MÉMOIRES DE LA S. M. F.

MICHEL R. HERMAN

Sur la conjugaison des difféomorphismes du cercle à des rotations

Mémoires de la S. M. F., tome 46 (1976), p. 181-188
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1976__46__181_0>

Journées Géom. dimens. infinie [1975 - LYON]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 46, 1976, p. 181 - 188.

SUR LA CONJUGAISON DES DIFFEOMORPHISMES DU CERCLE A DES ROTATIONS

par Michel R. HERMAN

Dans cet exposé on développera d'abord un exemple dû à ARNOLD [1] d'une famille à deux paramètres de difféomorphismes du cercle, puis on interprétera et complètera les observations faites grâce aux théorèmes généraux démontrés dans [4].

I. INTRODUCTION ET NOTATIONS.

On considère le tore T de dimension 1, identifié à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Pour tout exposant r, entier nul ou infini ($0 \leqslant r \leqslant +\infty$), on considère $\mathrm{Diff}_+^r(T)$ le groupe des difféomorphismes de T de classe C^r préservant l'orientation (donc isotopes à l'identité). $\mathrm{Diff}_+^0(T)$ est le groupe des homéomorphismes de T préservant l'orientation.

On munit $\mathrm{Diff}_+^r(T)$ de la C^r-topologie ; il est alors homéomorphe à un espace métrique complet, donc de Baire ainsi que tous ses fermés. De plus c'est un groupe topologique.

Pour tout r, on a une inclusion canonique j^r de T dans $\mathrm{Diff}_+^r(T)$ définie par :

$$j^r(\alpha) = R_\alpha \qquad \text{et} \qquad R_\alpha(x) \equiv x + \alpha \pmod{1}$$

(R_α est la rotation d'angle α sur T).

Si f est un élément de $\mathrm{Diff}_+^r(T)$, f se relève en un difféomorphisme $\tilde{f}$ du revêtement universel $\mathbb{R}$ de T, de classe C^r préservant l'orientation ; $\tilde{f} - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ est $\mathbb{Z}$-périodique ($\tilde{f}(x+m) = \tilde{f}(x) + m$).

Soit $D^r(T)$ le sous-groupe de $\mathrm{Diff}_+^r(\mathbb{R})$ des difféomorphismes de classe C^r de $\mathbb{R}$, de la forme $\mathrm{Id} + \varphi$, où φ est $\mathbb{Z}$-périodique.

$D^r(T)$ est le revêtement universel de $\mathrm{Diff}_+^r(T)$ pour la C^r-topologie.

La rotation R_α se relève dans $D^r(T)$ en une translation notée $\tilde{R}_\alpha$:

$$\tilde{R}_\alpha(x) = x+\alpha.$$

Dans toute la suite de cet exposé, on étudie à quelle condition un élément de $\mathrm{Diff}_+^r(T)$ est conjugué à une rotation, et, dans le cas où il existe, la classe de différentiabilité de l'homéomorphisme de conjugaison.

II. NOMBRE DE ROTATION - PRINCIPALES PROPRIETES.

Cette notion a été pour la première fois introduite par Poincaré. Pour une démonstration des principales propriétés énoncées ci-dessous, voir [1] ou [2].

THEOREME 1 [2] et DEFINITION 1. - *Soit* $\tilde{f}$ *un élément de* $D^{\circ}(T)$, *la suite* $\left\{\frac{\tilde{f}^n - Id}{n}\right\}$ *converge uniformément quand* n *tend vers l'infini vers un élément de* $\mathbb{R}$, *noté* $\rho(\tilde{f})$, *et appelé* nombre de rotation de $\tilde{f}$.

On montre les propriétés suivantes :

a) L'application ρ de $D^{\circ}(T)$ dans $\mathbb{R}$ est continue pour la C°-topologie [1].

b) $\rho(\tilde{f}+1) = \rho(\tilde{f}) + 1$.

c) $\rho(\tilde{f}) = \rho(\tilde{g}\circ\tilde{f}\circ\tilde{g}^{-1})$ (pour tout élément g de $D^{\circ}(T)$).
$\rho(\tilde{f})$ est donc un invariant de conjugaison.

d) $\rho(\tilde{R}_\alpha) = \alpha$.

D'après la propriété b), ρ est défini sur l'ensemble quotient de $D^r(T)$ par $\mathbb{Z}$. On définit par passage au quotient une application ρ de $\mathrm{Diff}_+^o(T)$ dans T, encore appelée nombre de rotation.

Le nombre ρ est un invariant de conjugaison par homéomorphisme dans le groupe $\mathrm{Diff}_+^o(T)$. Notons que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

f est C°-conjugué à une rotation.
$\tilde{f}$ relèvement de f est C°-conjugué à une translation.

e) Soit f un élément de $\mathrm{Diff}_+^o(T)$, $\tilde{f}$ un relèvement de f. Ces deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- $\rho(\tilde{f})$ appartient à $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$
- f n'admet pas de point périodique.

En outre $\rho(\tilde{f}) = \frac{p}{q}$ ($\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, p et q entiers) est équivalent à : q est le plus petit entier tel que f^q ait un point fixe [1].

f) Soit f un élément de $\mathrm{Diff}_+^r(T)$ et supposons que f soit conjugué à une rotation R_α d'angle α irrationnel par 2 homéomorphismes h et h_1 :

$$f = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$$

$$f = h_1^{-1} \circ R_\alpha \circ h$$

Alors $$h = R_\beta \circ h_1.$$

(Puisque le centralisateur d'une rotation irrationnelle est le groupe des rotations).

En particulier les classes de différentiabilité de h et h_1 sont les mêmes.

g) THEOREME DE DENJOY [2]. - *Soit* f *un élément de* $\mathrm{Diff}_+^2(T)$. *Supposons que* $\rho(f) = \alpha$ *soit irrationnel. Alors il existe* u *dans* $\mathrm{Diff}_+^0(T)$ *tel que :*

$$f = u^{-1} \circ R_\alpha \circ u.$$

Pour une démonstration plus simple donnée par A. DENJOY en 1946, voir [3].

Remarque. - Si $\rho(f) = \frac{p}{q}$, "en général" f n'est pas conjugué à une rotation ("en général" $f^q \neq \mathrm{Id}$, bien que f^q ait un point fixe). Pour un approfondissement de cette question, on renvoie à [1].

III. EXEMPLE D'ARNOLD [1].

Soit $\tilde{f}$ un élément de $D^\circ(T)$.

Considérons l'application h de R dans R définie par :

$$h(b) = \rho(\tilde{f}+b)$$

D'après la propriété a), h est continue et on voit facilement que :

$$h(b+1) = h(b) + 1.$$

PROPOSITION 1. - *La fonction* h *est croissante au sens large et strictement croissante aux points irrationnels.*

Pour une démonstration de cette proposition, voir ARNOLD ([1], p. 266) ou HERMAN [4].

Si μ est irrationnel, $h^{-1}(\mu) = \{b\}$.

Addendum. - En général, si μ est rationnel ($\mu = \frac{p}{q}$), $h^{-1}(\mu) = [a_1, a_2]$, $a_1 < a_2$.

On montre que $a_1 = a_2$ si et seulement si $\tilde{f}^q = \tilde{R}_p$ (translation sur $\mathbb{R}$ de longueur p) car $(\tilde{R}_{a_1} \circ \tilde{f})^q(x) \geq \tilde{R}_p(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

et $(\tilde{R}_{a_2} \circ \tilde{f})^q(x) \leq \tilde{R}_p(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Nous allons maintenant préciser l'exemple précédent en considérant une famille explicite à 2 paramètres de difféomorphismes du tore.

Soient a et b deux paramètres réels :

$$0 < a < \frac{1}{2\pi}, \qquad 0 \leqslant b \leqslant 1.$$

Considérons pour tout couple (a,b) le difféomorphisme analytique de $\mathbb{R}$, $\tilde{f}_b$ élément de $D^{\omega}(T)$ défini par :

$$\boxed{\tilde{f}_b(x) = x + a \sin 2\pi x + b.}$$

Le paramètre a étant supposé fixé, nous pouvons considérer la fonction h définie par

$$h(b) = \rho(f_b).$$

<u>PROPOSITION 2</u>. - *La fonction* h *est monotone non décroissante,* $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, *et de plus pour tout nombre rationnel* $\frac{p}{q}$ $(\frac{p}{q} \in [0,1])$ $h^{-1}(\frac{p}{q})$ *est un intervalle d'intérieur non vide.*

La proposition 2 résulte de l'addendum de la proposition 1 et du lemme suivant.

<u>LEMME.</u> - *Soit* φ *une fonction analytique réelle périodique, se prolongeant en une application holomorphe de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}$*, encore notée* φ.

Posons $\tilde{f} = \mathrm{Id} + \varphi$.

Soient $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$.

Si $\tilde{f}^q = \tilde{R}_p$*, alors* φ *est une constante.*

Démonstration. - L'égalité $\tilde{f}^q = R_p$ s'écrit $(R_{-p} \circ \tilde{f}^{q-1}) \circ \tilde{f} = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$, $\tilde{f}$ est donc un difféomorphisme biholomorphe de $\mathbb{C}$. D'après le théorème de la représentation conforme, il existe α et β tels que $\tilde{f}(z) = \alpha z + \beta = z + \varphi(z)$.
Donc $\alpha = 1$, $\varphi = \beta$.

<u>COROLLAIRE</u>. - *L'ensemble* $K = [0,1] - \mathrm{Int}\, h^{-1}(\mathbb{Q} \cap [0,1])$ *est un ensemble de Cantor de* $[0,1]$ *et* $K_a \cap h^{-1}(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}} = D_a$ *est dénombrable et dense dans* K_a.

Démonstration. - K_a est un ensemble métrique compact. D'après la proposition 1, K_a est totalement discontinu et n'a pas de point isolé.

ARNOLD a montré que la mesure de Lebesgue de K_a tend vers 1 si a tend vers 0 ([1]).

Nous remarquons, d'après le théorème de Denjoy que $K_a - D_a$ est contenu dans l'ensemble des b tels que $\tilde{f}_b$ soit C°-conjugué à une translation, et l'ensemble des b tels que $\tilde{f}_b$ soit C°-conjugué à une rotation est contenu dans K_a.

Ci-dessous est la figure reproduite de [1] représentant les ensembles $\rho(\tilde{f}_b) = \frac{p}{q}$ quand les paramètres a et b varient.

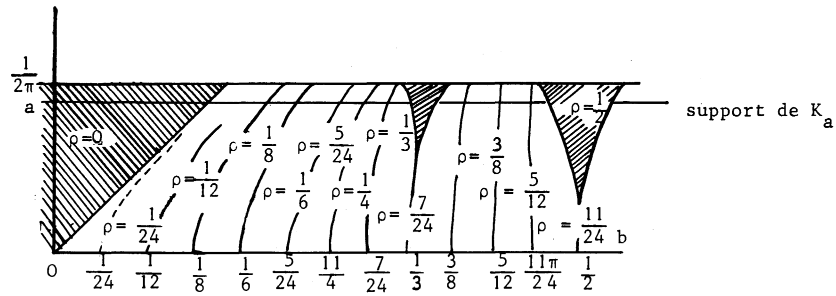

Figure 8

(les"languettes" très minces $\rho=\frac{1}{8}$ par exemple, sont représentées par un seul trait. On montre que les courbes limites de la zone $\rho = \frac{p}{q}$ ont un contact d'ordre q-1 sur la droite a=0).

IV. INVARIANT DE CONJUGAISON C^r A UNE ROTATION.

Invariant de conjugaison C°. - Soit d la métrique sur T quotient de la métrique standard sur $\mathbb{R}$; on en déduit sur $\mathrm{Diff}^o_+(T)$ la métrique δ définie par :

$$\delta(f,g) = \sup_{x \in T} d(f(x),g(x))$$

Posons pour tout élément f de $\mathrm{Diff}^o_+(T)$:

$$K_\circ(f) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \delta(f^n, Id_T)$$

$K_\circ$ est une application de $\mathrm{Diff}^o_+(T)$ dans $\mathbb{R}$, semi-continue supérieurement.

THEOREME 1. - *f est* C° *conjugué à une rotation si et seulement si* $K_\circ(f) = 0$.

Le théorème 1 résulte de la démonstration du théorème de Denjoy.

Invariant de conjugaison C^r. - Soit $0 \leqslant r < \infty$.
Soit f un élément de $\mathrm{Diff}^r_+(T)$, $\tilde{f}$ son relèvement dans $D^r(T)$.

Posons $H^r(f) = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |D\tilde{f}^n|_\circ + \sup_{n \in \mathbb{Z}} |D^r\tilde{f}^n|_\circ$ (pour g fonction périodique, on pose $|g|_\circ = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$).

H^r est une application de $\mathrm{Diff}_+^r(T)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ semi-continue inférieurement.

LEMME. - *Si* f *est* C^1-*conjugué à une rotation*, $H^1(f) < +\infty$.

Démonstration. - Posons $\tilde{f} = \tilde{h} \circ \tilde{R}_\alpha \circ \tilde{h}^{-1}$, avec $\tilde{h} \in D^1(T)$, $\tilde{R}_\alpha$ translation de longueur α. On a, pour tout entier n dans $\mathbb{Z}$, $\tilde{f}^n = \tilde{h} \circ \tilde{R}_{n\alpha} \circ \tilde{h}^{-1}$.

$D\tilde{h}$ et $D\tilde{h}^{-1}$ sont des fonctions périodiques positives donc bornées :

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} |D\tilde{f}^n|_\circ \leqslant |D\tilde{h}|_\circ \, |D\tilde{h}^{-1}|_\circ < +\infty.$$

Le théorème suivant est démontré par HERMAN dans [4].

THEOREME 2. - *Soit* r *un entier* $\geqslant 1$, f *un élément de* $\mathrm{Diff}_+^r(T)$. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* f *soit* C^r-*conjugué à une rotation est que* $H^r(f)$ *soit fini. Si* f *est élément de* $\mathrm{Diff}_+^\infty(T)$, *une condition nécessaire et suffisante pour que* f *soit* C^∞-*conjugué à une rotation est que* $H^r(f)$ *soit fini, pour tout entier* r, $r \geqslant 1$.

COROLLAIRE. - *Soit* f *un élément de* $\mathrm{Diff}_+^1(T)$, *avec* $\rho(f) = \frac{p}{q}$.
Si $f^q \neq \mathrm{Id}_T$, *alors* $H^1(f) = +\infty$.

Exemple. - Reprenons l'exemple étudié précédemment. Nous étudions le sous-ensemble de K_a formé des éléments b tels que f_b soit C^1-conjugué à une rotation.

Considérons l'application η^1 de K_a dans $\overline{\mathbb{R}}$ définie par :

$$\eta^1(b) = H^1(f_b).$$

La fonction η^1 est semi-continue inférieurement sur K_a.

Soit $G_a = \{b \in K_a \; ; \; \eta^1(b) = +\infty\}$.

G_a est un G_δ (intersection dénombrable d'ouverts). D'autre part $D_a \subset G_a$ d'après le corollaire. D_a est dense dans K_a : G_a est un G_δ dense dans K_a.

$(K_a - D_a) \cap G_a$ est un ensemble résiduel. Si b est un élément de $(K_a - D_a) \cap G_a$, f_b est C°-conjugué à une rotation, mais non C^1-conjugué à une rotation.

Cet exemple illustre les résultats généraux suivants démontrés par HERMAN dans

[4], à l'aide des invariants de conjugaison.

V. CLASSIFICATION DES ORBITES DES ROTATIONS.

Pour tout entier r $(0 \leqslant r \leqslant +\infty)$, nous munissons $\mathrm{Diff}^r_+(T)$ de la C^r-topologie.

Pour tout élément α de T, nous considérons les ensembles suivants :

$F^r_\alpha = \{f \ ; \ f \in \mathrm{Diff}^r_+(T),\ \rho(f) = \alpha\}$.

F^r_α est fermé dans $\mathrm{Diff}^r_+(T)$.

$O^r_\alpha = \{f \ ; \ f = g \circ R_\alpha \circ g^{-1} \ ; \ g \in \mathrm{Diff}^r_+(T)\}$.

Notons que, en général O^r_α n'est pas fermé dans $\mathrm{Diff}^r_+(T)$. D'après la propriété c) $O^r_\alpha \subset F^r_\alpha$.

Posons $O^{r,k}_\alpha = O^k_\alpha \cap F^r_\alpha$ $(k \leqslant r)$.

THEOREME 3. - *Si α est irrationnel, O°_α est un G_δ-dense (résiduel) dans F°_α pour la C°-topologie, $O^{1,o}_\alpha$ est résiduel dans F^1_α pour la C^1-topologie et de plus $F^\circ_\alpha - O^\circ_\alpha$ (resp. $F^1_\alpha - O^{1,o}_\alpha$) est dense dans F°_α (resp. F^1_α) pour la C°-topologie.*

La deuxième partie du théorème résulte des exemples de DENJOY [2].

Remarquons que le théorème de Denjoy se traduit par :

$$F^2_\alpha = O^{2,o}_\alpha \quad \text{pour } \alpha \text{ irrationnel.}$$

THEOREME 4. - *Si α est irrationnel et $1 \leqslant r < \infty$, alors O^r_α est maigre dans F^r_α (contenu dans un F_σ sans point intérieur).*

Suivant la nature arithmétique du nombre de rotation, ce résultat peut être précisé.

DEFINITION 2. - *Soit α un élément de T, $\bar{\alpha}$ un relèvement de α dans $\mathbb{R}$. α est un* nombre de Liouville *, si $\bar{\alpha}$ est irrationnel et si pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un rationnel $\frac{p}{q}$ tel que $|\bar{\alpha} - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^n}$; $(q \geqslant 2)$.*

L'ensemble des nombres de Liouville est un résiduel dans T de mesure de Lebesgue nulle.

THEOREME 5. - *Si α est un nombre de Liouville, $O^{\infty,1}_\alpha \cap \overline{O^\infty_\alpha}$ est maigre dans $\overline{O^\infty_\alpha}$ pour la C^∞-topologie.*

($\overline{O}_\alpha^\infty$ *est l'adhérence de* O_α^∞ *dans* $\mathrm{Diff}_+^\infty(T)$*).*

DEFINITION 3. - *Soit* α *un élément de* T, $\bar{\alpha}$ *un relèvement de* α *dans* $\mathbb{R}$. α est de type constant *s'il existe une constante* c ($c > 0$) *tel que pour tout nombre rationnel* $\frac{p}{q}$ $|\bar{\alpha} - \frac{p}{q}| \geqslant \frac{c}{q^2}$.

L'ensemble des nombres de type constant est de mesure de Lebesgue nulle.

THEOREME 6. - *Soit* α *un élément de* T *irrationnel non de type constant et* r *un entier* $2 \leqslant r < +\infty$.

Alors $O_\alpha^{r,r-1} \cap \overline{O}_\alpha^r$ *est maigre dans* $\overline{O}_\alpha^r$ *pour la* C^r*-topologie.*

Posons $O^\infty = \bigcup_{\alpha \in T} O_\alpha^\infty$.

$\overline{O}^\infty$: adhérence de O^∞ dans $\mathrm{Diff}_+^\infty(T)$ pour la C^∞-topologie.

THEOREME 7. - *Les deux propriétés suivantes sont génériques (c'est-à-dire vraies sur des ensembles résiduels) dans* $\overline{O}^\infty$ *pour la* C^∞*-topologie.*

a) f *est* C *-conjugué à une rotation* R_α *(*α *irrationnel). Soit* $f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$ *et on a presque partout* $Dh = Dh^{-1} = 0$ *(donc non* C^1*-conjugué).*

b) Le centralisateur de classe C^∞ *de* f *a la puissance du continu.*

On montre que le théorème 7 s'applique à la famille de difféomorphismes traitée dans l'exemple, on retrouve le fait que la propriété d'être C° et non C^1-conjugué à une rotation est générique dans K_a.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V.I. ARNOL'D, *Small denominators I*, Translations A.M.S. 2e série, v. 49, p. 213-284.

[2] A. DENJOY, *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore*, Journal de Mathématiques 11, (1932), Fasc. IV, p. 333-375.

[3] A. DENJOY, *Les trajectoires à la surface du tore*, C.R. Acad. Sc. Paris, vol 223, (1946), p. 5-7.

[4] M.R. HERMAN, *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations* (à paraître).

Michel R. HERMAN
Ecole Polytechnique

PALAISEAU