MÉMOIRES DE LA S. M. F.

NICOLE DESOLNEUX-MOULIS

# Théorie du degré dans certains espaces de Fréchet d'après R. S. Hamilton

*Mémoires de la S. M. F.*, tome 46 (1976), p. 173-180
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1976__46__173_0>

Journées Géom. dimens. infinie [1975 - LYON]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 46, 1976, p. 173 - 180.



# THEORIE DU DEGRE DANS CERTAINS ESPACES DE FRECHET, D'APRÈS R.S. HAMILTON

par Nicole DESOLNEUX-MOULIS

Dans cet exposé, nous complétons les résultats démontrés par Sergeraert dans la même conférence, en montrant que l'on peut développer une théorie de Fredholm dans le cadre de certains "bons espaces" (en fait tous ceux qui sont considérés dans la pratique appartiennent à cette catégorie). Pour la partie linéaire de la théorie, nous suivons HAMILTON [2 ].

Cet outil a été introduit par HAMILTON dans [2] pour étudier des problèmes de déformation de structures complexes de variétés à bord. On l'applique dans [1] à la construction d'un espace des modules pour les variétés hyperboliques et à l'étude du groupe des automorphismes de ces variétés.

## I. APPLICATIONS DE FREDHOLM DANS LES "BONS ESPACES DE MONTEL".

Soit E un bon espace de Fréchet au sens de HAMILTON et SERGERAERT [2] et [5]. Nous rappelons que E est un espace de Fréchet vérifiant les propriétés suivantes :

- La topologie de E est définie par une famille croissante de normes $|\ |_n$.
- Il existe une famille à un paramètre d'opérateurs d'approximation $S(t)$ $(0 < t < +\infty)$ vérifiant pour tout x de E les inégalités :

$$|S(t)(x)|_{i+k} \leqslant c(i,k)t^k\,|x|_i$$

$$|S(t)(x)-x|_{i-k} \leqslant c'(i,k)t^{-k}|x|_i .$$

Dans toute la suite, on notera $E_n$ le complété de E pour la norme $|\ |_n$.

DEFINITION 1. - *Un bon espace de Fréchet* E *est un* bon espace de Montel *si, pour* n *assez grand, les normes* $|\,|_n$ *sont compactes (il existe un ouvert de* E *relativement compact dans* $E_n$*).*

*Exemple fondamental.* - Soit M une variété compacte de classe $C^\infty$, l'espace $C^\infty(M,\mathbb{R}^k)$ des applications de classe $C^\infty$ de M dans $\mathbb{R}^k$ est un bon espace de Montel.

Si f est un élément de $C^\infty(M,\mathbb{R}^k)$ nous posons $|f|_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \sup_{x\in M} |D^k f(x)|$.

L'existence d'opérateurs d'approximation dans $C^\infty(M,\mathbb{R}^k)$ résulte de [3] ou [4].

La compacité des normes $| \ |_n$ résulte du théorème d'Ascoli.

De même, l'espace des sections de classe $C^\infty$ d'un fibré vectoriel ayant pour base une variété M de classe $C^\infty$ est un bon espace de Montel.

Les définitions de "bonne application" de classe $C^\circ$, "bonne appoication de classe $C^r$" sont celles données par SERGERAERT dans [5]. Pour les bonnes applications de classe $C^r$ $(2 \leqslant r < \infty)$, on a le théorème de fonctions implicites énoncé par SERGERAERT dans [5].

Nous allons ici donner des raffinements de ce théorème.

DEFINITION. - *Soient* E, F, G, *trois bons espaces de Montel,* B *un ouvert borné de* E, *pour une norme* $| \ |_\circ$, *un* bon morphisme $f : B\times F \to G$, linéaire en la 2ème variable *est* compact *si il existe sur* F *une norme notée* $| \ |_1$ *et un entier* s *tels que pour tout indice* i *:*

$$|f(m,y)|_i \leqslant c(i)(1+|m|_{i+s})|y|_1$$

Remarquons que si B' est un borné de F et m un élément de B, $f(\{m\} \times B')$ est relativement compact dans $G_j$ pour tout indice j.

*Exemples :*

1. $E = F = G = C^\infty(M,\mathbb{R})$ M variété compacte de classe $C^\infty$. L'application f donnée par un produit de convolution est compacte

$$f(m,y)(\xi) = \int_M y(\eta)K(\xi,m(\xi),\eta)d\eta.$$

2. E est l'espace des structures presque complexes sur une variété M compacte, F=G est l'espace des 1-formes différentielles, sur M, $\mathcal{M} \subset E$ est l'espace des structures complexes sur M.

Pour toute structure complexe $\mu$, soit $H_\mu$ la projection sur l'espace des formes harmoniques pour la structure $\mu$. L'application $H : \mathcal{M} \times F \to F$ définie par $H(\mu,v) = H_\mu(v)$ est un bon morphisme compact.

PROPOSITION 1. - *La composition d'un bon morphisme linéaire et d'un bon morphisme compact est un bon morphisme compact.*

La démonstration est triviale.

PROPOSITION 2. (Lemme technique dû à HAMILTON [2]). - *Soient* E *et* F *deux bons espaces de Montel,* B *un ouvert borné de* E, $\pi : B\times F \to F$, *un bon morphisme de projection linéaire en la 2ème variable* $(\pi(m,\pi(m,y)) = \pi(m,y)$. $\pi$ *est un bon morphisme li-*

*néaire en la 2ème variable compacte si et seulement si* $\mathrm{Im}\,\pi(m)$ *est de dimension finie constante.*

*Démonstration :*

a) Supposons que $\pi$ soit un bon morphisme de projection, linéaire en la 2ème variable, compact. Il existe un entier s tel que pour tout i :

$$|\pi(m,y)|_i \leqslant c(i)\ (|m|_{i+s} + 1)|y|_1$$

Posons $\pi(m,y) = z$ ; $\pi(m,z) = \pi(m,y) = z$.
Donc $|z|_i \leqslant c(i)\ (|m|_{i+s} + 1)|z|_1$.

Dans l'espace vectoriel $\mathrm{Im}\,\pi(m)$ les normes $|\ |_i$ sont équivalentes à la norme $|\ |_1$ $\mathrm{Im}\,\pi(m)$ est un espace de Banach dont la boule unité est compacte, donc de dimension finie. Montrons que cette dimension est localement constante. Pour tout m voisin de $m_\circ$ donné :

$$\dim \mathrm{Im}\,\pi(m) \geqslant \dim \mathrm{Im}\,\pi(m_\circ).$$

Soit $S = \mathrm{Ker}\,\pi(m_\circ)$ $\quad S \cap \mathrm{Im}\,\pi(m_\circ) = \{0\}$.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une suite $\{m_n\}$, $\lim_{n\to\infty} m_n = m_\circ$ telle que $\dim(S \cap \mathrm{Im}\,\pi(m_n)) > 0$.

Donc il existe une suite $\{y_n\}$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$y_n \in S \cap \mathrm{Im}\,\pi(m_n) \quad |y_n|_1 = 1.$$

De la suite $\{y_n\}$ on peut extraire une suite convergente $\{y_{n_k}\}$ vers un élément $y_\circ$.

$$y_\circ \in S \cap \mathrm{Im}\,\pi(m_{n_\circ}) \quad |y_\circ|_1 = 1$$

d'où une contradiction car $S \cap \mathrm{Im}\,\pi(m_{n_\circ}) = \{0\}$. Donc il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de $m_\circ$ tel que pour tout m dans $\mathscr{V}$, $\dim(S \cap \mathrm{Im}\,\pi(m)) = 0$.
Donc $\dim \mathrm{Im}\,\pi(m) = \dim \mathrm{Im}\,\pi(m_\circ)$.

b) Récirpoquement, supposons que $\pi$ soit un bon morphisme linéaire en la 2ème variable tel que $\dim \mathrm{Im}\,\pi(m)$ soit finie et constante.
Posons $A(m) = \pi(m_\circ) \circ \pi(m)$.

$A(m)$ est un bon morphisme. Pour tout m, on définit $A^{-1}(m)$ qui est un bon morphisme de $\mathrm{Im}\,\pi(m)$ dans $\mathrm{Im}\,\pi(m_\circ)$ compact, $\pi(m) = \pi(m) \circ A^{-1}(m) \circ \pi(m_\circ) \circ \pi(m)$. Nous en déduisons que $\pi(m)$ est compact d'après la proposition 1.

DEFINITION 3. - *Soit* f *un bon morphisme linéaire en la deuxième variable de* $B\times F$ *dans* F, f *est un bon morphisme de Fredholm si* f *est inversible modulo les opérateurs compacts (c'est-à-dire s'il existe 2 bons morphismes* $g_1$, $g_2$, *2 bons morphismes compacts* $k_1$ *et* $k_2$, *tels que :*

$$f(m,\ g_1(m,y)) - y = k_1(m,y)$$

$$g_2(m,\ f(m,y)) - y = k_2(m,y)$$

*Exemple.* - Famille d'opérateurs sous-elliptiques dépendant d'un paramètre vérifiant une inégalité de type Garding. (Par exemple opérateur $\overline{\partial}_\mu$ où $\mu$ est une structure complexe variable).

PROPOSITION 3. - *Soit* f *un bon morphisme de Fredholm linéaire en la deuxième variable, de* $E\times F$ *dans* F *pour tout élément* m *de* B *le noyau et le conoyau de* f(m) *sont de dimension finie.*

Cette proposition résulte immédiatement des définitions et de la proposition 1.

LEMME 1. - *Soit* E *un bon espace de Montel,* $E_\circ$ *un sous-espace de* E *de dimension finie,* $E_1$ *un supplémentaire de* $E_\circ$ *fermé,* $E_1$ *est un bon sous-espace de Montel.*

*Démonstration :*

- Par restriction, la topologie de $E_1$ est définie par une famille croissante de normes compactes.

- Construisons sur $E_1$ une famille à un paramètre d'opérateurs d'approximation.

Soit $\pi_1$ la projection sur $E_1$ parallèlement à $E_\circ$. Posons : $S_1(t) = \pi_1 \circ S(t)$.
Soit $\pi_\circ$ la projection sur $E_\circ$ parallèlement à $E_1$

$$\pi_1(x) = x - \pi_\circ(x).$$

Pour tout indice i :

$$|\pi_1(x)|_i \leqslant |x|_i + |\pi_\circ(x)|_i.$$

Sur $E_\circ$, toutes les normes sont équivalentes :

$$|\pi_\circ(x)|_i \leqslant K(i)\ |\pi_\circ(x)|_\circ.$$

D'autre part, $\pi_\circ$ étant continue, il existe un indice $i_\circ$ tel que $|\pi_\circ(x)|_\circ \leqslant K_\circ|x|_{i_\circ}$

$$|\pi_1(x)|_i \leqslant |x|_i + K(i)\ K_\circ|x|_{i_\circ}.$$

Pour i assez grand, $|\pi_1(x)|_i \leqslant c'(i)|x|_i$.

Donc $|S_1(t)(x)|_{i+k} \leqslant c'(i,k)\ t^k|x|_i$.

D'autre part, pour tout élément x de $E_1$

$$S_1(t)(x) - x = \pi_1 \circ S(t)(x) - x = \pi_1(S(t)(x) - x)$$

$$|S_1(t)(x) - x|_{i-k} \leqslant c_1|S(t)(x) - x|_{i-k} \leqslant c''(i,k)t^{-k}|x|_i.$$

<u>THEOREME 1</u>. - *Soient* E *et* F *deux bons espaces de Montel,* B *un ouvert de* E, f *une bonne application linéaire en la 2ème variable de Fredholm* $B\times F \to F$ *; si pour un élément* $m_o$ *de* B, $f_{m_o}$ *est un bon morphisme linéaire en la 2ème variable inversible de* F *dans* F, *alors il existe* $U_o$ *voisinage de* $m_o$ *dans* B *tel que pour tout* m *de* $U_o$, $f_m$ *est un bon morphisme inversible. En outre, soit* $g_m$ *l'inverse de* $f_m$, *l'application* g $U_o\times F \to F$, $(g(m,x) = y_m(x))$ *est un bon morphisme linéaire en la 2ème variable.*

*Principe de la démonstration :*

a) Cas particulier où $f_m = Id + k_m$ où $k_m$ est un bon morphisme linéaire en la 2ème variable, compact.

<u>LEMME</u>. - *Soit* $k_m$ *un bon morphisme linéaire en la 2ème variable, compact. Soit* $\varepsilon > 0$ *pour tout indice* $i \geqslant 2$ *donné, il existe* $U_o$ *voisinage de* $m_o$ *tel que :*

$$\forall m \in U_o \qquad |k_m(y)|_i < \varepsilon|y|_i.$$

*Démonstration du lemme.* - Soit $\eta > 0$, on peut recouvrir l'image dans $F_1$ de la boule unité de $E_i$ par un nombre fini de boules de rayon $r \leqslant \eta$ de centre $y_1 \ldots y_\alpha \ldots y_N$.

Posons $U_\alpha = \{m\ ;\ |k(m,y_\alpha)|_i \leqslant \eta\}$ et $U_o = \cap\, U_\alpha$.

Pour tout m dans $U_o$ :

$$|k(m,y)|_i \leqslant |k(m,y_\alpha)|_i + |k(m, y-y_\alpha)|_i \leqslant \eta + c(i)\ (1 + |m|_{i+s})\eta.$$

D'où le résultat en restreignant $U_o'$ de sorte que

$$|m|_{i+s} < 1 \qquad \text{sur} \qquad U_o.$$

*Fin de la démonstration du cas a).* - L'indice i étant donné assez grand, pour tout m dans $U_o$, $f_m$ est inversible de $E_i$ dans $E_i$. Il suffit donc de montrer que l'inverse ainsi défini est un bon morphisme de E dans E.

Or pour tout indice n :

$$|y|_n \leqslant |f_m(y)|_n + |k_m(y)|_n$$

$$|k_m(y)|_i \leqslant c(n)(|m|_{n+s} + 1)|y|_\circ$$

$$\leqslant c'(n)(|m|_{n+s} + 1)|y|_i.$$

Or
$$|y|_i \leqslant |f_m(y)|_i + \varepsilon|y|_i$$

$$|y|_n \leqslant c''(n)\ [\,|f_m(y)|_n + (1 + |m|_{n+s})|f_m(y)|_i].$$

Le résultat découle de cette inégalité en remarquant que pour $n \geqslant i$, $|f_m(y)|_i \leqslant |f_m(y)|_n$.

b) Cas général. - Soient $g_1$ et $g_2$ les inverses à droite et à gauche de f modulo les compacts.

$$g_1 \circ f = Id + k_1$$

$$f \circ g_2 = Id + k_2$$

On applique à $f \circ g_2$ le résultat précédent.

<u>COROLLAIRE</u>. - *Soit* f *une bonne application de Fredholm de* $B \times F \to F$ *; pour tout élément* m *de* B*, on peut définir l'indice* i(m) *de* $f_m$*. L'application* i *est localement constante.*

II. <u>BON MORPHISME DE FREDHOLM ET THEORIE DU DEGRE</u>.

<u>DEFINITION 4</u>. - *Soit* f *un bon morphisme de classe* $C^2$ *au moins défini sur un ouvert* B *d'un bon espace de Montel* E*,* f *est un bon morphisme de Fredholm si la différentielle de* f *est une bonne application linéaire de Fredholm considérée comme application de* $B \times E$ *dans* E.

<u>THEOREME 2</u>. - *Soit* f *un bon morphisme de Fredholm de classe* $C^r$ $(r \geqslant 2)$*, on suppose que* $Df(m_o)$ *est une bonne application linéaire en la 2ème variable inversible de classe* $C^{r-1}$*, alors il existe un voisinage* V *de* $m_\circ$ *et une application* g *de* V *dans* E *de classe* $C^{r-1}$*, qui est un bon morphisme telle que* $g \circ f$ *et* $f \circ g$ *soient l'identité sur les ouverts où ils sont définis.*

La démonstration est immédiate d'après le théorème des fonctions implicites et le théorème 1.

<u>COROLLAIRE</u>. - *Les espaces* B*,* E*,* F*, étant définis comme précédemment, soit* f *un bon morphisme de Fredholm de classe* $C^r$ *de* B *dans* F *; on suppose* $Df(m_\circ)$ *surjective. Il existe un voisinage* V *de* $f(m_\circ)$ *dans* F *et une application* g *de* V *dans* E*, de classe*

$C^{r-1}$ *qui est un bon morphisme telle que* $f \circ g = Id_V$.

*Démonstration.* - Elle se fait comme dans le cas où les applications sont définies sur des espaces de Banach, en considérant $\overline{f}$ $B \to B \times \mathrm{Ker}\, Df(m_o)$ définie par :

$$\overline{f}(m) = (f(m), \pi(m))$$

où $\pi$ est la projection sur Ker $Df(m_o)$ parallèlement à un supplémentaire. Le théorème 1 permet de conclure.

*Remarque.* - Dans le cas où le noyau n'est pas de dimension finie, cette méthode de démonstration ne peut s'appliquer (voir SERGERAERT [6]).

THEOREME 3. - *Soit* f *un bon morphisme de Fredholm de classe* $C^\infty$ *; on suppose que l'espace* E *est séparable. L'ensemble des valeurs régulières de* f *est un ensemble de Baire.*

Compte tenu des théorèmes énoncés précédemment, la démonstration est celle de SMALE [7].

COROLLAIRE et DEFINITION DU DEGRE. - *Soit* f *un bon morphisme de Fredholm de* B *ouvert de* E *dans* E *de classe* $C^\infty$ *; on suppose que* f *est une application propre de* B *dans* E *; pour toute valeurs régulière* y *de* f, *on définit* $\gamma(y)$ *comme classe de cobordisme (non orienté) de* $f^{-1}(y)$.

*D'après les théorèmes précédents,* $\gamma(y)$ *est indépendant du choix de* y *dans sa composante connexe.* $\gamma(y)$ *est un élément de* $\mathbb{Z}_2$ *qui sera appelé le degré de* f.

PROPOSITION 4. - *Les hypothèses étant celles de la définition précédente, soient* $f_o$ *et* $f_1$, *deux applications homotopes par une homotopie à support dans l'espace des morphismes de Fredholm d'indice 0.*
*Alors* $\deg f_o = \deg f_1$.

Cette proposition se déduit du théorème 3 suivant la démonstration de SMALE [7].

## BIBLIOGRAPHIE


[1] N. DESOLNEUX-MOULIS, *Le problème des modules pour les variétés hyperboliques* (en préparation).

[2] R.S. HAMILTON, *Deformation of complex structures II* (Preprint).

[3] J. NASH, *The embedding problem for Riemannian manifolds* (Ann. of Math. 1956, vol. 63, p. 20-63).

[4 ] J.T. SCHWARTZ, *Non linear functionnal analysis*, Gordon and Breach (1969).

[5] F. SERGERAERT, *Une extension d'un théorème de fonctions implicites de Hamilton*, Actes, Colloque LYON - Mai 1975, Mémoire S.M.F.

[6] F. SERGERAERT, *Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications*, Ann. Sc. de l'ENS, 1972, n° 5, p. 599-660.

[7] S. SMALE, *An infinite dimensional version of Sard's theorem*, Amer. J. of Math., 87 (1965), 861-866.

*Nicole DESOLNEUX-MOULIS*
*Université Claude-Bernard - LYON I*
*43, bd du 11 novembre 1918*
*69621 VILLEURBANNE*

◎◎◎◎◎