MÉMOIRES DE LA S. M. F.

PAUL KREE

Introduction aux théories des distributions en dimension infinie

Mémoires de la S. M. F., tome 46 (1976), p. 143-162
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1976__46__143_0>

Journées Géom. dimens. infinie [1975 - LYON]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 46, 1976, p. 143 - 162.

INTRODUCTION AUX THEORIES DES DISTRIBUTIONS EN DIMENSION INFINIE

par Paul KREE

1. On pourrait penser a priori que l'analyse en dimension infinie est une extension formelle de l'analyse en dimension finie ; en effet, le point de vue banachique permet une très bonne présentation des propriétés générales des variétés et des groupes de Lie de dimension finie. Or, en dimension infinie, se confrontent de grandes idées de la physique (la théorie quantique des champs se formule directement en dimension infinie), des probabilités (diffusions), du calcul différentiel (fonctions implicites, holomorphie, extensions du calcul différentiel de Fréchet), de la mesure (promesures, mesures de Radon vectorielles), de la géométrie différentielle (variété des lacets), de la géométrie symplectique (voir par exemple l'étonnante synthèse réalisée à ce colloque en quelques pages, par Marsden, d'une dizaine de théorèmes de géométrie et de relativité générale)...

2. Le problème de l'"extension" en dimension infinie de la notion de distributions est ancien : L. Schwartz en parlait dans son cours sur les probabilités cylindriques en 1965. Il a fait par ailleurs l'objet de nombreuses publications :

- P. KRISTENSEN, L. MELJBO et E. THUE POULSEN présentent dans [28] une notion qui peut être considérée comme un ancêtre de la classe notée $K^{-\infty}$ dans [27].

- L. NACHBIN et ses élèves [6], [8], [15], [32] étudient les fonctionnelles analytiques. Les phénomènes observés conduisent L. NACHBIN à la définition des types d'holomorphie banachiques [31].

- C.B. DE WITT [5] ... étudie la pseudo-mesure de Feynman.

- Une équipe à Moscou étudie ce problème [7], [38]... Signalons que la définition donnée dans [38] , lorsqu'elle est restreinte à la dimension finie, ne coïncide pas avec la définition usuelle.

- C. ELSON introduit dans [9] une classe de distributions qui ne contient pas les classes de Sobolev et les masses de Dirac, mais qui est bien adaptée à l'étude d'un problème de régularité relatif au laplacien.

- Dans [3], N. BOURBAKI définit des distributions à support compact sur une variété banachique ...

3. Le but de nos recherches depuis 1971 n'est pas de trouver une *extension formelle* de la théorie des distributions. En fait les problèmes de dimension infinie et les publications correspondantes sont analysés, et les notions de "distributions" utiles dans cette problématique sont définies, étudiées, et appliquées.

Ceci oblige parfois à développer des outils mathématiques nouveaux comme la théorie fonctionnelle (non ensembliste) des mesures de Radon vectorielles sur les espaces topologiques complètement réguliers ; noter que [4] ne traite que le cas scalaire, en abandonnant le point de vue des formes linéaires. Il a été publié seulement des notes aux comptes rendus et des exposés de séminaires. La théorie est assez longue (les 150 pages de [27] ne représentent qu'une rédaction provisoire de son premier tiers, ce tiers étant rédigé dans [24]) et parfois difficile.

4. Dans ces conditions, il est peutêtre utile de présenter sur un cas simple quelques méthodes de la théorie, d'indiquer au passage les extensions possibles, les applications à certains problèmes naturels. Il semble aussi utile d'indiquer les rapports entre cette théorie et la formalisation existante. Tel est le but de cet exposé.

I. RAPPELS SUR LA THEORIE DES DISTRIBUTIONS EN DIMENSION FINIE [34].

Si X_i est un espace vectoriel réel de dimension finie et Ω_i un ouvert non vide de X_i, soit $X_i^{\mathbb{C}}$ le complexifié de X_i et $\underset{\ell}{\odot} X_i^{\mathbb{C}}$ le produit tensoriel symétrique d'ordre ℓ de $X_i^{\mathbb{C}}$. En analyse fonctionnelle générale, le dual (resp. antidual) d'un espace localement convexe complexe E est noté E' (resp. 'E). Mais en théorie des distributions [34], L. Schwartz utilise une notation *beaucoup plus commode* : le dual de $\mathscr{D}(\Omega_i)$ est noté $\mathscr{D}'(\Omega_i)$ au lieu de $(\mathscr{D}(\Omega_i))'$. De même si k est un nombre entier positif ou égal à $+\infty$, le dual de $\mathscr{D}^k(\Omega_i)$ est noté $\mathscr{D}'^k(\Omega_i)$. En particulier $\mathscr{D}'^\infty(\Omega_i) = \mathscr{D}'(\Omega_i)$. Conformément à [34], chapitre VI, paragraphe 8, $\mathscr{B}^k(\Omega_i)$ désigne le sous-espace de $\mathscr{E}^k(\Omega_i)$ formé par les fonctions à dérivées bornées jusqu'à l'ordre k. Cet espace se plonge canoniquement par $\varphi \to \varphi, D\varphi, \ldots, D^k\varphi$ dans $\prod_{\ell=o}^{k} \mathscr{B}^\circ(X_i, \underset{\ell}{\odot} X_i'^{c})$. Chaque facteur est muni de la topologie stricte [10], [11], [19]. Ceci conduit à noter $\mathscr{B}'^k(\Omega_i)$ le dual de $\mathscr{B}^k(\Omega_i)$ muni de la topologie θ_i^k induite par la topologie produit. En particulier $\mathscr{B}'^\infty(\Omega_i) = \mathscr{B}'(\Omega_i)$ coïncide avec l'espace $\mathscr{D}'_{L^1}(\Omega_i)$ des distributions intégrables [34].

Cette dernière notation ne sera pas employée car elle n'est pas commode en dimension infinie.

(1) *Image d'une distribution.*

Soit Ω_j un ouvert non vide de l'espace vectoriel de dimension finie X_j. Soient $f \in \mathscr{C}^k(\Omega_i,\Omega_j)$ et $T_i \in \mathscr{D}'^k(\Omega_i)$. L. SCHWARTZ ([34], chapitre VI, § 2) a défini l'image $f(T_i)$ de T_i par f lorsque la restriction de f au support de T_i est propre. Comme cette hypothèse est trop forte ici, il faut procéder autrement [20].

(2) On suppose que pour tout ouvert ω' d'adhérence compacte dans Ω_j :

a) la restriction T_i^{ω} de T_i à $\omega = f^{-1}(\omega')$ appartient à $\mathscr{B}'^k(\Omega_i)$.

b) pour tout $\ell \leqslant k$, la dérivée $D^{\ell} f$ est uniformément bornée sur ω.

On dit alors que f est T_i-k-propre. Alors $f(T_i^{\omega})$ est définie en utilisant la transposée de

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{B}^k(\omega') & \longrightarrow & \mathscr{B}^k(\omega) \\ \psi & \longmapsto & \psi \circ f \end{array}$$

Puis $f(T_i)$ est défini en utilisant une partition de l'unité sur Ω_j. Cette définition peut être étendue aux variétés. Il faut noter que même si T_i est une mesure, f peut être T_i-k-propre sans être T_i-0-propre.

(3) *Dérivation des distributions.*

a) La théorie de L. Schwartz de la dérivation des distributions peut être formulée géométriquement de la manière suivante. Pour toute $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega_i, X_i^c)$ la divergence $\operatorname{div} \varphi \in \mathscr{D}(\Omega_i)$ est définie en composant la dérivée $D\varphi : \Omega_i \to X_i^c \otimes X_i'$ avec la contraction tensorielle. Pour toute distribution T_i sur Ω_i, la dérivée DT_i est la distribution vectorielle $\in \mathscr{D}'(\Omega_i, X_i'^c)$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega_i, X_i) \qquad \langle DT_i, \varphi \rangle = - \langle T_i, \operatorname{div} \varphi \rangle \tag{4}$$

Cette définition "prolonge" la dérivation usuelle des fonctions car si dx est une mesure de Lebesgue sur X_i, et si $g \in C^1(\Omega_1)$ alors

$$T_i = g\,dx \implies DT_i = (Dg)dx \tag{5}$$

b) En dimension infinie, il est commode d'utiliser une définition un peu plus générale en remplaçant dx par $\alpha_i dx$ avec $\alpha_i \in C^{\infty}(\Omega_i)$, α_i ne s'annulant pas. On note $-\check{D}$ l'opérateur $-\alpha_i^{-1} D\alpha_i$, de $\mathscr{D}(\Omega_i, X_i)$ à valeurs dans $\mathscr{D}(\Omega_i, X_i \otimes X_i')$ et $-\check{\operatorname{div}}\, \varphi$ le composé de $-\check{D}$ avec la contraction tensorielle. Le transposé de cet opérateur est noté $-\widetilde{D}$. Il est appelé la dérivée de densité car

$$T_i = g\,\alpha_i dx \implies \widetilde{D}T_i = (Dg)\alpha_i dx \tag{6}$$

II. INDICATION SUR LE FORMALISME DES PRODISTRIBUTIONS.

2.A Prodistributions bornées. - Le point de vue adopté est un point de vue *fonctionnel*. En effet usuellement ([4] , [12], [35]) une probabilité cylindrique sur X, l'e.l.c.s. réel, est considérée comme une fonction additive sur l'algèbre de Boole des cylindres de X, ou comme un système projectif de lois de probabilités. Nous allons plutôt considérer une probabilité cylindrique (et plus généralement une prodistribution) comme une forme linéaire sur un espace de fonctions cylindriques sur X.

La famille $(A_i)_{i \in I}$ des sous-espaces fermés de codimension finie de X est munie de l'ordre inverse de celui défini par l'inclusion : $i > j$ si $A_i \subset A_j$. On pose $X_i = X/A_i$ et l'on note s_i la surjection canonique de X sur X_i. De même si $i > j$, on note s_{ij} la surjection canonique de X_i sur X_j, d'où un système projectif (X_i, s_{ij}) d'espaces vectoriels de dimension finie.

Pour $i > j$, on a une injection

$$(7) \qquad \mathscr{B}^k(X_j) \xhookrightarrow{\alpha_{ij}} \mathscr{B}^k(X_i)$$

$$\varphi_j \longmapsto \varphi_j \circ s_{ij}$$

On note $\mathscr{B}^k_{cyl}(X) = \bigcup_i \mathscr{B}^k(X_i)$

et $\mathscr{B}_{cyl}(X) = \mathscr{B}^\infty_{cyl}(X) = \bigcup_i \mathscr{B}(X_i)$.

Ces espaces sont des limites inductives. Pour $\varphi_i \in \mathscr{B}^k(X_i)$ on notera systématiquement $\widetilde{\varphi}_i$ la fonction cylindrique correspondante et l'on dit que X_i est une base $\widetilde{\varphi}_i = \varphi_i \circ s_i$.

(8) *Une prodistribution* T *bornée sur* X est une forme linéaire sur $\mathscr{B}_{cyl}(X)$ dont la restriction à chaque $\mathscr{B}(X_i)$ est représentée par une distribution $T_i \in \mathscr{B}'(X_i)$.

Vu la propriété universelle des topologies limites inductives, on peut encore dire que T est une forme linéaire sur $\mathscr{B}_{cyl}(X)$ muni de la topologie localement convexe $\varinjlim_i \theta_i^\infty$.

(9) On pose $< T,\widetilde{\varphi} > = \int \widetilde{\varphi}(x)dT(x)$

Cette relation entraîne que : $i \geqslant j \Longrightarrow T_j = s_{ij}T_i$.*

Réciproquement, toute famille $T = (T_i)_i$ de distributions intégrables sur les espaces X_i vérifiant les relations de cohérence * définissent une prodistribution bornée sur X.

L'ensemble des prodistributions bornées sur X est noté $\mathcal{B}'_{cyl}(X)$. Si toutes les T_i sont d'ordre $\leq k$, on dit que T est d'ordre $\leq k$ et l'ensemble de ces prodistributions est noté $\mathcal{B}'^{k}_{cyl}(X)$. En particulier si k=0, les éléments de $\mathcal{B}'^{o}_{cyl}(X)$ sont appelés des promesures bornées. Et plus particulièrement si toutes les T_i sont positives de masse 1, on dit que $T = (T_i)$ est une probabilité cylindrique ou une promesure de probabilité ; (certains auteurs utilisent dans ce cas une terminologie différente).

(10) *On définit de même et naturellement* $\mathcal{O}'_{Mcyl}(X)$ = l'espace des prodistributions T à décroissance très rapide ; elles sont telle que $T_i \in \mathcal{O}'_M(X_i)$ pour tout i

$\mathcal{O}'_{c.cyl}(X)$ = l'espace des prodistributions (T_i) à décroissance rapide :

$T_i \in \mathcal{O}'_c(X_i)$ pour tout i.

Le point de vue fonctionnel permet de définir très simplement les opérations usuelles :

(11) *La transformée de Fourier* $\hat{T}$ de la prodistribution bornée T sur X est définie par

$$\forall \xi \quad \hat{T}(\xi) = \int e^{-i<x,\xi>} dT(x)$$

Inversement d'ailleurs, si l'on se donne une fonction ϕ sur le dual X' de X telle que, la restriction de ϕ à tout sous-espace U_i de dimension finie de X' soit la T.F. d'une distribution intégrable T_i sur $X_i = X/(U_i^{\perp})$, alors ϕ est la T.F. de la prodistribution T_i.

(12) *Exemples :*

a) Une fonction polynomiale sur X' définit un opérateur différentiel à coefficients constants sur X, noté $P(-\sqrt{-1}\, D)$.

b) Soit X un espace de Hilbert réel séparable identifié à son dual ; donc $(X_i)_i$ s'identifie à la famille des sous-espaces de dimension finie. La fonction $\exp(-\frac{1}{2}\|x\|^2)$ est la T.F. de la promesure normale canonique ν [36].

c) Dans [5], C.B. DE WITT définit la pseudo-mesure de Feynman sur X comme la collection W des mesures W_i sur les X_i, W_i ayant pour T.F. la restriction à X_i de la fonction $\exp(-\frac{\sqrt{-1}}{2}\|x\|^2)$. Cette définition signifie que W définit une forme linéaire sur l'espace des exponentielles complexes sur X. En fait [34] $\hat{W}_i \in \mathcal{O}_M(X_i)$; donc $W_i \in \mathcal{O}'_c(X_i)$ et W définit une forme linéaire sur $\mathcal{O}_{c,cyl}(X)$. Voir une interprétation beaucoup plus commode de W dans [22].

(13) *Image par une application linéaire continue.* - Soient X et Y deux e.l.c.s. et L une application linéaire faiblement continue de X dans Y. L'application $\psi \to \psi \circ L$ est linéaire continue de $\mathscr{B}_{cyl}(Y)$ dans $\mathscr{B}_{cyl}(X)$. Par transposition, on en déduit une application linéaire continue de $\mathscr{B}'_{cyl}(X)$ dans $\mathscr{B}'_{cyl}(Y)$.

Il est clair [17] que les opérations usuelles de la théorie des probabilités cylindriques [35] s'étendent de même naturellement aux prodistributions bornées.

(14) On peut même définir deux autres opérations :

a) le produit par une fonction $f \in \mathscr{B}_{cyl}(X)$:

$$\forall \varphi \in \mathscr{B}_{cyl}(X) \qquad < fT, \varphi > = < T, f\varphi >$$

b) la convolution par $f \in \mathscr{B}_{cyl}(X)$

$$(f*T)(x) = \int f(x-y)dT(y).$$

2.B <u>Indications sur les extensions</u>. - Un opérateur différentiel aussi trivial et aussi naturel que le laplacien sur un espace de Hilbert réel n'a pas de solution élémentaire promesure bornée. L'extension suivante de la notion usuelle de "promesure" est donc indispensable.

(15) *Notion de* F-*prodistributions* [*20*].

Soit J une partie de I telle que $F = (A_j)_{j \in J}$ soit filtrante croissante et d'intersection nulle. On dit alors que F est une bonne famille de sous-espaces de X. Une F-prodistribution d'ordre k est une famille $T = (T_j)_{j \in J}$ de distributions T_j sur les X_j telles que si A_i et A_j sont deux éléments quelconques de F vérifiant $A_i \subset A_j$, alors s_{ij} est T_i-k-propre et $s_{ij}(T_i) = T_j$. Si k=0 (resp. $k = +\infty$), on dit que T est une F-promesure (resp. une F-prodistribution). Les exemples de [27] montrent que l'introduction de F n'est pas artificielle mais qu'elle est très motivée. D'ailleurs S. Sjögren vient de montrer (note à paraître) que tout opérateur différentiel à coefficients constants sur un e.l.c.s. admet pour F convenable, une solution élémentaire F-prodistribution.

(16) *Extension non linéaire.*

A ce colloque, ELWORTHY a posé la question très intéressante d'étendre le formalisme des prodistributions aux variétés banachiques. En réponse, il a été indiqué comment des prodistributions d'ordre k peuvent être définies sur une variété banachique réelle V de classe C^k, munie d'une famille $\mathcal{R} = (R_i)_{i \in I}$ de relations d'équivalence. Il suffit de supposer :

- chaque R_i est régulière sur V au sens de [3]. D'où une structure unique de variété sur $V_i = V/R_i$; alors les projections canoniques $\sigma_i : V \to V_i$ et σ_{ij} : $V_i \to V_j$, cette dernière étant définie si R_i entraîne R_j, sont des submersions.

- chaque V_i est de dimension finie si $k > 0$ et de dimension quelconque si $k=0$.

- la famille $\mathcal{R}$ est filtrante croissante : quels que soient R_i et R_j, il existe R_k entraînant R_i et R_j. D'où un système projectif (V_i,σ_{ij}) de variétés de classe C^k de dimension finie.

- la famille $\mathcal{R}$ sépare les points de V.

- pour tout couple (i,j) tel que R_i entraîne R_j, σ_{ij} vérifie la condition (2.b), du moins chaque fois que ω' est contenu dans le domaine d'une carte.

Alors une $\mathcal{R}$-prodistribution d'ordre k sur V est définie comme une famille cohérente de distributions sur les variétés V_j de dimension finie.

2.C Exemples d'applications.

(17) *Intégration par rapport à un système projectif de mesures.*

Soit $\{Y_i, \mathcal{B}_i, \mu_i, s_{ij}, i \text{ et } j \in I\}$ un système projectif d'espaces probabilisés. L'application mesurable $s_{ij} : Y_i \to Y_j$ étant définie pour tout couple (i,j) tel que $i \geqslant j$; de plus $s_{ij}(\mu_i) = \mu_j$ et $s_{jk} \circ s_{ij} = s_{ik}$ si i,j et K vérifient $i \geqslant j \geqslant k$. Cette donnée est caractérisée par la lettre μ. Un relèvement $\{\Omega, \mathcal{T}, P, (f_i)_i\}$ de μ est la donnée d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{T},P)$ d'applications mesurables $f_i : \Omega \to Y_i$ telles que :

- $i \geqslant j \Longrightarrow f_j = s_{ij} \circ f_i$ P-presque partout
- $\forall i \quad f_i(P) = \mu_i$
- Les f_i engendrent la tribu P-complétée $\widehat{\mathcal{T}}$.

Lorsqu'ils souhaitent introduire des classes de Lebesgue L^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ relative à une probabilité cylindrique $\mu = (\mu_i)_i$, les physiciens utilisent des relèvements particuliers de μ. Mais ceci a l'inconvénient de rendre *difficiles* les calculs d'intégrales, et de rendre *impossible* tout calcul de dérivées. En fait, du point de vue intégration, la proposition suivante montre que l'introduction de tout relèvement particulier est inutile, car pour tout p fixé, les classes L^p relatives à deux relèvements de μ sont isométriques à un espace de promesure qui peut être décrit très explicitement sans utiliser de relèvement. De plus, notre formalisme des promesures a l'avantage de comporter un calcul différentiel : voir § 3.

(18) PROPOSITION [24], [27].
a) Pour $p > 1$, *soit* L^p_μ *la famille des promesures* $(g_i \mu_i)_i$ *avec* $\sup_i \int |g_i|^p d\mu_i < \infty$. *Alors pour tout relèvement* $\{\Omega, \mathcal{T}, P, (f_i)\}$ *de* μ *l'application* $\gamma : g \to (g_i)_i$ *avec* $g_i = \mathcal{E}(g|f_i)$ *est une isométrie bijective de* $L^p(\Omega)$ *sur* L^p_μ.
b) De plus pour tout $g \in L^p(\Omega)$, $(g_i \circ f_i)_i$ *converge vers* g *dans* $L^p(\Omega)$ *fort si* $p < \infty$ *et dans* $L^r(\Omega)$ *faible si* $p = +\infty$.

Ceci peut être étendu au cas p=1 moyennant une condition d'équi-intégrabilité (Y-Lejean) et au cas vectoriel.

(19) *Formules.*
a) Un élément $(g_i)_i$ de L^p_μ est noté $g(y)$ et $\int g(y)d\mu(y)$ désigne l'intégrale de γg par rapport à P. Alors :

b) $\forall i \quad \int g(y)d\mu(y) = \int g_i(y)d\mu_i(y)$

c) $\|g\|_p = \sup\{\|g_i\|_p, \ i \in I\}$.

Dans cette formule, I peut parfois [27] être remplacé par une partie de I.

d) $\forall p < \infty$, $\forall g \in L^p_\mu$, $\forall h \in L^{p'}_\mu$, h se factorisant à travers un Y_i, on a :

$$\int_Y g(y)h(y)d\mu(y) = \int_{Y_i} g_i(y)h_i(y)d\mu_i(y)$$

Ces formules permettent d'avaluer des intégrales en dimension infinie, en n'effectuant des calculs qu'en dimension finie. Ceci s'applique en particulier aux probabilités cylindriques et fournit ainsi un complément indispensable au formalisme des "promesures". Mais ceci peut aussi être combiné à (16) pour construire des promesures quasi-invariantes sur certains groupes de Lie de dimension infinie, et pour avoir à sa disposition une théorie de l'intégration sur ces groupes.

(20) *Exemples.*
Soit H un espace de Hilbert réel séparable,
a) pour le groupe orthogonal de H, voir [23].
b) pour le groupe de Heisenberg $H \times H \times \Pi$, on peut considérer les mesures $\nu_i \otimes \nu_i \otimes d\theta = \mu_i$ sur les groupes de Heisenberg de dimension finie $H_i \times H_i \times \Pi$, où H_i décrit les sous-espaces de dimension finie de H.

III. PROTENSEURS DISTRIBUTIONS.

3.A Protenseurs distributions contravariants. - Un entier positif ℓ est supposé fixé. On introduit d'abord une variante vectorielle $\mathscr{B}_{cyl}(X,\ell)$ de l'espace $\mathscr{B}_{cyl}(X)$

de fonctions cylindriques scalaires.

Pour tout $i \in I$, $\mathscr{B}(X_i, \ell)$ est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables définies sur X_i, à valeurs dans $\underset{\ell}{\otimes} X_i'^{c}$. Pour $i > j$, on a une injection de $\mathscr{B}(X_j, \ell)$ dans $\mathscr{B}(X_i, \ell)$. On introduit alors la limite inductive de ces espaces.

$$\mathscr{B}_{cyl}(X, \ell) = \bigcup_i \mathscr{B}(X_i, \ell) \tag{21}$$

Cette limite inductive s'identifie à un espace de fonctions cylindriques sur X à valeurs dans $\underset{\ell}{\otimes} X'^{c}$, la fonction cylindrique $\tilde{\varphi}_i$ associée à $\varphi_i \in \mathscr{B}(X_i, \ell)$ définit une flèche rendant le diagramme suivant commutatif.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tilde{\varphi}_i"] \arrow[d, "s_i"] & \underset{\ell}{\otimes} X'^{c} \\ X_i \arrow[r, "\varphi_i"] & \underset{\ell}{\otimes} X_i'^{c} \arrow[u, "\underset{\ell}{\otimes} s_i'^{c}"'] \end{tikzcd}$$

L'espace $\mathscr{B}'_{cyl}(X, \ell)$ des protenseurs distributions ℓ fois, contravariants sur X est l'espace des formes linéaires T sur $\mathscr{B}_{cyl}(X, \ell)$ dont la restriction à chaque $\mathscr{B}(X_i, \ell)$ est représentée par une distribution $T_i \in \mathscr{B}'(X_i, \otimes X_i^{c})$.

On pose encore

$$< T, \tilde{\varphi}_i > = < T_i, \varphi_i > = \int_X \tilde{\varphi}_i(x)\, dT(x) \tag{22}$$

On définit naturellement pour k entier $\geqslant 0$ ou égal à $+\infty$, les espaces $\mathscr{O}'_{c.cyl}(X, \ell)$ et $\mathscr{O}'_{M.cyl}(X, \ell)$. Remplaçant dans ce qui précède $\underset{\ell}{\otimes}$ par $\underset{\ell}{\odot}$ ou $\underset{\ell}{\Lambda}$, on obtient des classes particulières de protenseurs distributions symétriques ou antisymétriques. Ces classes peuvent être notées $\mathscr{B}'_{s.cyl}(X, \ell)$ et $\mathscr{B}'_{a.cyl}(X, \ell)$.

La notion de protenseur distribution contravariant peut être utilisée pour étendre (18) et représenter ainsi certaines classes de Lebesgue vectorielles : [24], [27].

3.B <u>Protenseurs distributions covariants</u>. - La classe $\mathscr{B}'_{cyl}(X \to \ell)$ des protenseurs distributions ℓ fois covariants sur X est l'espace des applications linéaires de $\mathscr{B}_{cyl}(X)$ dans $\underset{\ell}{\otimes} X'^{c}$ dont les restrictions à chaque $\mathscr{B}(X_i)$ sont représentées par des distributions intégrables sur X_i à valeurs dans $\underset{\ell}{\otimes} X_i'^{c}$.

Par exemple pour tout a fixé dans X, le protenseur distribution $D^{\ell} \delta_a$ est défini par l'application linéaire

$$(23)\qquad \begin{aligned} \mathscr{B}_{cyl}(X) &\longrightarrow \underset{\ell}{\otimes} X'^{c} \\ \widetilde{\varphi} &\longmapsto (-1)^{\ell}(D^{\ell}\widetilde{\varphi})(a) \end{aligned}$$

Ainsi la convolution par $D^{\ell}\delta_{o}$ définit un opérateur linéaire

$$(24)\qquad \begin{aligned} \mathscr{B}_{cyl}(X) &\longrightarrow \mathscr{B}_{cyl}(X,\ell) \\ \widetilde{\varphi} &\longmapsto D^{\ell}\delta_{o} * \widetilde{\varphi} = D^{\ell}\widetilde{\varphi} \end{aligned}$$

Plus généralement, toutes les opérations élémentaires définies précédemment pour les prodistributions s'étendent aux protenseurs distributions avec une complication supplémentaire due à la nature vectorielle des buts. Pour définir comme en calcul tensoriel des produits tensoriels ou des produits tensoriels contractés, on note que $\mathscr{B}_{cyl}(X,\ell)$ est un espace vectoriel isomorphe à

$$(25)\qquad \begin{aligned} \lim_{\to i} \mathscr{B}(X_i,\ell) = \lim_{\to i} (\mathscr{B}(X_i) \otimes (\underset{\ell}{\otimes} X_i'^{c})) &= \lim_{\to} \mathscr{B}(X_i) \otimes \lim_{\to} \otimes X_i'^{c} \\ &= \mathscr{B}_{cyl}(X) \otimes (\underset{\ell}{\otimes} X'^{c}) \end{aligned}$$

Par conséquent, vu la propriété universelle du produit tensoriel tout protenseur distribution ℓ fois contravariant définit une forme bilinéaire sur $\mathscr{B}_{cyl}(X) \times (\underset{\ell}{\otimes} X'^{c})$ donc une application linéaire

$$\mathscr{B}_{cyl}(X) \to (\underset{\ell}{\otimes} X'^{c})^{*}$$

Or un protenseur distribution ℓ fois covariant définit une application linéaire

$$(26)\qquad \mathscr{B}_{cyl}(X) \longrightarrow \underset{\ell}{\otimes} X'^{c}$$

On peut donc définir un protenseur distribution une fois contravariant et une fois covariant comme une application linéaire U

$$(27)\qquad \mathscr{B}_{cyl}(X) \longrightarrow (X'^{c})^{*} \otimes X'^{c}$$

dont la restriction à chaque $\mathscr{B}(X_i)$ est représentée par une distribution $U_i \in \mathscr{B}'(X_i,\ X_i^{c} \otimes X_i'^{c})$. En composant cette application linéaire avec la contraction :

$$\begin{aligned} X'^{c} \otimes X^{c} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \sum_{j=1}^{n} e_j' \otimes e_j &\longmapsto \sum_{j=1}^{n} (e_j', e_j) \end{aligned}$$

on obtient une prodistribution sur X, c'est-à-dire un protenseur distribution zéro fois contravariant et zéro fois covariant.

3.C <u>Applications à la dérivation</u>. - Raisonnons d'abord en dimension finie en fixant d'abord un indice i dans I. La transposée de l'opérateur -D

$$\mathscr{B}(X_i,\ell) \xrightarrow{-D} (X_i,\ \ell+1)$$

est l'opérateur de divergence

$$\mathscr{B}'(X_i,\ \ell+1) \xrightarrow{\text{div}} \mathscr{B}'(X_i,\ell).$$

Donc pour $T \in \mathscr{B}'(X_i,\ \ell+1)$ et $\varphi \in \mathscr{B}(X_i,\ell)$ on a

$$< \text{div } T, \varphi > = -< T, D\varphi >.$$

On peut encore définir DT en convolant T avec le tenseur distribution une fois covariant $D\delta_o$, mais alors DT est un tenseur distribution $(\ell+1)$ fois contravariant et une fois covariant. En contractant le tenseur DT on obtient div T. On fait alors varier i et l'on définit ainsi des opérateurs en dualité

$$\mathscr{B}_{cyl}(X,\ell) \xrightarrow{-D} \mathscr{B}_{cyl}(X,\ell+1) \text{ et}$$

$$\mathscr{B}'_{cyl}(X,\ell+1) \xrightarrow{\text{div}} \mathscr{B}'_{cyl}(X,\ell).$$

En itérant ces opérateurs, on définit ainsi

$$\mathscr{B}_{cyl}(X) \xrightarrow{(-1)^\ell D^\ell} \mathscr{B}_{cyl}(X,\ell) \quad \text{et } \mathscr{B}'_{cyl}(X,\ell) \xrightarrow{\text{div}_\ell} \mathscr{B}'_{cyl}(X).$$

La théorie de la dérivation qui vient d'être évoquée, prolonge exactement la théorie de L. SCHWARTZ de la dérivation des distributions [34], et cependant, elle est *insuffisante* en dimension infinie. En effet soit L une injection de Hilbert-Schmidt à image dense de X dans Ω, X et Ω étant des espaces de Hilbert réels séparables. On dira par la suite que (X, L,Ω) est un triplet de Wiener simple. Alors L transforme la promesure normale canonique ν de X en une probabilité de Radon P sur Y, d'où un relèvement $(\Omega,\mathscr{T},P,\ (f_i)_i)$ de ν, $\mathscr{T}$ désignant la tribu borélienne de Ω. Pour $g \in L^1(\Omega)$, soit $g\nu = (g_i\nu_i)_i$ la promesure $\in L^1_\nu$ représentant g, au sens de la proposition (17). Si g est de plus une fois continûment Fréchet-dérivable et si de plus $Dg \in L^1_p(\Omega,\Omega')$, on peut voir que

$$D(g\nu) \neq (Dg)\nu.$$

D'ailleurs, l'égalité est déjà fausse si X est de dimension un. D'où la nécessité d'une deuxième théorie de la dérivation : c'est la dérivation de densité [24], [20]. Elle est fondée sur la remarque suivante. Soit $T = (T_i)_i \in \mathcal{O}'_{c.cyl}(X)$ sur X hilbertien. Suivant (3.b), pour tout i, la distribution vectorielle $\widetilde{D}T_i$ peut être définie en prenant pour α_i la densité de ν_i par rapport à la mesure de Lebesgue canonique de X_i. Alors le système des $\widetilde{D}T_i$ définit un protenseur distribution contravariant, noté $\widetilde{D}T$, et appelé la dérivée de densité de T. Dans le cas particulier où $T = g\nu$ avec $g \in L^1_\nu$, on écrit $\widetilde{D}(g\nu) = (Dg)\nu$.

3.D Application aux classes de Sobolev. - La représentation de tout élément d'une certaine classe L^p vectorielle par protenseur distribution contravariant et la notion de dérivation de densité permettent la définition et l'étude des classes de Sobolev : [16], [18], [24], [27]. Cependant, il se produit ici un phénomène typique de la dimension infinie, lié d'ailleurs au phénomène de la diversité des types d'holomorphie de L. NACHBIN [31]. En général, deux normes sur $\underset{\ell}{\odot} X'^c$ sont non équivalentes ; d'où plusieurs définitions possibles des classes de Sobolev. Par exemple, voici deux classes importantes du type Sobolev : [18], [29] :

$$K^1(X) = \{g\nu \in L^2_\nu(X) \ ; \ \widetilde{D}(g\nu) \in L^2_\nu(X, X^c)\}$$

$$\mathscr{L}^1(X) = \{g\nu \in L^2_\nu(X) \ ; \ \widetilde{D}(g\nu) \in L^2_\nu(X, \Omega^c)\}.$$

Ainsi la théorie des prodistributions et des protenseurs distributions fournit un cadre extrêmement commode pour l'étude de sous-classes particulières, comme des classes de Lebesgue, et des classes du type Sobolev. De même d'autres sous-classes peuvent être étudiées :

IV. NOUVEAUX CALCULS DIFFERENTIELS BANACHIQUES ET THEORIES CORRESPONDANTES DES DISTRIBUTIONS.

4.A Généralités. - Soit X un espace de Banach réel quelconque, et soit k un nombre entier $\geqslant 0$ ou égal à $+\infty$. On se propose de définir en dimension infinie l'analogue de l'espace $\mathscr{B}'^k(X)$ des distributions intégrables d'ordre k. La première question qui se pose est le choix d'un calcul différentiel sur X pour définir les fonctions d'épreuve, le calcul différentiel de Fréchet ne pouvant d'ailleurs convenir, vues certaines pathologies existant, même si X est un "bon" espace de Banach. La meilleure solution consiste évidemment à ne privilégier aucun calcul différentiel particulier (Fréchet, Gateaux, Gross...). Il est donc naturel de prendre des fonctions d'épreuve cylindriques. On suppose donnée, pour tout $\ell \geqslant 0$, une norme sur $\underset{\ell}{\odot} X'^c$; l'espace de Banach complété est noté E^N_ℓ. On pose $E^N_o = \mathbf{C}$; et la famille $(E^N_\ell)_\ell$ est notée N. A toute famille N, vont être associées une notion de distributions et une notion duale de fonctions différentiables. On pourrait d'ailleurs remplacer les normes sur les espaces $\underset{\ell}{\odot} X'^{c}$ par des topologies localement convexes, ce qui multiplie encore les possibilités [25].

(28) N.B. Une telle procédure peut sembler surprenante, car en dimension finie, il y a peu de rapports entre les distributions et le calcul différentiel *des fonctions*. En fait, il n'y a rien de surprenant, car si X est de dimension finie, deux topologies localement convexes sur $\underset{\ell}{\odot} X'^{c}$ sont toujours équivalentes, et c'est la raison pour laquelle, il n'y a en dimension finie qu'un seul calcul différentiel : celui de Leibnitz et de Newton ! Le cas de la dimension finie est donc extrêmement singulier par sa simplicité.

(29) *Topologie* θ_N^k *sur* $\mathscr{B}^k_{cyl}(X)$.

Soit $\varphi \in \mathscr{B}^k_{cyl}(X)$. Il existe $i \in I$ et $\varphi_i \in \mathscr{B}^k(X_i)$ tels que $\varphi = \varphi_i \circ s_i$. Pour tout ℓ fini $\leqslant k$, la dérivée $D^\ell \varphi$ est une fonction cylindrique continue bornée admettant une factorisation

(30)
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{D^\ell \varphi} & \underset{\ell}{\odot} X'^{c} \\ \Big\downarrow s_i & & \Big\uparrow \odot\, s_i'^{c} \\ X_i & \xrightarrow{D^\ell \varphi_i} & \underset{\ell}{\odot} X_i'^{c} \end{array}$$

L'ensemble de ces fonctions est noté $\mathscr{B}^\circ_{s.cyl}(X,\ell) = \mathscr{B}^\circ_{cyl}(X, \underset{\ell}{\odot} X'^{c})$. Vu le lemme de densité de [19], c'est un sous-espace dense de l'espace $\mathscr{B}^\circ(X, E^N_\ell)$ des fonctions continues bornées $X \to E^N_\ell$, cet espace étant muni de la topologie stricte τ^ℓ_N. La topologie θ^k_N est définie comme la trace de la topologie produit $\prod_{\ell=o}^{k} \tau^\ell_N$, vu le plongement canonique

(31)
$$\begin{array}{ccc} \mathscr{B}^k_{cyl}(X) & \longrightarrow & \prod_{\ell=o}^{k} \mathscr{B}^\circ(X, E^N_\ell) \\ \varphi & \longmapsto & (\varphi, D\varphi, \ldots, D^k\varphi) \end{array}$$

(32) *Définition de* $\mathscr{B}'^{k}_{N}(X)$.

L'espace $\mathscr{B}'^{k}_{N}(X)$ *des* N-*distributions bornées d'ordre* k *sur* X *est défini comme étant le dual de* $\mathscr{B}^k_{cyl}(X)$ *muni de la topologie* θ^k_N.

(33) *Plongements canoniques.*

Comme θ^k_N est moins fine que $\varinjlim_i \theta^k_i$, on obtient par transposition de l'application identique de $\mathscr{B}^k_{cyl}(X)$ une injection canonique de $\mathscr{B}'^k_N(X)$ dans $\mathscr{B}'^k_{cyl}(X)$. Pour k=0, on retrouve ainsi l'injection canonique des probabilités de Radon sur X dans les probabilités cylindriques. L'espace $\mathscr{B}'^k_N(X)$ est une fonction croissante de k, et l'espace $\mathscr{B}'^\infty_N(X)$ est noté $\mathscr{B}'_N(X)$. On peut aussi définir pour tout m l'espace des tenseurs distributions contravariants d'ordre k et de degré m, et cet espace se plonge canoniquement dans les protenseurs distributions.

En dimension finie, la théorie des distributions est un prolongement de la théorie de la mesure sur les espaces compacts, car localement, toute distribution est somme finie de mesures de Radon à support compact. De même, la théorie des N-distributions prolonge la théorie des mesures de Radon vectorielles sur les espaces complètement réguliers ([19]) :

(34) PROPOSITION. - *Toute* N-*distribution est somme finie de divergences (au sens de la théorie des prodistributions) de mesures de Radon vectorielles à variation bornées, à valeurs dans les espaces* $(E^N_\ell)'$

(35) $$T = \sum_\ell (-1)^\ell \operatorname{div}_\ell \vec{\mu}_\ell \qquad \textit{avec } \mu_\ell \in M(Y, (E^N_\ell)')$$

Les opérations sur les N-distributions sont étudiées dans [21], en utilisant en particulier (33) et (34).

4.B Calcul N-différentiel.

(36) DEFINITION. - Il est supposé pour simplifier k=1. L'opération triviale de dérivation

(37) $$\mathscr{B}^1_{cyl}(X) \xrightarrow{D} \mathscr{B}^\circ_{cyl}(X, \underset{\ell}{\odot} X'^c)$$

est linéaire continue pour les topologies θ^1_N et τ^1_N. La bitransposée de cette application fournit un prolongement non trivial de D. En effet [21], en restreignant cette bitransposée aux fonctions universellement-mesurables bornées g sur X, on est amené à dire que la fonction h universellement Lusin-mesurable bornée $X \to (E^N_\ell)''$ est la N-dérivée de g si $\forall \mu \in M(X, (E^N_\ell)')$ telle que div $\mu \in M(X)$:

(38) $$\langle \operatorname{div} \mu, g \rangle + \langle \mu, h \rangle = 0.$$

Cette N-dérivée est unique. L'ensemble des fonctions N-dérivables sur X est noté $\mathscr{B}^1_N(X)$. On définit de même $\mathscr{B}^k_N(X)$.

(39) *Dualité entre* $\mathscr{B}^k_N(X)$ *et* $\mathscr{B}'^k_N(X)$.

Vus (34) et (35), on est amené à poser pour toute $\varphi \in \mathscr{B}^k_N(X)$ et pour toute $T \in \mathscr{B}'^k(X)$ admettant la représentation (35)

$$< T,\varphi > = \sum_{\ell} < \mu_{\ell}, D^{\ell}\varphi > = \sum_{\ell} \int_X D^{\ell}\varphi(x)d\mu_{\ell}(x).$$

Cette dualité ne dépend pas de la représentation (34) de T car $E = \mathscr{B}^k_{cyl}(X)$ est dense dans son bidual E" muni de la topologie faible $\sigma(E'',E)$.

(40) *Exemples* [21].

a) Supposons X réflexif séparable ayant la propriété d'approximation métrique et posons pour tout ℓ : $E^N_{\ell} = \hat{\hat{\odot}} X'^c$. Alors vu [14], il vient $(E^N_{\ell})' = \hat{\odot} X^c$; et $(E^N_{\ell})''$ coïncide avec l'espace ${}^{\ell}P(X^c)$ des polynomes homogènes de degré ℓ. On retrouve le calcul différentiel de Fréchet.

b) Soit (H,L,X) un triplet de Wiener simple. Si l'on prend pour tout ℓ, $E^N_{\ell} = \hat{\hat{\odot}} H^c$, on obtient un calcul différentiel correspondant à celui de L. GROSS.

4.C <u>Problème de l'approximation cylindrique dans $\mathscr{B}^k(X)$</u>. - Dans ce sous paragraphe, on fait l'hypothèse (38.a). Soit $\mathscr{B}^k(X)$ l'espace des fonctions k fois continûment dérivables sur X, dont toute dérivée d'ordre $\leqslant k$ est uniformément majorée sur X. Soit θ une topologie localement convexe sur $\mathscr{B}^k_{cyl}(X)$ compatible avec la dualité avec $\mathscr{B}'^k_N(X)$. Comme toute $T \in \mathscr{B}'^k_N(X)$ agit sur le complété $\hat{\mathscr{B}}^k_{cyl}$ de $(\mathscr{B}^k_{cyl}(X),\theta)$, et comme il est commode de travailler avec des limites de fonctions cylindriques, il se pose le problème de trouver des topologies θ non triviales telles que $\mathscr{B}^k(X) \subset \hat{\mathscr{B}}^k_{cyl}$. Soit donc t_{ℓ} une topologie localement convexe sur $E_{\ell} = \mathscr{B}^{\circ}(X, {}^{\ell}P(X))$, soit β_{ℓ} la boule unité de E_{ℓ}. Soit θ la topologie induite sur $\mathscr{B}^k(X)$ par $\prod_{\ell=0}^{k} t_{\ell}$, en utilisant un plongement canonique analogue à (31). On prend pour t_{ℓ} la topologie localement convexe la plus fine qui coïncide sur β_{ℓ} avec la trace de la topologie (sur l'espace des applications $X \to {}^{\ell}P(X)$) de la convergence uniforme sur une famille $\mathscr{F}$ de parties de la source X, le but ${}^{\ell}P(X)$ étant muni d'une certaine topologie $\mathfrak{T}$.

Or si X est de dimension infinie :

- la famille $\mathscr{F}$ des bornés de X est trop grande car en général, une fonction continue sur X, est mal approchable, par des fonctions cylindriques, uniformément sur des boules de X.

- la topologie de la norme sur ${}^{\ell}P(X)$ est trop fine en général car tout opérateur linéaire continu n'est pas limite uniforme d'opérateurs de rang fini.

Par conséquent, on ne peut pas prendre $\theta = \theta^k_N$. Cependant le théorème 2 de [19] permet de montrer qu'on peut prendre pour $\mathscr{F}$ la famille des compacts de X et par $\mathfrak{T}$ la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de X : voir [21]. Il serait intéressant d'étudier le problème de l'approximation cylindrique dans d'autres espaces de fonctions dérivables.

4.D Remarques sur les opérateurs pseudo-différentiels. - Soit (H,L,X) un triplet de Wiener simple. La décomposition polaire $U|L|$ de L fournit une base orthonormée $e_1, e_2 \ldots$ de H formée par des vecteurs propres de $|L|$. L'espace X est muni de la bonne famille $F = (H^N)_{N \geqslant 1}$ où H^N est engendré par $e_N, e_{N+1} \ldots$ Pour tout $\ell \geqslant 0$, E^N_ℓ désigne le complété de $\underset{\ell}{\odot} X'^c$ pour la norme projective π. Soit $\tilde{\theta}^k_N$ la topologie sur $\mathscr{B}^k_{F-cyl}(X)$ qui se définit comme θ^k_N, à ceci près que la topologie de la convergence compacte sur X est remplacée par la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de X. M.I. VISHIK, P.M. BLEHER et A.V. MARTCHENKO [1], [37] munissent $\mathscr{B}^k_{F-cyl}(X)$ d'une topologie présentant une analogie avec $\tilde{\theta}^k_N$, mais qui en diffère. L'opérateur de convolution typique dans leur théorie est la convolution avec $G_s = L((1-\Delta)^s \delta_o)$ où pour tout réel s, Δ désigne le laplacien de H. Dans [21], il est montré au point (4.7.c) que G_s est une N-distribution sur X ; et au point (3.12) que les N-distributions définissent par convolution des opérateurs continus entre espaces $\hat{\mathscr{B}}^k_{cyl}(X)$. Tout ceci est encore vrai ici si $E^N_\ell = \underset{\ell}{\hat{\odot}} X'^c$ est remplacé pour tout $\ell \geqslant 0$ par $\underset{\ell}{\hat{\odot}} H^c$, où le triangle symbolise la complétion par rapport au produit tensoriel hilbertien. La théorie des N-distributions fournit donc un cadre. pour étudier des variantes de [1], [37]. La formulation en termes de distributions de [13] nécessiterait l'utilisation de N-distributions non bornées, car la mesure de Green de $L(\Delta)$ est une mesure positive de masse infinie sur X.

V. CONCLUSION.

1. La notion usuelle de distribution se diversifie en dimension infinie en plusieurs notions :

A. les prodistributions
B. les protenseurs distributions.
C. les classes de Sobolev scalaires
D. les classes de Sobolev vectorielles
E. les distributions appelées parfois les vraies distributions
F. les tenseurs distributions.

Les notions voisines suivantes peuvent aussi être signalées :

G. les fonctionnelles analytiques
H. les profonctionnelles analytiques
I. les tenseurs fonctionnelles analytiques.
...

De plus, vu la non équivalence des topologies localement convexes sur $\underset{\ell}{\odot} X'^c$ si X est de dimension infinie, il y a une infinité de types de distributions, une infinité de types d'espaces de Sobolev...

2. Voici les applications de la théorie connues en avril 1976 alors que la deuxième rédaction de ce texte est effectuée :

- applications en dimension infinie des méthodes connues en théorie des e.d.p. sous le nom de "méthodes d'énergie, de majorations a priori, de compacité". Résolution d'e.d.f. non linéaires et d'inéquations. Ceci utilise A, B, C et D, [18], [20].

- Résolution du problème posé par J.L. LIONS du contrôle optimal des systèmes gouvernés par des e.d.f. Voir [18] , [24]. Ceci utilise A, B, C et D.

- Etablissement d'une règle de quantification et de composition des opérateurs en dimension infinie [23] , [26].

La règle proposée *ne coïncide pas avec la règle de Weyl en dimension finie*, mais coïncide en dimension infinie avec des règles utilisées par les physiciens en seconde quantification. La loi de composition coïncide avec les produits de Wick. Possibilité d'écriture rigoureuse de la partie de l'électrodynamique quantique appelée théorie des états cohérents. Même pour les modèles connus de dimension finie, les résultats sont nouveaux. Ceci utilise A et H.

- Majorations elliptiques du type L^2 en dimension infinie [29] . Opérateurs pseudo-différentiels. *Restreints à la dimension finie, certains de ces résultats sont nouveaux.* Ceci utilise A, B, C et D.

- Extension au groupe additif d'un Hilbert réel de la transformation métaplectique de A. WEIL et I. SEGAL - voir [23]. Ceci utilise A et les polynômes de HERMITE complexes de [29] .

- Définition de nouveaux calculs différentiels et nouvelles définitions de l'holomorphie [20] , [25] . Ceci utilise A, B, E et F.

- Résolution de problèmes de Cauchy à coefficients constants. Ceci utilise selon les cas E, G ou H. Une extension à certains opérateurs à coefficients polynômes est possible.

-"Radonification" de la pseudo-mesure de FEYNMAN [22]. Ceci utilise G et H.

3. Il apparaît ainsi, au moins en ce qui concerne les distributions, que l'analyse en dimension infinie ne se réduit pas à une extension formelle de la dimension finie ; il s'y passe des phénomènes nouveaux marquant une *discontinuité par rapport à la dimension finie.*

Dans ces conditions, il est raisonnable de penser que "la" bonne notion de distributions n'existe pas en dimension infinie. En effet, la notion usuelle de distribution se diversifie en des concepts si différents, applicables dans des conditions si différentes qu'il semble impossible (en tout cas inutile) de les réunir en un seul. On peut aussi noter que l'étude de fonctions très particulières d'une infinité de variables réelles ou complexes $u_1, u_2 \dots$ est intimement liée à l'origine même de l'analyse mathématique ... Et il a fallu de nombreuses années pour reconnaître que la notion de série $\sum_{k=1}^{n} u_k$ n'est pas seulement une extension formelle de la notion de somme $\sum_{k=1}^{n} u_k$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P.M. BLEHER et M.I. VISHIK, Matem. Sbornik 86 (128), n° 3 (1971), 446-494.

[2] P.J. BOLAND et S. DINEEN, *Convolution operators on G-holomorphic functions* (to appear).

[3] N. BOURBAKI, *Variétés différentiables et analytiques, § 1 à 7 et § 8 à 15*, Hermann, Paris (1971).

[4] N. BOURBAKI, *Intégration, Chapitre 9*, Hermann, Paris.

[5] C.B. De WITT, Comm. Math. Phys. 28 (1972), 47-67.

[6] S. DINEEN, Studia math. XXXIX (1971), 241-288.

[7] D.N. DUDIN, Uspekhi matem. Nauk. Vol. 27, n° 2 (1972), 169-170.

[8] T. DWYER, Bull. Amer. Math. Soc. 77 (1971), 725-730.

[9] C. ELSON, Trans. Amer. Math. Soc. (1975).

[10] D.H. FREMLIN, D.J.H. GARLING et R.G. HAYDON, Proc. London Math. Soc. (3), 25 (1972), 115-136.

[11] D.J.H. GARLING, Proc. London Math. Soc. (3), 14 (1964), 1-28.

[12] I.M. GELFAND et VILENKIN, *Les fonctions généralisées, t. 4*, Dunod Paris.

[13] L. GROSS, J. of Funct. Analysis I (1967), 123-181.

[14] A. GROTHENDIECK, Mémoire n° 16 de l'A.M.S., Providence 1956.

[15] C.P. GUPTA, Notas de Matematica, Inst. Mat. Pura et Apl. Rio de Janeiro, 37 (1968), 1-50.

[16] M. KREE, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 279 (29 juillet 1974), série A, 157-160.

[17] P. KREE, Exposé dans "*Linear operators an approximation*". Birkhausen - Bâle 1972.

[18] P. KREE, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 278 (11 mars 1974) série A, 753-755.

[19] P. KREE, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 282 (8 mars 1976), série A, 511-513.

[20] P. KREE, Séminaire P. Lelong - Lectures notes in mathematics, I-1972-1973 - n° 410 et II - 1973-1974, n° 474, p. 16-47.

[21] P. KREE, Séminaire P. Lelong, Lectures Notes in mathematics, 1974-1975.

[22] P. KREE, Conférence dans les actes (à paraître) du Colloque de Campinas (Sao Paulo), août 1975.

[23] P. KREE, Texte (à paraître) au Séminaire J. Leray, Collège de France, février 1976.

[24] P. KREE, *Solutions faibles d'e.d.f.* (proposé pour publication).

[25] P. KREE, *Théorie de la mesure et holomorphie en dimension infinie* (en préparation).

[26] P. KREE et R. RACZKA, *Kernels and Symbols of operators in quantum field theory* (à paraître).

[27] P. KREE, Séminaire 1974-1975. Publié par le secrétariat de Mathématiques de l'I.H.P.

[28] P. KRISTENSEN, L. MELJBO et E. THUE POULSEN, Comm. math. phys. 1 (1965), 175-214.

[29] B. LASCAR, *Estimées* L^2 *pour des opérateurs elliptiques en dimension infinie*, Sém. Goulaouic-Schwartz , Ecole Polytechnique, Paris 1975-1976, et article en préparation.

[30] J. LESMES, Revista Colombiana de mat. vol. VIII (1974), 217-223.

[31] L. NACHBIN, *Topology on spaces of holomorphic mappings*, Berlin Heidelberg, New-York, Springer 1969.

[32] L. NACHBIN, pp. 167-171, in Functional analysis and related Fields, Berlin Heidelberg, New-York, Springer 1970.

[33] NOMOTO, Conf. in russian japanese symp. on proba. tH. 1972, Lectures Notes.

[34] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions, t. 1 et 2*, Hermann Paris (1951).

[35] L. SCHWARTZ, *Les applications radonifiantes*, Sém. à l'Ecole polytechnique, Paris (1970-1971).

[36] I. SEGAL, Trans. Amer. Math. Soc. 81 (1956), 106-134.

[37] M.I. VISHIK, Ouspeshi Mat. Nauk XXVI 2 (1971), 155-174.

[38] A.V. ZAKIR, Vestnik Moskovskogo Universiteta Matematika, 29, n° 3 (1974), 32-40.

Paul KREE
Département de Mathématiques
Université de Paris VI
Place Jussieu

PARIS 5e

◦◦◦◦◦