2\sigma = \mathrm{H}$; la hauteur relative à la base $\frac{h''h'''}{z}$ est $\frac{2z\sigma}{h''h'''}$ ou $\frac{2\mathrm{H}}{zh''h'''}$; on a donc la proportion

$$\mathrm{S} : \sigma :: h'^2 : \frac{4\mathrm{H}^2}{z^2h''^2h'''^2};\ \mathrm{S} = \frac{z^2h'^2h''^2h'''^2\sigma}{4\mathrm{H}^2} = \frac{h'^2h''^2h'''^2}{4\mathrm{H}},$$

d'où $\quad a = \frac{h'h''^2h'''^2}{2\mathrm{H}},\ b = \frac{h'^2h''h'''^2}{2\mathrm{H}},\ c = \frac{h'^2h''^2h'''}{2\mathrm{H}}.$

Ainsi, connaissant les trois hauteurs, on peut calculer les trois côtés et même logarithmiquement; car H, comme on sait, se décompose en facteurs; la solution géométrique du problème ne présente aucune difficulté.

34. On a

$$a + b + c = \frac{h'h''h'''(h'h'' + h'h''' + h''h''')}{2\mathrm{H}},\quad abc = \frac{h'^5h''^5h'''^5}{8\mathrm{H}^3};$$

donc $\quad \mathrm{R} = \frac{h'^3h''^3h'''^3}{8\mathrm{H}^2};\ \rho = \frac{h'h''h'''}{h'h'' + h'h''' + h''h'''},$

ou $$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} + \frac{1}{h'''},$$

ce qui fournit cet énoncé :

Théorème. La réciproque du rayon inscrit est égale à la somme des réciproques des trois hauteurs; la démonstration peut se faire plus brièvement par la voie directe. En effet,

$$\frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} + \frac{1}{h'''} = \frac{a + b + c}{2\mathrm{S}} = \frac{1}{\rho}.$$

35. On a aussi $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''} + \frac{1}{\rho'''}$ (p. 200, t. I); donc la somme des réciproques des trois hauteurs est égale à la somme des réciproques des trois rayons des cercles ex-inscrits.

On a d'ailleurs, pour l'expression de ces rayons, les valeurs suivantes :

$$\frac{h'h''h'''}{h'h'' + h'h''' - h''h'''};\ \frac{h'h''h'''}{h'h'' + h''h''' - h'h'''};\ \frac{h'h''h'''}{h'h''' + h''h''' - h'h''}$$

Tm.

NOTE SUR LES CENTRES DE GRAVITÉ.

1. x', y', z'; x'', y'', z''; etc., désignant les coordonnées de divers points, soient P, Q, R des fonctions homogènes du degré m des coordonnées x', y', z'; x'', y'', z'', etc.; et P', Q', R' des fonctions homogènes des mêmes coordonnées et du degré $m-1$; faisons $x=\frac{P}{P'}$; $y=\frac{Q}{Q'}$; $z=\frac{R}{R'}$; x, y, z seront les coordonnées d'un certain point O; si toutes les coordonnées x', y', z', x'', y'', z'', etc., augmentent proportionnellement, les coordonnées du point O augmentent dans le même rapport; donc le lieu géométrique du point O, par suite de cette augmentation, est une droite passant par l'origine.

2. Ceci s'applique évidemment au centre de gravité O d'un système de masses dont les centres de gravité ont pour coordonnées x', y' z'; x'', y'', z'', etc., soit que les masses restent constantes ou augmentent aussi proportionnellement.

3. Théorème. Un polyèdre étant circonscrit à une sphère, le centre de gravité de l'aire du polyèdre, et le centre de gravité du volume, sont sur une droite, passant par le centre de la sphère.

Démonstration. Considérons une pyramide, ayant son sommet au centre de la sphère et pour base une face du polyèdre; en prenant le centre de la sphère pour origine, les coordonnées du centre de gravité du volume de la pyramide, sont respectivement les 3/4 des coordonnées du centre de gravité de la base; et la masse de la pyramide, divisée par la masse de la base, est toujours égale au tiers du rayon de la en vertu du paragraphe précédent, le théorème est démontré.

Observation. Ce théorème, qui existe aussi pour les polygones circonscrits au cercle, est de M. Brassine, professeur à l'École royale d'artillerie de Toulouse. Tm.

BIBLIOGRAPHIE.

Discours sur la nature des grandeurs négatives et imaginaires, et interprétation des solutions imaginaires en géométrie; par Maximilien Marie, ancien élève de l'École polytechnique. Paris, in-8 de 130 pages, une planche gravée de 5 figures (*).

Ce discours était destiné à être lu devant l'Académie des sciences. S'adressant à un tel auditoire, l'auteur n'avait besoin ni de viser à une grande clarté, ni d'entrer dans de longues explications, si nécessaires en parlant aux intelligences ordinaires ; aussi, je n'ai presque rien compris à ce discours-là et ne suis pas même bien sûr du peu que je vais en rapporter. L'auteur dit qu'on porte les coordonnées négatives du côté opposé à celui qu'on a assigné aux coordonnées positives, afin que, quelque changement qu'on fasse aux axes, la forme de la courbe en discussion reste toujours la même. M. Marie donne cette interprétation comme une idée profonde, d'une grande nouveauté. Comme il me semble que cette explication appartient à tout le monde, il faut donc qu'il y ait ici quelque intention secrète qui m'échappe complétement; voici du moins comment j'ai toujours conçu la théorie géométrique des quantités négatives, quant à la position.

Admettons que sur une droite indéfinie, donnée de position, on veuille chercher des points jouissant de certaines

(*) Chez Carilian-Gœury et Vor Dalmont, éditeurs, quai des Augustins, nos 39 et 41, à Paris.

propriétés. L'esprit humain ne peut procéder que du connu à l'inconnu. On prend donc arbitrairement un point fixe sur cette droite, et on cherche, d'après les conditions du problème, les distances des points inconnus à ce point connu, et ces distances x, dans le courant du raisonnement, sont censées être portées à la droite du point fixe O; on parvient à une équation $f(x)=0$; or, les racines positives annoncent que les distances doivent être de fait portées à la droite du point O En effet, tous les calculs et opérations que l'on a faits pour parvenir à l'équation finale se réduisent à des additions et à des soustractions; il n'y a pas d'autres opérations possibles. Or, pour les quantités positives, l'addition équivaut à une augmentation véritable et la soustraction à une diminution véritables tandis que pour les quantité négatives, le résultat de l'addition est une diminution et le résultat de la soustraction un accroissement; de sorte que pour les racines positives, les opérations hypothétiquement augmentatives ou diminutives sont des opérations effectivement telles, et les points cherchés sont en effet placés à la droite du point O. Il n'en est point ainsi pour les racines négatives; mais analytiquement parlant, on peut toujours se débarrasser de cette sorte de racines. En effet, faisant $x=y-l$, l est une quantité positive supérieure au plus grand module des racines négatives; l'équation $\varphi(y)=0$ n'a plus de racines négatives. Or, on peut exécuter la même opération géométriquement; pour cela, il suffit de faire reculer le point fixe O de la longueur l vers la gauche, et si on résout le problème relativement à ce nouveau point fixe O′, l'équation en y n'admettant que des racines positives, les points cherchés sont à la droite du point O′, et à cause de la relation $y=x+l$ les racines négatives de l'équation en x désignent des points situés entre les deux points fixes O et O′, et l'on voit que sans avoir besoin de changer le point fixe, on trouve de suite ces points en portant les valeurs négatives de x à la gauche du point O.

Si les points cherchés sont sur un plan donné de position, on ramène le problème à la recherche des projections de ces points sur deux droites fixes, et on rentre ainsi dans le cas précédent. Si les points à déterminer sont situés dans l'espace, on les projette sur trois plans.

D'après ce qui précède, on voit que les signes indiquent des positions relatives seulement pour des quantités qui subissent des accroissements ou des diminutions sans changer de direction, qui, pour ainsi dire, n'ont qu'un mouvement de va-et-vient; mais si ces quantités changent aussi de direction, les raisonnements précédents cessent d'être applicables. Ainsi, les signes des sinus, cosinus, tangentes indiquent aussi les positions; mais le signe de la sécante ne se rattache à une position qu'autant qu'on regarde cette ligne trigonométrique comme la réciproque du cosinus. De même, dans l'équation polaire $\varphi(\rho, \omega) = 0$, le signe de ω indique une position; mais pour connaître la position du point qui termine ρ, il faut recourir aux coordonnées rectangulaires x, y de ce point, et ayant les équations $x = \rho \cos \omega$, $y = \rho \sin \omega$, les signes de ρ, $\sin \omega$, $\cos \omega$ font connaître les signes de x et de y.

Il est utile de remarquer que $x = 0$ et $x = -0$ indiquent un seul et même point; il en est de même de la réciproque de ces valeurs, c'est-à-dire que $x = +\infty$ et $x = -\infty$ s'appliquent au même point, l'identité $+\infty = -\infty$ établit la continuité dans les lignes à branches infinies. Il faut d'ailleurs se rappeler qu'une droite est analytiquement considérée une circonférence à rayon infini : les extrémités de cette circonférence se confondent.

Soient les deux équations

$$y = fx + \psi x \sqrt{x^2 - a^2}\,; \quad y = fx + \psi(x)\sqrt{a^2 - x^2},$$

fx. $\psi(x)$ étant des polynomes réels, les mêmes valeurs de x, différentes de a, qui rendent y imaginaire dans l'une de ces courbes, rendent y réelle dans l'autre, et *vice versâ*. M. Marie dit qu'une de ces courbes est la *conjuguée* de l'autre, et que les propriétés d'une de ces courbes peuvent servir à deviner les propriétés de l'autre; on a pour exemple le cercle et l'hyperbole équilatère. C'est en cela que consiste l'interprétation des solutions imaginaires ; où est le merveilleux de cette interprétation ?

En finissant, je crois devoir répéter que je n'ai pas la certitude d'avoir bien expliqué les idées contenues dans cet ouvrage ; pour me justifier, donnons un spécimen du style.

« La définition d'une courbe géométrique peut toujours » être présentée ainsi : tous ses points sont tels que si on » construit deux courbes (déjà définies quant à leurs pro- » priétés générales, c'est-à-dire celles qui ne dépendent pas » des paramètres) qui passent par l'un d'eux et qui, pour le » reste, soient déterminées par des conditions invariables » avec la position du point (c'est-à-dire qui ont leurs expres- » sions géométriques dans l'ensemble de la construction d'une » figure fixe) ; ces deux courbes jouiront, l'une par rapport » à l'autre, d'une propriété qui, lorsque l'une est déter- » minée, équivaut, pour la construction de l'autre, à la » donnée d'un point par lequel elle devrait passer (p. 80). »
Comprenez-vous ?

Dans la préface, l'auteur raconte ses désappointements académiques avec une simplicité caustique qui rappelle quelquefois le genre de Paul-Louis Courrier. On voit que pour être clair, M. Marie n'a qu'à vouloir. La profondeur en mathématiques est celle des cieux, il y fait jour. Laissons la profondeur des souterrains aux scolastiques anciens et modernes. Tm.

ANNONCES.

Cours de Géométrie élémentaire, par A. J. H. Vincent, professeur de mathématiques au collége royal de Saint-Louis, etc., etc. ; revu conjointement par l'auteur et par M. Bourdon, inspecteur général de l'Université, examinateur d'admission à l'École polytechnique, etc., etc., ouvrage adopté par l'Université, 5^e édition. Paris, Bachelier, 1844.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES AUTEURS *.

(*) Nous devons ces tables à l'extrême obligeance de M. le profess. Anne (L.).

TABLE
PAR ORDRE DE MATIÈRES.

I. Arithmétique.

II. Algèbre élémentaire.

III. Algèbre supérieure.

IV. Géométrie élémentaire.

V. Trigonométrie rectiligne.

VI. Trigonométrie sphérique.

VII. Géométrie analytique à deux dimensions.

VIII. Géométrie analytique à trois dimensions.

IX. Statique.

SOLUTIONS DES PROBLÈMES ET DÉMONSTRATION DE THÉORÈMES.

X. Algèbre élémentaire.

XI. Algèbre supérieure.

XII. Géométrie élémentaire.

XIII. Trigonométrie rectiligne.

XIV. Géométrie analytique à deux dimensions.

XV. Géométrie analytique à trois dimensions.

QUESTIONS D'EXAMEN.

XVI. Algèbre supérieure.

XVII. Géométrie élémentaire.

XVIII. Géométrie analytique.

QUESTIONS D'EXAMEN.

XIX. Statique.

XX. Analyses d'ouvrages.

XXI. Extraits de journaux.

XXII. Problèmes non résolus et théorèmes non démontrés.

XXIII. Matières diverses.

ERRATA.

TOME I (*Supplément*).

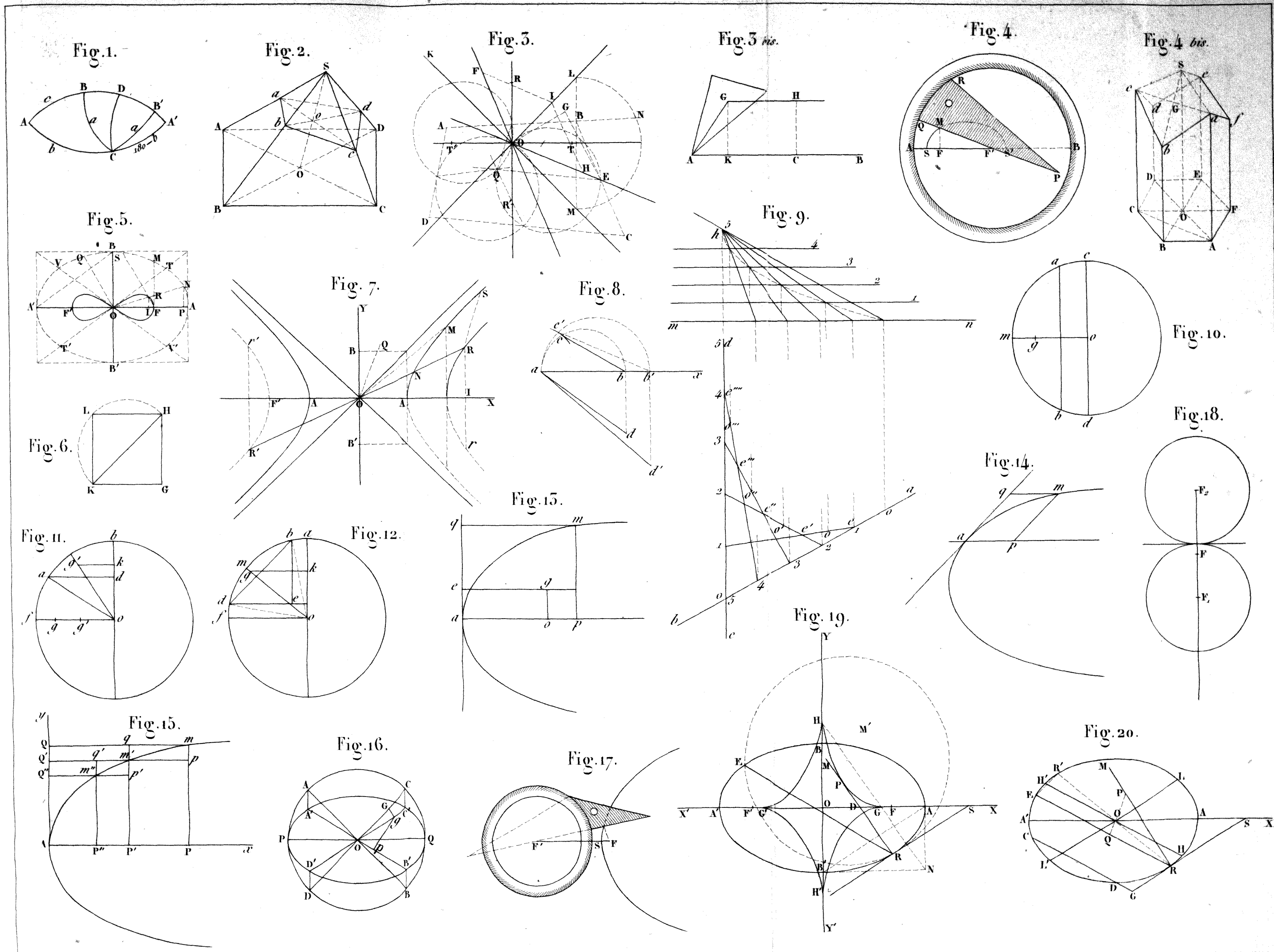
Page 133, ligne 9, en remontant, $\lambda(B^2-4AC)p$, *lisez :* $\lambda(B^2-4AC)p^2$.
Page 177, ligne 2, en descendant, $\div$, 2, 3, *lisez :* $\div$ 1, 2, 3.
Page 177, ligne 12, en descendant S^1, *lisez :* S_1.
Page 177, ligne dernière, P_1, *lisez :* P.
Page 178, ligne 6, en remont., *supprimez* $[1+(P-2)][1+(P-3)]$
Page 178, ligne 12, en remontant, P', P_2, *lisez :* P_1, P_2.
Page 198, ligne 13, en descendant, $2f$, *lisez :* 2S
Page 430, ligne 7, en descendant, le sera à la normale, *lisez :* sera la normale.
Page 483, ligne 4, en descendant, T_1AT_2, *lisez :* T_1MT_2
Page 489, ligne 3, en remontant, 4AE, *lisez :* 4AF.
Page 489, ligne 2, en remontant, 2AE, *lisez :* AE.
Page 493, ligne 11, en descendant, des, *lisez :* de.
Page 524, ligne 17, en descendant, rgle, *lisez :* règle.

TOME II.

Page 28, ligne dernière, $(p+q)x+pq$, *lisez :* $-(p+q)xy+pqx$.
Page 29, ligne 13, en descendant, $p+q$, *lisez :* pq.
Page 35, ligne 5, en remontant, [BF]+[DE], *lisez :* [BF']+[DE']
Page 48, ligne 12, en remontant, grande, *lisez :* petite.
Page 80, ligne 6, en remontant, li, *lisez :* il.
Page 85, ligne 13, en descendant, $+4p$, *lisez :* $+3p$.
Page 86, ligne 6, en descendant, $\frac{1}{a^{\alpha+i}}$, *lisez :* $\frac{1}{\alpha^{i}+1}$.
Page 86, ligne 12, en descendant, $\frac{1}{\alpha+2}$, *lisez :* $\frac{1}{\alpha^{i}+2}$.
Page 96, ligne 12, en remontant, soit, *mettez* 62.
Page 97, ligne 11, en descendant, 1830, *lisez :* 1832.
Page 107, ligne 9, en descendant, mSm'^2v, *lisez :* $-mSm'^2v$.
Page 111, ligne 4, en descendant, rs, *lisez :* $r's$.
Page 111, ligne 4, en descendant, rn', *lisez :* rr'.
Page 115, ligne 3, en descendant, 2C, *lisez :* 2A.
Page 138, ligne 2, en remontant, l'ordonnée, *lisez :* la double ordonnée.
Page 142, ligne 2, en remontant, $=0$, *lisez :* $=0(6)$.
Page 144, ligne 1, en remontant, (9), *lisez :* (6).
Page 196, ligne 2, en descendant, $2b+a$, *lisez :* $2(b+a)$.

Page 215, ligne 7, en descendant, $p+1$, *lisez* : $p-1$.
Page 215, ligne 8, en descendant, $p+1$, *lisez* : $p-1$.
Page 215, ligne 10, en descendant, $qA'b$, *lisez* : $(q+1)A'b$.
Page 215, ligne 13, en descendant, $qA'b$, *lisez* : $(q+1)A'b$.
Page 215, ligne 14, en descend., $pA''xPyq-1$, *lisez* : $(p+1)A''axPyq-1$.
Page 215, ligne 16, en remontant, $pA''a$, *lisez* : $(p+1)A''a$.
Page 225, ligne 10, en remontant, O *lisez* : O,.
Page 228, ligne 5, en remontant, Théorème, *lisez* : 64. Théorème
Page 237, ligne 4, en descendant, x, *lisez* : x^2.
Page 237, ligne 12, en descendant, le *lisez* : la.
Page 255, ligne 13, en descendant, à faire, *lisez* : à faire voir.
Page 257, ligne 14, en descendant, $p-n+2$, *lisez* : $p-n-2$.
Page 258, ligne 13, en remontant, 1837, *lisez* : 1827.
Page 260, ligne 12, en descendant, $x-a)^2$, *lisez* : $(x-a)^2$.
Page 292, ligne 11, en remontant, pour, *lisez* : sur.
Page 310, ligne 13, en remontant, π, *lisez* : $\frac{\pi}{2}$.
Page 310, ligne 14, en remontant, π, *lisez* : $\frac{\pi}{2}$.
Page 323, ligne, 3, en descendant, $-Px$, *lisez* : $+Px$.
Page 327, ligne dernière, $\frac{1}{Bp}$, *lisez* : $\frac{1}{Bp}$.
Page 376, ligne 11, en remontant, rendu, *lisez* : rendus.
Page 416, ligne 4, en remontant, 64, *lisez* : 76.
Page 416, ligne 7, en remontant, 63, *lisez* : 75.
Page 449, ligne 13, en descendant, $2my$, *lisez* : my.
Page 449, ligne 8, en remontant, il est, *lisez* : il en est.
Page 449, ligne 8, en remontant, pour, *lisez* : de tous.
Page 456, ligne 8, en descendant, 65, *lisez* : 77.
Page 456, ligne 9, en remontant, 66, *lisez* : 78.
Page 456, ligne 4, en remontant, 67, *lisez* : 79.
Page 462, ligne 11, en remontant, solution, *lisez* : solution, *fig.* 93.
Page 477, ligne 3, en remontant, $\sqrt{}^3$, *lisez* : $\sqrt{3}$.
Page 495, ligne 3, en descendant, compliquée, *ajoutez* : que celle qu'on emploie.
Page 495, ligne 10, en remontant, onstruire, *lisez* : construire.
Page 499, ligne 14, en descendant, droite, *effacez*.
Page 510, ligne 4, en remontant, 2, *lisez* : x.
Page 510, ligne 3, en descendant,), *mettez* (.
Page 513, ligne 2, en remontant $\frac{d}{\rho'^2}$ *lisez* : $\frac{\rho^2}{\rho'^2}$
Page 513, ligne 1, en remontant tang^2, *lisez* : tang.

PARIS.—IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT,
IMPRIMEURS DE L'UNIVERSITÉ ROYALE DE FRANCE,
Rue Racine, 28, près de l'Odéon.



Gravé par Adam et Lemaitre.

Fig. 21.

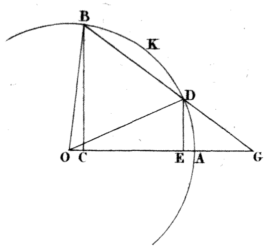


Fig. 22.

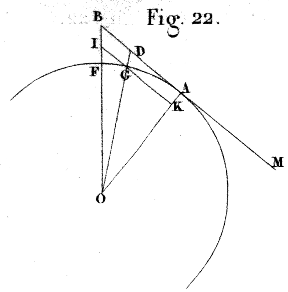


Fig. 23.

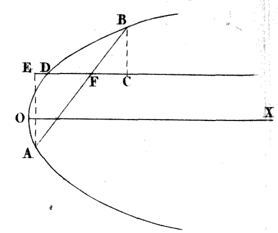


Fig. 24.

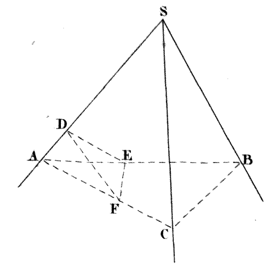


Fig. 25.

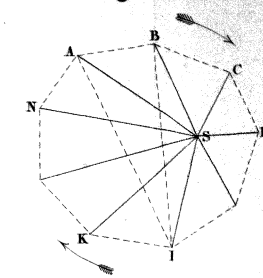


Fig. 26.

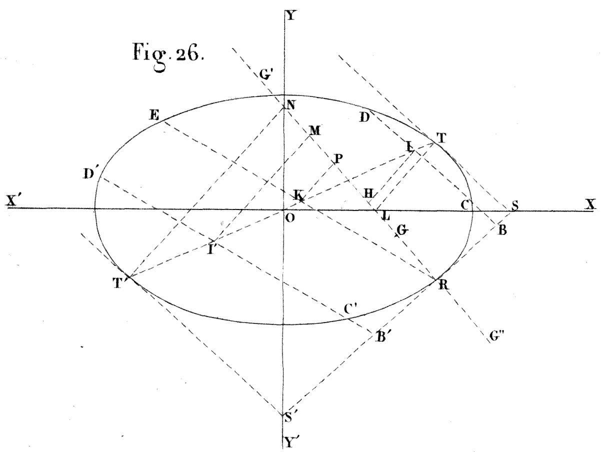


Fig. 27.

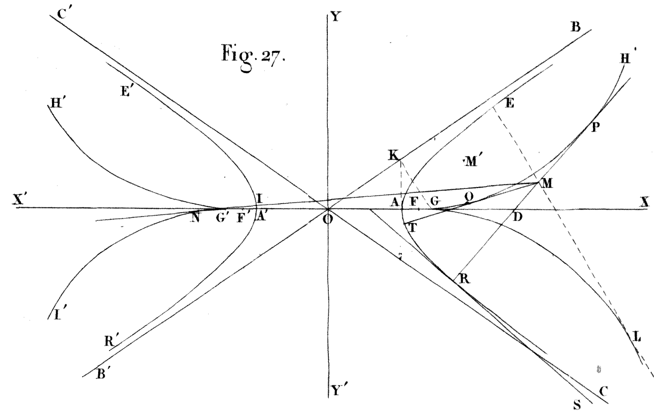


Fig. 31.

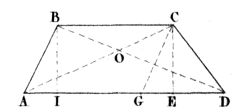


Fig. 28.

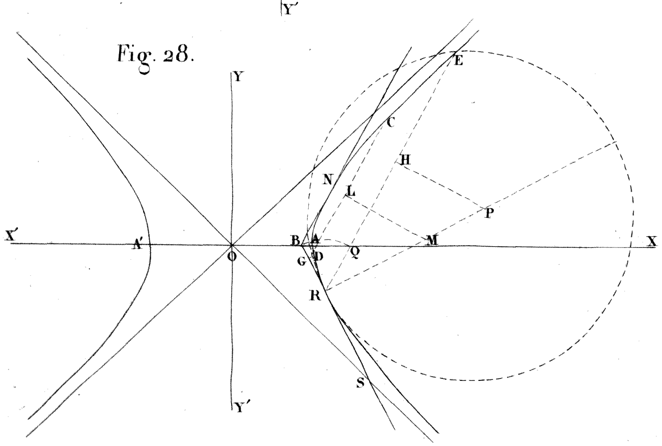


Fig. 29.

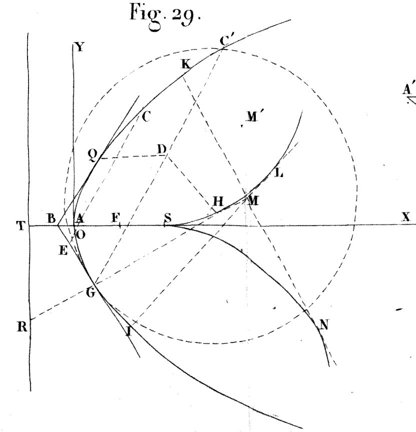


Fig. 30.

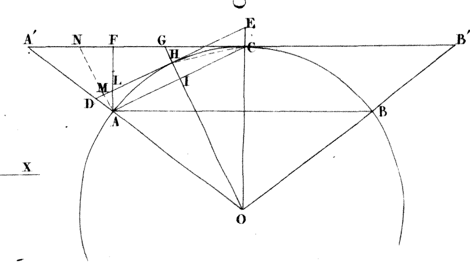


Fig. 32.

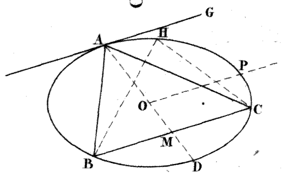


Fig. 33.

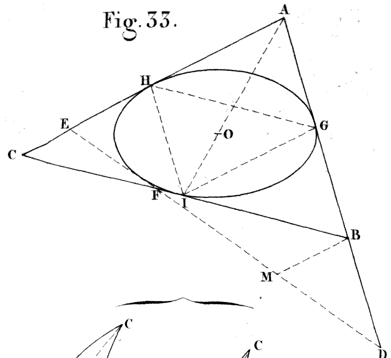


Fig. 34.

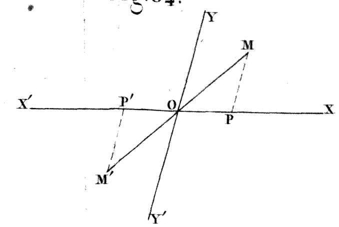


Fig. 35.

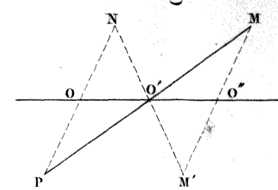


Fig. 36.

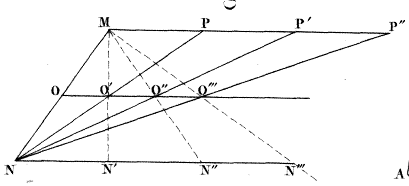


Fig. 37.

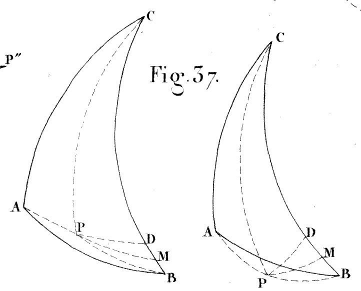


Fig. 38.

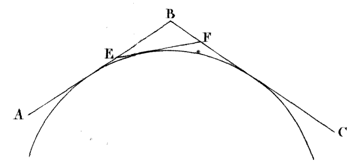


Fig. 39.

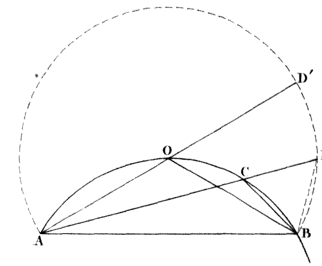


Fig. 40.

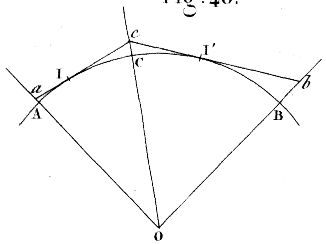


Fig. 41.

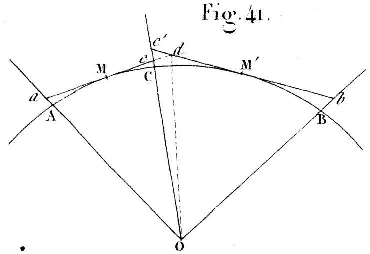


Fig. 42.

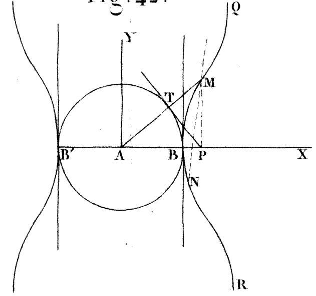


Fig. 43.

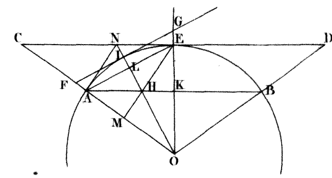


Fig. 44.

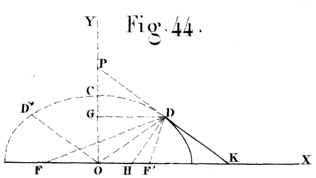


Fig. 45.

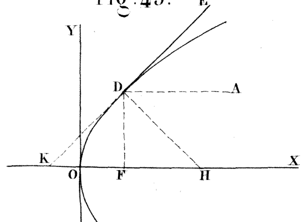


Fig. 46.

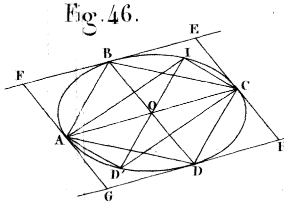
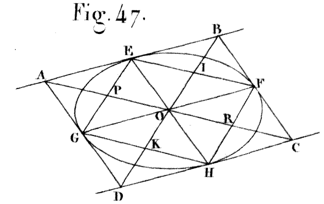


Fig. 47.



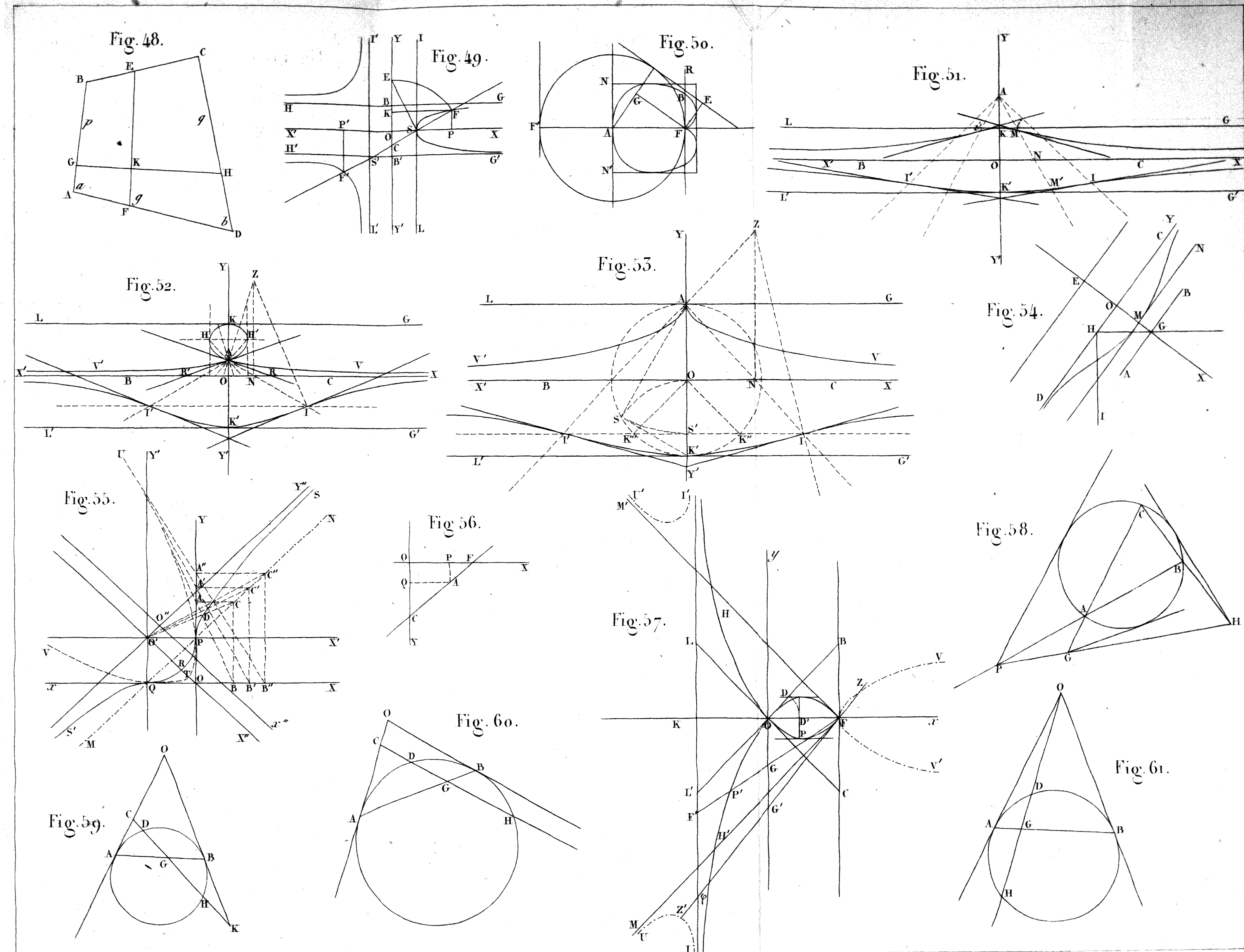


Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.

Lemaitre sc.

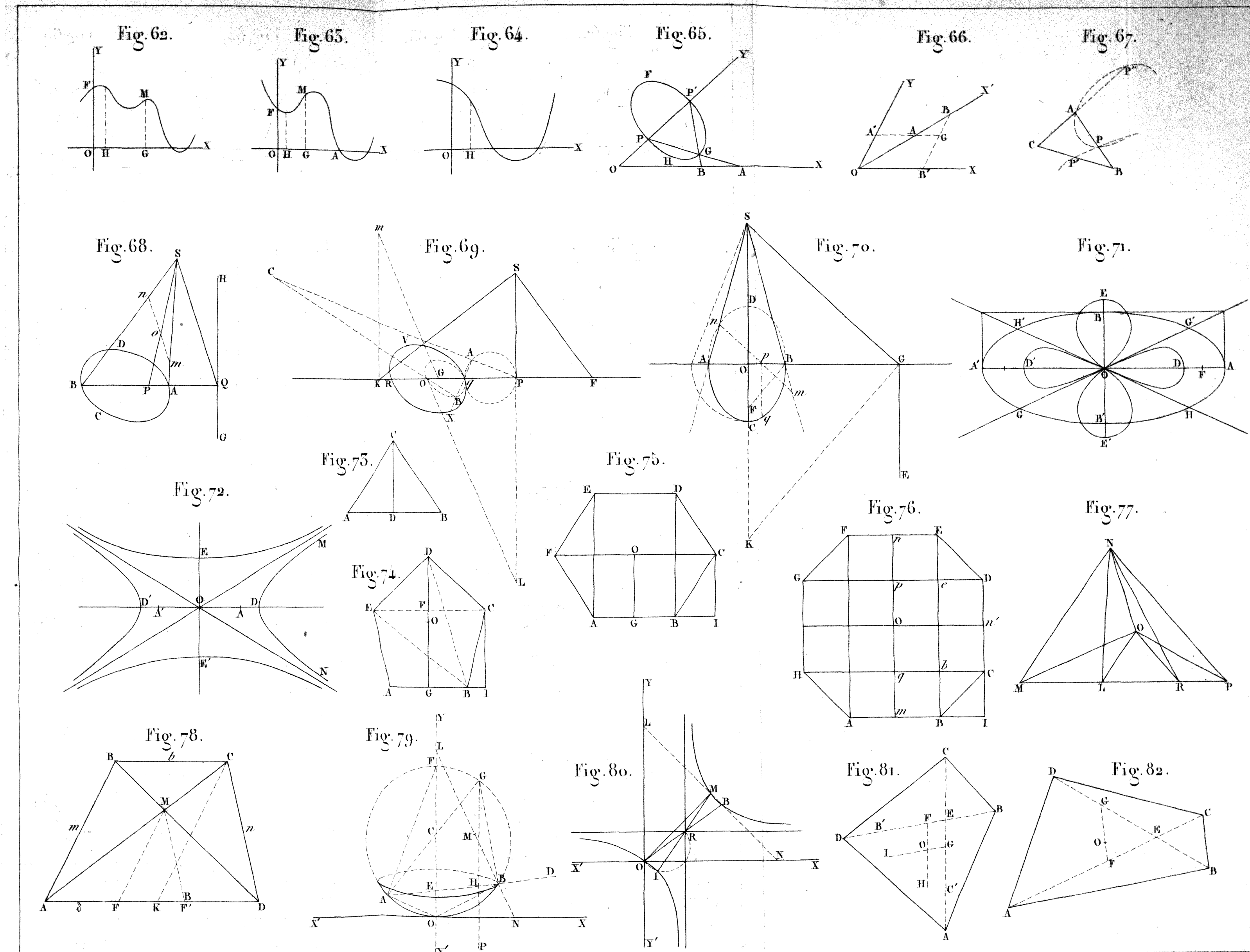


Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 82.

Lemaitre sc.

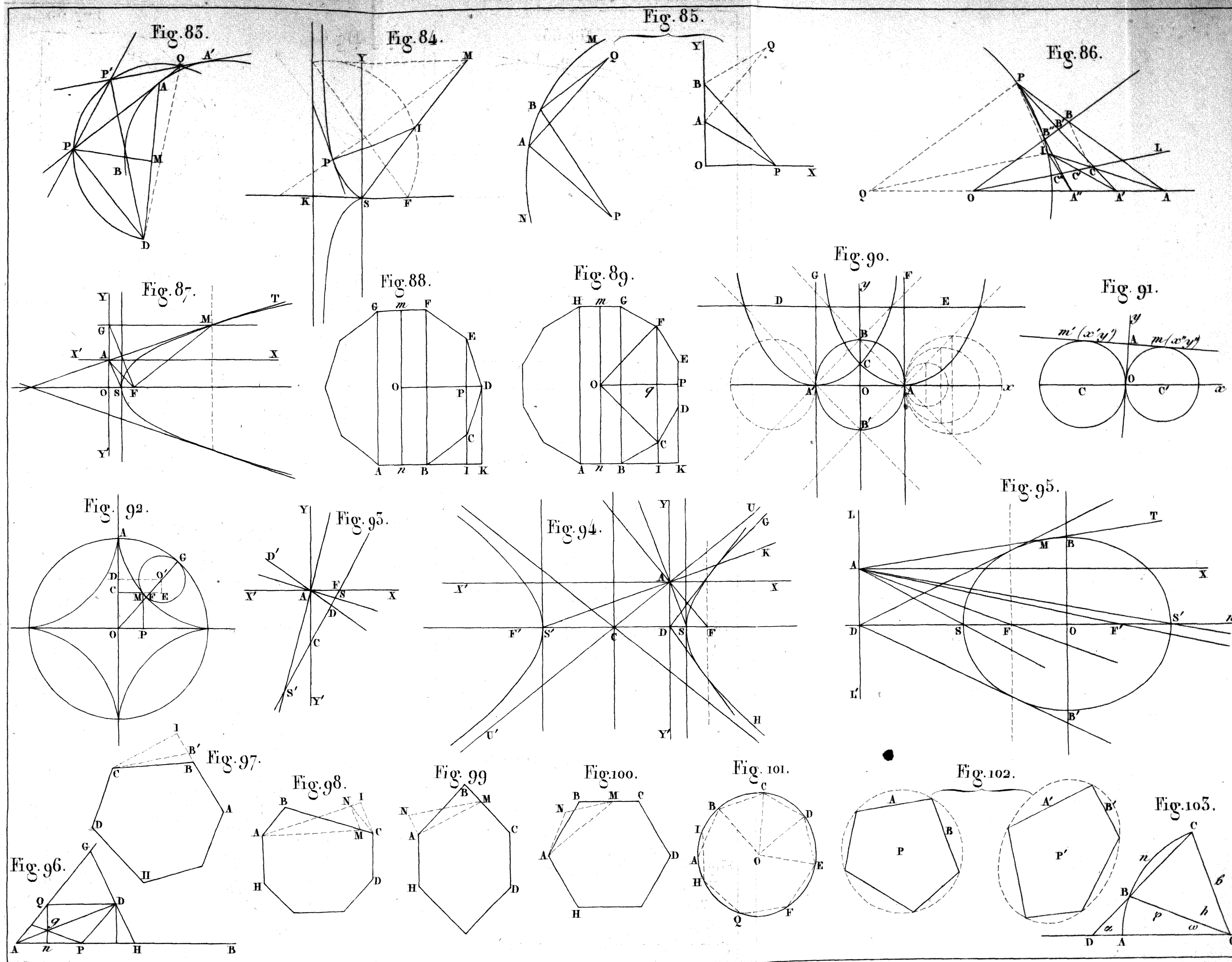


Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 90.
Fig. 91.
Fig. 92.
Fig. 93.
Fig. 94.
Fig. 95.
Fig. 96.
Fig. 97.
Fig. 98.
Fig. 99
Fig. 100.
Fig. 101.
Fig. 102.
Fig. 103.

Lemaitre sc.