Mémoires de la S. M. F.

Alain Rapp

# L'équation $\bar{\partial}$ avec décroissance au bord sur certains ouverts convexes d'un espace de Banach

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 46 (1976), p. 67-72
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1976__46__67_0>

Journées Géom. dimens. infinie [1975 - LYON]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 46, 1976, p. 67 - 72.



# L'EQUATION "$\bar{\partial}$" AVEC DECROISSANCE AU BORD SUR CERTAINS OUVERTS CONVEXES D'UN ESPACE DE BANACH

par Alain RAPP

Etant donnée une forme différentielle $\omega$, continûment différentiable, $\bar{\partial}$ fermée, de type $(0,q)$ sur un ouvert convexe à frontière régulière d'un espace de Banach complexe, on montre que l'équation $\bar{\partial}\alpha = \omega$ admet une solution lorsque $\omega$ satisfait à des conditions de décroissance au bord de l'ouvert et "d'uniforme intégrabilité" au voisinage de l'infini.

NOTATIONS.

Soit E un espace de Banach complexe ; U un ouvert de E ; $\Omega_k^{(q)}(U)$ désignera l'espace des formes différentielles k-fois continûment différentiables sur U et de type $(0,q)$. Etant donnée une fonction V continue sur E à valeurs dans R, on note $\overset{\circ}{V}$ l'ouvert défini par $\{\xi \in E | V(\xi) < 0\}$.

On dira que la frontière de $\overset{\circ}{V}$ est régulière par morceaux si V est l'enveloppe supérieure d'une famille finie $(V_i)$ de fonctions continûment différentiables telles que chaque $V_i'$ soit bornée sur $\overset{\circ}{V}$ et non nulle sur la frontière de $\overset{\circ}{V}$.

OPERATEURS $k_q$. - Dans la suite, $X_\circ$ est un vecteur non nul de E. A toute forme $\omega$ dans $\Omega_\circ^{(q)}(U)$, on associe la forme $\omega_{X_\circ}$ de $\Omega^{(q-1)}(E)$ définie par

$$\omega_{X_\circ}(\xi \; ; X_1,\dots,X_{q-1}) = \omega(\xi \; ; X_\circ, X_1,\dots, X_{q-1})$$

lorsque $\xi \in U$ et

$$\omega_{X_\circ}(\xi \; ; X_1,\dots,X_{q-1}) = 0$$

lorsque $\xi \in E \setminus U$.

Lorsque l'application $t \to \omega_X(\xi + tX_\circ \; ; X^{q-1})$ est intégrable par rapport à la mesure du plan complexe $(\overline{dt} \wedge dt)/t$, quel que soit $\xi$ dans U et $X^{q-1}$ dans $E^{q-1}$, on pose

$$k_q(\omega)(\xi) = \frac{q}{2i\pi} \int \omega_X(tX_\circ + \xi) \frac{\overline{dt} \wedge dt}{t}$$

<u>OPERATEUR $\bar\partial$</u>. - Soit $\omega$ dans $\Omega^{(q)}(U)$. On définit $\bar\partial\omega$ par

$$(\bar\partial\omega)(\xi\ ;\ X_1,\dots,X_{q+1}) = \frac{1}{q+1}\sum_{k=1}^{k=q+1}(-1)^{k+1}\frac{\partial\omega}{\partial\bar X_k}(\xi\ ;\ X_1,\dots,\hat X_k,\dots,X_{q+1})$$

Lorsque $\omega$ est seulement dans $\Omega_\circ^{(q)}(U)$, pour tout sous-espace vectoriel H de dimension finie dans E, la restriction de $\omega$ à $U\cap H$ définit un courant [1] ; on posera $\bar\partial_H(\omega) = \bar\partial(\omega_{|U\cap H})$ au sens des courants.

Etant donné $\omega$ dans $\Omega_\circ^{(q)}(U)$, on dira que $\omega$ admet globalement un $\bar\partial$ s'il existe $\pi\in\Omega_\circ^{(q+1)}(U)$ tel que $\bar\partial_H(\omega) = \pi_{|H}$, pour tout H sous-espace de dimension finie de E.

On remarquera que si $\omega\in\Omega_1^{(q)}(U)$, alors $\omega$ admet globalement un $\bar\partial$ qui coïncide avec le $\bar\partial$ habituel.

Lorsque $\omega$ est dans $\Omega_1^{(q)}(U)$, on notera $\omega'$ l'application dérivée pour la structure réelle sous-jacente de E.

<u>THEOREME 1</u>. - *Soit $\mathring{V}$ un ouvert convexe borné à frontière régulière par morceaux de* E. *Soit $\omega$ dans $\Omega_1^{(q)}(\mathring{V})$ tel que*

*(i)* $\forall X^q\in E^q,\ \lim_{\varepsilon\to 0}|\sup|\omega(\xi\ ;\ X^q)|,\ -\varepsilon < V(\xi) < 0| = 0$

*(ii) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(\bar\partial\omega)(\xi\ ;\ X^{q+1})$, resp. $\omega'(\xi\ ;\ X^{q+1})$, soit borné sur* $\{\xi|-\varepsilon < V(\xi) < 0\}$, *pour tout $X^{q+1}\in E^{q+1}$.*

*Alors*

*(a)* $|k_q|(\omega)$ *admet globalement un $\bar\partial$, resp.* $k_q(\omega)\in\Omega_1^{(q-1)}(\mathring{V})$

*(b)* $\bar\partial k_q(\omega)$ *et* $k_{q+1}(\bar\partial\omega)$ *sont dans* $\Omega_\circ^{(q)}(\mathring{V})$ *et* $\omega = k_{q+1}(\bar\partial\omega) + \bar\partial(k_q(\omega))$.

La démonstration de ce théorème repose sur le lemme suivant :

<u>LEMME</u>. - *Soit $\mathring{V}$ un ouvert convexe, borné, de* E *à frontière régulière par morceaux et $X_\circ$ un vecteur non nul de* E. *Alors :*

Mes $\dfrac{\overline{dt\wedge dt}}{t}\{t\in\mathbb{C}|-\varepsilon < V(\xi r t X_\circ) < 0\}$ *est un $\mathcal{O}(\varepsilon)$ localement uniformément par rapport à $\xi$.*

*Démonstration.* - Posons $\Phi_i(\zeta,\lambda,x,y) = V_i(\zeta + (x+iy)X_\circ) + \lambda$. En utilisant la convexité de $\mathring{V}_1$ on constate d'abord que, pour tout $\zeta_\circ$, $x_\circ$, $y_\circ$ tels que $\zeta_\circ\in\mathring{V}$ et $\zeta_\circ + (x_\circ + iy_\circ)X_\circ\in\partial\mathring{V}_i\cap\bar{\mathring{V}}$, l'une des dérivées partielles.

$\dfrac{\partial\Phi_i}{\partial y}(\zeta_\circ,\ 0,\ x_\circ,y_\circ)$ ou $\dfrac{\partial\Phi_i}{\partial x}(\zeta_\circ,\ 0,\ x_\circ,\ y_\circ)$ est non nulle.

Supposons, pour fixer les idées, que $\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}$ ne s'annule pas en $(\zeta_o, 0, x_o, y_o)$ et appliquons le théorème des fonctions implicites. Il existe un voisinage W de $(\zeta_o, 0, x_o)$, un intervalle $]A', B'[$ contenant $y_o$ et une fonction $\varphi$ de classe $C^1$ définie sur W, à valeurs dans $]A', B'[$, tels que $y = \varphi(\zeta,\lambda,x)$ soit solution implicite de l'équation $\Phi_i(\zeta,\lambda, x, y) = 0$ avec $(\zeta_o, 0, x_o, y_o)$ comme conditions initiales. Puisque chaque $V_i'$ ne s'annule pas au bord, on choisit W de telle sorte que $|V_i' \circ \varphi|$ soit borné inférieurement par un nombre $a > 0$ sur W. Il existe ainsi un voisinage V de $\zeta_o$, un intervalle $]A,B[$ contenant $x_o$ et un nombre $\alpha$ tel que, pour tout $\varepsilon \in ]0, \alpha[$ et $\zeta \in V$, on ait :

$$\overset{\circ}{V}{}^{\varepsilon}_{i,\zeta} \cap \{]A, B[ \times ]A', B'[\} = \{x+i\varphi(\zeta,\lambda,x) \mid x \in ]A,B[,\ 0 \leqslant \lambda < \varepsilon\}$$

Puisque $|V_i' \circ \varphi|$ est minoré par a sous les conditions précédentes, $|\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}|$ est majoré par $\frac{1}{a}$ sous les mêmes conditions et l'aire de l'ensemble :

$\overset{\circ}{V}{}^{\varepsilon}_{i,\zeta} \cap \{]A,B[ \times ]A',B'[\}$ est majoré par $\frac{B-A}{a} . \varepsilon$, pour $\varepsilon < \alpha$ et $\zeta \in V$. Un argument de compacité permet maintenant de construire un ouvert $\Delta$ contenant $E^i_{\zeta_o}$ et un nouveau voisinage V de $\zeta_o$ tel que l'aire de $\overset{\circ}{V}{}^{\varepsilon}_{i,\zeta} \cap \Delta$ soit majoré par $K.\varepsilon$ pour tout dans V. De plus, pour $\varepsilon$ assez petit et $\zeta$ assez voisin de $\zeta_o$, les t pour lesquels $\zeta + t.X_o$ appartient à $\overset{\circ}{V}{}^{\varepsilon}_i \cap \overset{\circ}{V}$, appartiennent à $\Delta$.

On en déduit donc que l'aire de $\{t|\zeta + tX_o \in \overset{\circ}{V}{}^{\varepsilon}_i \cap \overset{\circ}{V}\}$ est un $\mathcal{O}(\varepsilon)$ localement uniformément par rapport à $\zeta$. On a clairement la même conclusion pour l'ensemble $\{t|\zeta + tX_o \in \overset{\circ}{V}{}^{\varepsilon}\}$. Enfin la distance de l'origine à $\overset{\circ}{V}{}^{\varepsilon}_{i,\zeta} \cap \overset{\circ}{V}_\zeta$ est s.c.i. par rapport à $\zeta$ et décroissante par rapport à $\varepsilon$ ; elle est donc localement bornée inférieurement par un nombre strictement positif, indépendant de $\varepsilon$ ; on obtient ainsi la même conclusion en substituant la mesure $\frac{\overline{dt} \wedge dt}{|t|}$ à celle de Lebesgue.

Revenons à la démonstration du théorème :

Considérons une fonction $\Psi$ de classe $C^1$ sur $R^N$, où N est le nombre de fonctions $V_i$ dont V est l'enveloppe supérieure, telle que $\Psi(x) = 1$ si $x \in ]-\infty,-1]^N$ et $\Psi(x)=0$ si l'une des variables $x_i$ est dans l'intervalle $]1,+\infty[$.

La forme $|\omega_\varepsilon|$, définie par $\Psi(\frac{V_1+2\varepsilon}{\varepsilon}, \ldots, \frac{V_N+2\varepsilon}{\varepsilon}).\ \omega_\varepsilon$, appartient à $\overset{\circ}{\Omega}{}^q_1(V)$, on peut donc lui appliquer un résultat établi par P. BERNER [2], selon lequel :

$$\omega_\varepsilon = k_{q+1}(\overline{\partial}\omega_\varepsilon) + \overline{\partial}(k_q(\omega_\varepsilon)).$$

En appliquant le lemme ci-dessus, on constate que $k_{q+1}(\overline{\partial}\omega_\varepsilon)$ converge localement uniformément vers $k_{q+1}(\overline{\partial}\omega)$ ; de plus il est clair que $\overline{\partial}(k_q(\omega_\varepsilon)) = \omega_\varepsilon - k_{q+1}(\overline{\partial}\omega_\varepsilon)$

converge localement uniformément vers $\pi = \omega - k_{q+1}(\overline{\partial}\omega)$.

Ainsi $k_q(\omega)$ admet globalement un $\partial$ et $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \partial k_q(\omega_\varepsilon) = \partial k_q(\omega)$.

On a donc par passage à la limite :

$$\omega = k_{q+1}(\overline{\partial}\omega) + \overline{\partial}(k_q(\omega)).$$

Lorsque $\omega'(\zeta, X^{q+1})$ est borné sur $\{\zeta | -\varepsilon < V(\zeta) < 0\}$ pour tout $X^{q+1}$ dans $E^{q+1}$, on démontre de même que $[k_q(\omega_\varepsilon)]'$ converge localement uniformément par rapport à $\zeta$ vers :

$$\frac{q}{2i\pi}\int_{\overset{\circ}{V}_\zeta} (\omega_{X_\circ})'\ (\zeta + tX_\circ)\ \frac{\overline{dt} \wedge dt}{t}\ .$$

Le "respectivement" s'en déduit alors facilement :

<u>COROLLAIRE 1</u>. - *Soit* $\omega$ *une forme de* $\Omega_1^{(o,q)}(\overset{\circ}{V})$ *,* $\overline{\partial}$ *fermée, telle que*

*i)* $\forall X \in E^q \quad \lim\limits_{\varepsilon \to 0} (\sup\limits_{-\varepsilon < V(\zeta) < 0} |\omega(\zeta)(X)|) = 0$

*Alors* $k_q(\omega)$ *admet globalement un* $\overline{\partial}$ *et* $\overline{\partial}(k_q(\omega)) = \omega$.

*Remarque.* - Si la norme de E est de classe $C^1$ sur $E \setminus \{0\}$, on peut appliquer les résultats ci-dessus à toute boule ouverte B de E, ce qui permet en particulier de voir que si $\omega$, $\overline{\partial}$ fermée, appartient à $\Omega_1^{(q)}(B)$ et si $\|\omega(\zeta)\|$ tend vers zéro quand $d(\zeta, \partial B)$ tend vers zéro, alors $k_q(\omega)$ admet globalement un $\overline{\partial}$ et $\overline{\partial}(k_q(\omega)) = \omega$.

Le résultat suivant étend, sous certaines conditions, le théorème 1 à des ouverts non bornés. On supposera dans la suite que la norme de E est de classe $C^1$ sur $E \setminus \{0\}$.

<u>THEOREME 2</u>. - *Soit* $\overset{\circ}{V}$ *un ouvert convexe de* E*, à frontière régulière par morceaux. Soit* $\omega$ *dans* $\Omega_1^{(q)}(\overset{\circ}{V})$ *tel que :*

*(i)* $\forall X^q \in E^q, \quad \lim\limits_{\varepsilon \to 0} |\sup|\omega(\zeta\ ;\ X^q)|,\ -\varepsilon < V(\zeta) < 0| = 0.$

*(ii) Il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que* $(\overline{\partial}\omega)(\zeta\ ;\ X^{q+1})$*, resp.* $\omega'(\zeta\ ;\ X^{q+1})$ *soit borné sur* $\{\zeta | -\varepsilon < V(\zeta) < 0\}$ *pour tout* $X^{q+1} \in E^{q+1}$.

*(iii) Pour tout* $\zeta_\circ$ *de* $\overset{\circ}{V}$*, il existe un voisinage* W *de* $\zeta_\circ$ *tel que :*

$$\sup_{\zeta \in W} |\omega_{X_\circ}(\zeta + tX_\circ\ ;\ X^q)| \quad \text{et} \ \sup_{\zeta \in W} |\overline{\partial}(\omega, \text{resp. } \omega')_{X_\circ}\ (\zeta + tX_\circ\ ;\ X^{q+1})|$$

*sont intégrables par rapport à la mesure* $\frac{\overline{dt} \wedge dt}{|t|}$*, pour tout* $X^{q+1}$ *dans* $E^{q+1}$ *ou* $X^q$ *dans* $E^q$.

*Alors :*

*a)* $k_q(\omega)$ *admet globalement un* $\bar{\partial}$, *resp.* $k_q(\omega) \in \Omega_1^{(q-1)}(\overset{\circ}{V})$.

*b)* $\bar{\partial}k_q(\omega)$ *et* $k_{q+1}(\bar{\partial}\omega)$ *sont dans* $\Omega_\circ^{(q)}(\overset{\circ}{V})$ *et* $\omega = k_{q+1}(\bar{\partial}\omega) + \bar{\partial}(k_q(\omega))$.

*Démonstration.* – Soit $\psi$ une fonction décroissante de classe $C^1$ sur R, nulle sur $]1,+\infty[$ et identique à 1 sur $]-\infty,-1[$.

Soit $\alpha_n$ défini par $\alpha_n(x) = \psi(\frac{\|x\|^2-2n}{n})$. Posons $\omega_n = \alpha_n.\omega$. En appliquant le théorème 1 à l'intersection de $\overset{\circ}{V}$ avec la boule centrée à l'origine de rayon $\sqrt{3n}$, on obtient :

$$\omega_n = k_{q+1}(\bar{\partial}\omega_n) + \bar{\partial}k_q(\omega_n). \tag{1}$$

L'hypothèse (iii) permet le passage à la limite pour obtenir le résultat.

<u>COROLLAIRE 2</u>. – *Soit* $\omega$ *une forme dans* $\Omega_1^{(q)}(\overset{\circ}{V})$, $\bar{\partial}$*-fermée, telle que :*

*(i)* $\forall X^q \in E^q, \lim\limits_{\varepsilon \to 0} (\sup. |\omega(\zeta)(X^q)|, \zeta|-\varepsilon < V(\zeta) < 0) = 0.$

*(ii) Pour tout* $\zeta_\circ \in V$, *il existe un voisinage* W *de* $\zeta_\circ$, *tel que* $\sup\limits_{\zeta \in W} |\omega_{X_\circ}(tX_\circ+\zeta \; ; \; |X^{q-1}|)|$ *est intégrable par rapport à la mesure* $\frac{\overline{dt} \wedge dt}{t}$, *quel que soit* $X^{q-1}$ *dans* $E^{q-1}$.

*Alors* $k_q(\omega)$ *admet globalement un* $\bar{\partial}$ *et* $\bar{\partial}(k_q(\omega)) = \omega$.

*Remarque.* – Le théorème 2 et le corollaire 2 s'appliquent à tout l'espace ; on peut en particulier en déduire le résultat suivant :

Pour tout $\omega$ dans $\Omega_1^{(q)}(E)$, $\omega$ $\bar{\partial}$-fermée, telle $\|\omega(\zeta)\| < \frac{A}{k+\|\zeta\|^2}$ alors $k_q(\omega)$ admet globalement un $\bar{\partial}$ et $\bar{\partial}(k_q(\omega)) = \omega$.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] P. LELONG, *Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives*, Gordon and Beach distribué par Dunod, 1967.

[2] P. BERNER, Conférence à Dublin (non publié).

[3] C.J. HENRICH, *The $\bar{\partial}$-equation with polynomial grouth on a Hilbert space*, Public Dept. of Math. Fordham Un. Broux, New-York.

[4] L. GROSS, *Abstract Wiener spaces (in proceedings of the fifth Berkeley)*, Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 2, Part. I, 1965, p. 31-42.

*Alain RAPP*
*U.E.R. de Mathématiques*
*Université de Nancy I*
*Case officielle 140*
*54037 NANCY CEDEX*

⊗⊗⊗⊗⊗