MÉMOIRES DE LA S. M. F.

FRANCIS SERGERAERT

Une extension d'un théorème de fonctions implicites de Hamilton

Mémoires de la S. M. F., tome 46 (1976), p. 163-171
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1976__46__163_0>

Journées Géom. dimens. infinie [1975 - LYON]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 46, 1976, p. 163 - 171.

UNE EXTENSION D'UN THEOREME DE FONCTIONS IMPLICITES DE HAMILTON

par Francis SERGERAERT

1. INTRODUCTION.

On présente ici un récent théorème "de fonctions implicites" de HAMILTON [H1], le plus perfectionné actuellement dans son genre (méthode de Newton et opérateurs de lissage), puis on explique comment le résultat de Hamilton peut être étendu au cas où la différentielle de la fonction donnée n'est pas inversible. On donne une application au problème de la stabilité des fonctions numériques de classe C^r définies sur une variété.

Les démonstrations ne sont qu'esquissées ; les détails sont parus ou paraîtront ailleurs.

2. LE THEOREME DE HAMILTON.

2.1. DEFINITION. - *Un* "bon" espace de Fréchet E *est un espace de Fréchet dont la topologie peut être définie par une suite croissante de normes :*
$\|.\|_o \leqslant \|.\|_1 \leqslant \|.\|_2 \leqslant \dots$ *; de plus* E *doit être muni d'une famille à un paramètre* $S(t)$ *(le paramètre* t *décrivant* $[1,+\infty[\ \subset \mathbb{R}$*) d'opérateurs "d'approximation"* $S(t) : E \to E$ *vérifiant ceci :*

il existe un entier $r \in \mathbb{N}$ *tel que :*

2.2. $$\begin{cases} \|S(t)x\|_i \underset{i,j}{\leqslant} t^{i-j+r}\,\|x\|_j & (i \geqslant j) \\ \|x-S(t)x\|_i \underset{i,j}{\leqslant} t^{i-j+r}\,\|x\|_j & (i \leqslant j) \end{cases}$$

(le symbole $\underset{i,j}{\leqslant}$ *signifie qu'il faut faire figurer au second membre une constante ne dépendant que de* i *et* j*).*

Si E_i est le complété de E pour $\|.\|_i$, on voit que $S(t)$ se prolonge en $S(t) : E_i \to E$; $S(t)$ approche ainsi un élément de E_i par un élément de E. Les inégalités (2.2) précisent en fonction de t les comportements de $S(t)x$ et de $x-S(t)x$.

Un exemple typique de bon espace de Fréchet est l'espace des sections de classe C^∞ d'un fibré vectoriel C^∞ $\pi : E \to M$ sur une variété compacte C^∞. Dans ce cas la famille $S(t)$ a été décrite par NASH [N1] (il s'agit d'un opérateur construit par recollement de convolutions par des noyaux bien choisis ; dans ce cas on peut vérifier les inégalités (2.2) avec $r=0$).

2.3. DEFINITION. - *Une* "bonne" application $f : (U \subset E) \to F$ *de source, un ouvert d'un bon espace de Fréchet et de but, un autre bon espace de Fréchet* F, *est une application continue vérifiant l'axiome suivant : pour tout* $x_0 \in U$, *il existe un voisinage* V *de* x_0 *et un entier* $r \in \mathbb{N}$ *tels que*

$$\|f(x)\|_i \underset{i}{\leqslant} 1 + \|x\|_{i+r} \qquad (\text{si } x \in V).$$

Il est clair que les bonnes applications se composent.

2.4. DEFINITION. - *Une application* $f : (U \subset E) \to F$ *comme ci-dessus est une* bonne application de classe C^1 *si* f *est une bonne application et s'il existe une bonne application* $df : U \times E \to F$, *linéaire par rapport à* E *telle que*
$$df(x,\hat{x}) = \lim_{t \to 0} (f(x+t\hat{x}) - f(x))/t.$$

On définit de même ce qu'est une bonne application de classe C^r $(0 \leqslant r < \infty)$.

Un exemple typique de bonne application de classe C^r pour tout $r \in \mathbb{N}$ est le suivant : soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^∞, et M une variété compacte. Alors $C^\infty(M,\mathbb{R}^m)$, $C^\infty(M,\mathbb{R}^n)$ sont de bons espaces de Fréchet. Soit $f_* : C^\infty(M,\mathbb{R}^m) \to C^\infty(M,\mathbb{R}^n)$ l'application de composition à gauche avec f : $f_*(g) = f \circ g$. Alors f_* est une bonne application de classe C^r pour tout r. Plus généralement on peut affirmer la même chose pour les opérateurs différentiels de classe C^∞.

On comparera les définitions ci-dessus avec celles de $\mathcal{L}$-objet et $\mathcal{L}$-morphisme de [S1]. Les définitions sont équivalentes en classe de différentiabilité finie. En classe C^∞, la définition naturelle de bonne application de classe C^∞ serait la suivante : pour tout r il existe une bonne application $d^r f : U \times E^r \to F$ telle que ... ; cependant cette définition provoquerait le rétrécissement indéfini des voisinages à construire dans les démonstrations de théorèmes de fonctions implicites. D'où les complications de [S1]. Tout ce qui suit s'étend aux $\mathcal{L}$-objets et aux $\mathcal{L}$-morphismes de classe C^∞.

2.5. LE THEOREME DE HAMILTON [H1]. - *Soit* $f : (U \subset E) \to F$ *une bonne application de classe* C^r $(2 \leqslant r < \infty)$. *On suppose de plus qu'il existe une bonne application de classe* C^p $(0 \leqslant p \leqslant r-1)$, $L : U \times F \to E$, *linéaire par rapport à* F *et telle que si* $x \in U$, $\hat{x} \in E$, $\hat{y} \in F$, *alors* $df(x,L(x,\hat{y})) = \hat{y}$ *et* $L(x,df(x,\hat{x})) = \hat{x}$ *(autrement dit* $L_x : F \to E$ *est un inverse de* $df_x : E \to F$*). Soient* $x_0 \in U$ *et* $y_0 = f(x_0)$. *Alors il existe des voisinages ouverts* U' *de* x_0, V' *de* y_0 *tels que* f *soit un bon* C^{p+1}*-difféomorphisme de* U' *sur* V', *i.e.* $f : U' \to V'$ *est bijectif, et* $f^{-1} : V' \to U'$ *est une bonne* C^{p+1}*-application ; de plus*

$$df^{-1}(y,\hat{y}) = L(f^{-1}(y), \hat{y}).$$

2.6. PRINCIPE DE LA DEMONSTRATION DU THEOREME DE HAMILTON. - On peut supposer $x_o = y_o = 0$. Il faut montrer que si y est peu différent de 0, on peut résoudre en x l'équation $f(x) = y$. La méthode d'Hamilton est essentiellement la méthode de Newton comme modifiée par MOSER (voir [M1]).

Soit y peu différent de 0 fixé. On pose $t_n = e^{(\frac{3}{2})^n}$, puis on construit par récurrence en partant de $x_o = 0$.

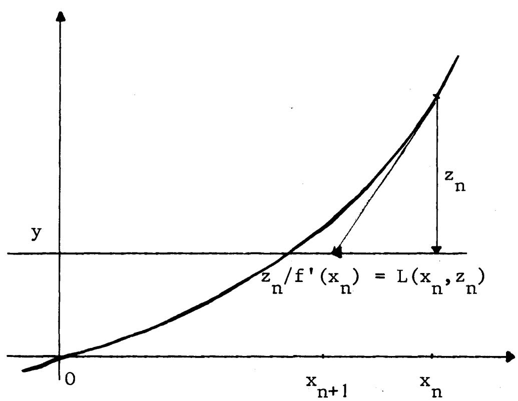
$$z_n = y - f(x_n) = n^{\text{ième}} \text{ erreur}$$

$$\Delta x_n = S(t_n)L(x_n, z_n) = n^{\text{ième}} \text{ correction}$$

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n = (n+1)^{\text{ième}} \text{ approximation de la solution x de } f(x) = y.$$

Le terme $L(x_n, z_n)$ est la correction typique de la méthode de Newton (voir figure). La correction supplémentaire $S(t_n)$ a pour but de rattraper une "perte de dérivées" qui survient quand on obtient $L(x_n, z_n)$. En effet on ne dispose que de majorations du type :

$$\|L(x_n, z_n)\|_i \underset{i}{\leqslant} 1+\|x_n\|_{i+r} + \|z_n\|_{i+r}$$



et après un nombre fini d'itérations on n'aurait plus aucun renseignement sur $\|L(x_n, z_n)\|_i$ à moins de connaître le type de croissance par rapport à i de $\|x_n\|_i$ et de $\|z_n\|_i$; mais ceci n'est jamais le cas.

Hamilton démontre par récurrence sur n que pour un entier r convenable les inégalités suivantes sont vérifiées :

1) $\|x_n\|_i \underset{i}{\leqslant} t_n^{6r} \|y\|_i$

2) $\|z_n\|_r \underset{\phi}{\leqslant} t_n^{-8r} \|y\|_{21r}$

3) $\|x_n\|_r \leqslant \varepsilon$ (pour un $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que $B_r(0,\varepsilon) \subset U$)

4) $\|x_n\|_i \underset{i}{\leqslant} \|y\|_{i+20r}$

5) $\|z_n\|_i \underset{i}{\leqslant} t_n^{-4r} \|y\|_{i+20r}$

6) $\|\Delta x_n\|_i \leqslant_i t_n^{-r} \|y\|_{i+20r}$.

L'inégalité 3) assure la correction de la construction par récurrence. On déduit de ces inégalités que la suite x_n converge vers un $x \in U$ et que $f(x) = y$. On peut donc poser $x = f^{-1}(y)$. La convergence de x_n vers x est localement uniforme ; f^{-1} est donc continue. L'inégalité 4) prouve que f^{-1} est bonne. Ensuite on montre que $df^{-1}(y,\hat{y}) = L(f^{-1}(y),\hat{y})$, ce qui permet de déduire la différentiabilité de f^{-1} de celle de L.

Pour donner une idée de la démonstration de ces inégalités, indiquons comment 1) $\Longrightarrow$ 2).

$$\|z_n\|_r = \|y-f(x_n)\|_r = \|y-f(x_{n-1} + \Delta x_{n-1})\|_r$$

$$= \|y-f(x_{n-1}) - df(x_{n-1}, \Delta x_{n-1}) + \int_o^1 (1-\xi)d^2f(x_{n-1} + \xi\,\Delta x_{n-1}) \,.\, \Delta x_{n-2}^{\times 2} d\xi\|_r$$

$$\leqslant \|df(x_{n-1}, \boxed{(1-S(t_{n-1}))}\, L(x_{n-1}, z_{n-1}))\|_r$$

$$+ \|\int_o^1 (1-\xi)d^2f(x_{n-1} + \xi\,\Delta x_{n-1}) \,.\, \boxed{S(t_{n-1})L(x_{n-1}, z_{n-1})^{\times 2}}\, d\xi\|_r$$

En simplifiant beaucoup, disons seulement que le fait que les termes encadrés soient très petits permet de montrer que 1) $\Longrightarrow$ 2). Il n'est pas question de donner ici plus de détails.

3. DIFFERENTIABILITE DE f^{-1}.

Dans la démonstration de Hamilton, la différentiabilité de f^{-1} résulte de la formule $df^{-1}(y,\hat{y}) = L(f^{-1}(y), \hat{y})$. Pour démontrer cette formule, il faut savoir que L_x est un inverse bilatère de df_x. Cependant, dans certains cas comme celui du problème du déploiement universel qu'on étudiera plus loin, la différentielle df_x est surjective, mais n'est pas injective. De façon plus précise, il faut supprimer dans les hypothèses du théorème de Hamilton celle qui affirme que $L(x,df(x,\hat{x})) = \hat{x}$ et ne garder que la relation $df(x,L(x,\hat{y})) = \hat{y}$. On va expliquer maintenant comment la dérivabilité de f^{-1} (qui, naturellement, n'est plus unique) peut encore être démontrée.

Les quantités x_n, x, z_n, Δx_n de 2.6 sont en fait des fonctions de y. La dérivation de $x_{n+1} = x_n + S(t_n)L(x_n,z_n)$ donne :

$$dx_{n+1}(y,\hat{y}) = dx_n(y,\hat{y}) + S(t_n)dL(x_n,dx_n(y,\hat{y}),z_n) + S(t_n)L(x_n,dz_n(y,\hat{y}))$$

$$\begin{aligned}dz_{n+1}(y,\hat{y}) &= \hat{y} - df(x_{n+1},\ dx_{n+1}(y,\hat{y}))\\ &= dz_n(y,\hat{y}) - df(x_{n+1},\ dx_{n+1}(y,\hat{y}) + df(x_n,\ dx_{n+1}(y,\hat{y}))\\ &\qquad - df(x_n,\ dx_{n+1}(y,\hat{y})) + df(x_n,\ dx_n(y,\hat{y}))\\ &= df(x_n,\ \boxed{(1-S(t_n))}\ L(x_n,dz_n(y,\hat{y})))\\ &\quad - df(x_n,S(t_n)dL(x_n,dx_n(y,\hat{y}),\boxed{z_n}))\\ &\quad - \int_o^1 d^2f(x_n + \xi\Delta x_n,\boxed{\Delta x_n},\ dx_{n+1}(y,\hat{y}))d\xi\end{aligned}$$

Les termes encadrés sont "petits". On peut ainsi prouver par récurrence et successivement que :

$$\begin{aligned}\|dx_n(y,\hat{y})\|_i &\underset{i}{\leqslant} t_n^{\alpha_1 r'}(\|y\|_i\|\hat{y}\|_{r'} + \|y\|_{r'}\|\hat{y}\|_i)\\ \|dz_n(y,y)\|_{r'} &\underset{\phi}{\leqslant} t_n^{-\alpha_2 r'}(\|y\|_{r'}\ \|\hat{y}\|_{r'+kr'} + \|y\|_{r'+kr'}\ \|\hat{y}\|_{r'})\\ \|dz_n(y,\hat{y})\|_i &\underset{i}{\leqslant} t_n^{-\alpha_3 r'}(\|y\|_{r'}\ \|\hat{y}\|_{i+kr'} + \|y\|_{i+kr'}\|\hat{y}\|_{r'})\\ \|dx_{n+1}(y,\hat{y})-dx_n(y,\hat{y})\|_i &\underset{i}{\leqslant} t_n^{-\alpha_4 r'}(\|y\|_{r'}\|\hat{y}\|_{i+kr'} + \|y\|_{i+kr'}\|\hat{y}\|_{r'})\end{aligned}$$

pour des entiers k, r' assez grands, et pour des réels α_1, α_2, α_3, $\alpha_4 > 0$ convenables. La dernière relation montre que $f^{-1} = \lim x_n$ est de classe C^1. On ne connaît pas d'expression simple de df^{-1} comme dans le cas de l'énoncé de Hamilton.

Si L est de classe C^p, on peut montrer par des calculs analogues mais techniquement beaucoup plus compliqués que s est de classe C^p (remarque : on obtient une différentiabilité de moins qu'avec le théorème de Hamilton).

4. APPLICATION AU PROBLEME DU DEPLOIEMENT UNIVERSEL.

Soit M une variété réelle C^∞ compacte. On note $\Gamma^r(M)$ l'espace des champs de vecteurs de classe C^r de M ($0 \leqslant r \leqslant \infty$), $D^r(M)$ l'espace des C^r-difféomorphismes de M, $C^r(M)$ l'espace des fonctions numériques de classe C^r définies sur M, $D^r_K(\mathbb{R})$ (resp. $C^r_K(\mathbb{R})$) l'espace des C^r-difféomorphismes (resp. des C^r-fonctions numériques) de $\mathbb{R}$ à support compact.

Soit $f \in C^{\infty}(M)$. On peut définir deux applications :

$$tf : \Gamma^{r}(M) \to C^{r}(M)$$
$$\omega f : C^{r}_{K}(R) \to C^{r}(M)$$

par $tf(\xi_1)(x) = df(x) . \xi_1(x) = \tau f \circ \xi_1(x)$ et
$\omega f(\xi_2)(x) = \xi_2 \circ f(x)$.

4.1. DEFINITION. - f *est de codimension finie si* $tf(\Gamma^{\infty}(M)) + \omega f(C_K(R))$ *est de codimension finie dans* $C^{\infty}(M)$.

4.2. INTERPRETATION. - On peut considérer l'action du groupe $D^{\infty}(M) \times D^{\infty}_{K}(\mathbb{R})$ sur $C^{\infty}(M)$ définie par $(\varphi_1, \varphi_2) . f = \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1$ (munir $D^{\infty}(M)$ de la structure de groupe opposée à la structure ordinaire). Alors $\Gamma^{\infty}(M) \oplus \Gamma^{\infty}_{K}(\mathbb{R})$ peut être considéré comme l'espace tangent à $D^{\infty}(M) \times D^{\infty}_{K}(\mathbb{R})$ en (id, id), et $tf \oplus \omega f$ comme l'application tangente à l'action du groupe sur f en (id, id). Si cette action suit son comportement infinitésimal, on peut donc s'attendre à ce que si f est de codimension finie c, alors l'orbite de f soit une "sous-variété" de $C^{\infty}(M)$ de codimension c. Plus précisément :

4.3. THEOREME. - *Soit un entier* $c \in \mathbb{N}$. *Alors il existe des entiers* r, r_0 *avec* $r \leqslant r_0$ *tels que, si* $f : M \to \mathbb{R}$ *est une fonction de classe* C^{∞} *de codimension finie* c, *alors il existe* c *fonctions* $f_1, \ldots, f_c \in C^{\infty}(M)$, *un voisinage* $\mathcal{V}$ *de* f *dans* $C^{r_0}(M)$, *et des applications continues* s_1, $s_2 : \mathcal{V} \to D^{r_0 - r}(M) \times D^{r_0 - r}_{K}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{c}$ *ayant la propriété suivante : si* $g \in \mathcal{V}$ *et si*

$$s_1(g) = (\varphi_1, \varphi_2 ; \lambda_1, \ldots, \lambda_c),\ s_2(g) = (\psi_1, \psi_2 ; \mu_1, \ldots, \mu_c)$$

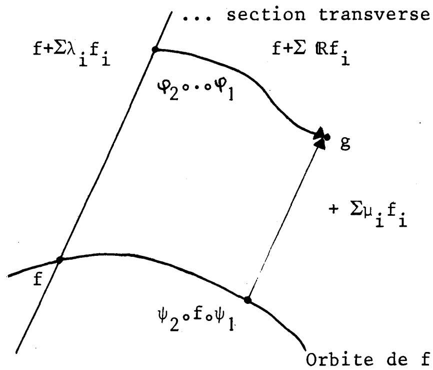
alors

$$g = \varphi_2 \circ (f + \Sigma\lambda_i f_i) \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ f \circ \psi_1 + \Sigma\mu_i f_i$$

De plus, si $g \in \mathcal{V} \cap C^{r'}(M)$ *avec* $r' \geqslant r_0$, *alors* $\varphi_1, \psi_1 \in D^{r'-r}(M)$, $\varphi_2, \psi_2 \in D^{r'-r}_{K}(R)$.

Enfin, si r' *est assez grand, les applications* s_1, s_2 *restreintes à* $\mathcal{V} \cap C^{r'}(M)$ *sont aussi différentiables que l'on veut.*

On peut donner un énoncé analogue dans le cas où f lui-même est de classe de différentiabilité finie.



4.4. INDICATIONS SUR LA DEMONSTRATION. - Soit $(f_1,\ldots,f_c)$ une base d'un supplémentaire de $tf(\Gamma^\infty(M)) + \omega f(C_K^\infty(\mathbb{R}))$. On considère l'application

$$\Phi : D^\infty(M) \times D_K^\infty(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^c \to C^\infty(M)$$

définie par

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2 ; \lambda_1,\ldots,\lambda_c) = \varphi_2 \circ (f + \Sigma\lambda_i f_i) \circ \varphi_1$$

C'est une "bonne" application de classe C^∞ (on peut considérer $D^\infty(M)$ par exemple comme variété modelée sur un bon espace de Fréchet).

Alors $d\Phi(id, id, 0 ; \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\lambda}_1,\ldots,\hat{\lambda}_c) = tf(\hat{\xi}_1) + \omega f(\hat{\xi}_2) + \Sigma\, \hat{\lambda}_i f_i$ de sorte que $d\Phi(id, id, 0)$ est surjective.

On va chercher à appliquer le théorème de fonctions implicites démontré au § 3. On sait déjà que $d\Phi(id, id, 0)$ est surjective ; il faut maintenant construire la fonction L figurant dans l'énoncé de ce théorème, autrement dit il faut résoudre en $\hat{\xi}_1$, $\hat{\xi}_2$, $\hat{\lambda}$ l'équation :

$$d\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \lambda ; \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\lambda}) = \hat{\eta}$$

où φ_1, φ_2, λ, $\hat{\eta}$ sont donnés. En utilisant la structure de groupe de $D^\infty(M) \times D_K^\infty(\mathbb{R})$ on peut se contenter de résoudre l'équation

$$d\Phi_{id}(id, id, 0 ; \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\lambda}) = \hat{\eta}$$

où

$$\Phi_\lambda(\varphi_1, \varphi_2, \mu) = \varphi_2 \circ (f + \Sigma\lambda_i f_i + \Sigma\mu_i f_i) \circ \varphi_1$$

Or $d\Phi_\lambda(\mathrm{id}, \mathrm{id}, 0 ; \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\lambda})$

$$= t(f + \Sigma\lambda_i f_i) \cdot \hat{\xi}_1 + \omega(f + \Sigma\lambda_i f_i)\hat{\xi}_2 + \Sigma\, \hat{\lambda}_i f_i = \hat{\eta}.$$

Il faut résoudre cette dernière équation en $\hat{\xi}_1$, $\hat{\xi}_2$, $\hat{\lambda}$ connaissant λ et $\hat{\eta}$. C'est le théorème de division de Malgrange-Mather qui donne la solution. On va illustrer ceci sur un exemple.

Supposons $M = \mathbb{R}$ (la non-compacité ne va jouer aucun rôle), et $f(x) = x^3$. Alors $\Gamma^\infty(M) \approx C^\infty(\mathbb{R})$ et donc $tf(\hat{\xi}_1) = 3x^2\, \hat{\xi}_1$, $\omega f(\hat{\xi}_2) = \hat{\xi}_2(x^3)$. Ainsi

$$tf(\Gamma^\infty(M)) + \omega f(C_K^\infty(\mathbb{R})) = \{3x^2\, \hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2(x^3)\}.$$

C'est un sous-espace de codimension 1 dans $C^\infty(\mathbb{R})$. Une base d'un supplémentaire est constituée par la fonction $f_1(x) = x$. Ainsi on peut résoudre

$$3x^2\, \hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2(x^3) + \hat{\lambda}x = \hat{\eta}$$

par

$$\hat{\xi}_2 = \hat{\eta}(0)\chi, \qquad \hat{\lambda} = \hat{\eta}'(0), \quad \hat{\xi}_1 = \frac{\hat{\eta} - \hat{\eta}(0)\chi(x^3) - \hat{\eta}'(0)x}{x^2}$$

où χ est un élément de $C_K^\infty(\mathbb{R})$ qui vaut identiquement 1 au voisinage de zéro. On note que $\hat{\xi}_1$ est bien de classe C^∞ si $\hat{\eta}$ est de classe C^∞, et aussi que si $\hat{\eta}$ est supposé seulement de classe C^r, alors $\hat{\xi}_1$ est en général de classe C^{r-2} seulement.

Supposons maintenant qu'on veuille inverser $d\Phi_\lambda$; il faut résoudre :

$$(3x^2 + \lambda)\hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2(x^3 + \lambda x) + \hat{\lambda}x = \hat{\eta}$$

Or le théorème de division de MALGRANGE-MATHER ([M2], [M3], voir aussi [L1]) permet d'affirmer qu'il existe Q, h_1 et h_2 tels que :

$$\hat{\eta}(x) = (3x^2 + \lambda)Q(x,\lambda) + h_1(\lambda)x + h_2(\lambda).$$

Posons donc $\hat{\lambda} = h_1$, $\hat{\xi}_2 = h_2.\chi$, et

$$\hat{\xi}_1 = \frac{\hat{\eta} - \hat{\lambda}x - \hat{\xi}_2(x^3+x)}{3x^2 + \lambda} = \frac{\hat{\eta} - h_1 x - h_2\chi(x^3 + \lambda x)}{3x^2 + \lambda} = Q(x) + h_2\, \frac{1-\chi(x^3+\lambda x)}{3x^2 + \lambda}$$

On voit que si λ est assez petit, le numérateur $1 - \chi(x^3 + \lambda x)$ s'annule identiquement au voisinage des points où $3x^2 + \lambda = 0$.

Ceci permet de construire L. Il faut encore montrer que L ainsi défini est une "bonne" application ; mais cela résulte de la démonstration du théorème de division qu'a donnée LASSALLE [L1].

La construction de L qu'on vient de décrire peut être généralisée à un $f \in C^{\infty}(M)$ de codimension finie quelconque.

Le théorème de fonctions implicites que nous avons énoncé permet de construire une section locale s de Φ. Ceci revient à affirmer l'existence de s_1 du théorème du déploiement universel. L'existence de s_2 se démontre de la même façon.

Nous avions démontré un résultat analogue dans [S1]. Le progrès essentiel apporté par le théorème d'Hamilton est l'existence d'une *constante* r (indépendante en particulier de r') dans l'énoncé du théorème 4.3. Le résultat est ainsi beaucoup plus satisfaisant.

(Rédaction d'un exposé présenté au Colloque "Dimension Infinie" de LYON (26-30 mai 1975).

BIBLIOGRAPHIE

[H1] Richard S. HAMILTON, *The inverse function theorem of Nash and Moser*, Preprint, Cornell University.

[L1] Guy LASSALLE, *Une démonstration du théorème de division pour les fonctions différentiables*, Topology, 1973, n° 2, p. 41-62.

[M1] Jürgen MOSER, *A new technique for the construction of solutions of non linear differential equations*, Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A., 1961, n° 47, p. 1824-1831.

[M2] Bernard MALGRANGE, *Ideals of differentiable functions*, Oxford University Press, 1966.

[M3] John MATHER, *Stability of* C^{∞} *mappings, I, The division theorem*, Ann. of Math. 1968, n° 87, p. 89-104.

[N1] John NASH, *The embedding problem for riemannian manifolds*, Ann. of Math., 1956, vol. 63, p. 20-63.

[S1] Francis SERGERAERT, *Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications*, Ann. Sc. de l'Ecole Normale Sup., 1972, n° 5, p. 599-660.

Francis SERGERAERT
Université de Poitiers
U.E.R. Sciences Exactes et Nat.
40, rue du Recteur Pineau
46022 POITIERS