MÉMOIRES DE LA S. M. F.

NICOLAAS H. KUIPER

La courbure totale absolue minimale des surfaces dans E^3

Mémoires de la S. M. F., tome 46 (1976), p. 11

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1976__46__11_0>

Journées Géom. dimens. infinie [1975 - LYON]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 46, 1976, p. 11.

LA COURBURE TOTALE ABSOLUE MINIMALE DES SURFACES DANS E^3

par Nicolaas H. KUIPER

Le théorème de Gauss-Bonnet sur une surface compacte métrique riemannienne s'écrit

$$\int_M \frac{K|d\sigma|}{2\pi} = \chi(M) \tag{1}$$

où $\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré, K la courbure de Gauss, et $d\sigma$ l'élément de volume.

D'autre part pour une surface C^2-immergée dans l'espace euclidien E^3 nous avons

$$\int_M \frac{|K d\sigma|}{2\pi} \geqslant 4 - \chi(M)\ . \tag{2}$$

L'égalité dans (2) n'est pas atteinte pour le plan projectif P ni pour la bouteille de Klein.

Au lieu des immersions on considère les applications C^∞-stables au sens de René Thom. Alors on trouve pour l'application stable $f : P \to E^3$ définie par

$$\begin{tikzcd} S^2 = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1\} \arrow[r] \arrow[d] & P = S^2/(x,y,z) = (-x,-y,-z) \arrow[dl, "f"] \\ (u,v,w) = (x^2-y^2,\ 2xy, yz) & \end{tikzcd}$$

que l'intégrale dans (2) existe et qu'elle donne l'égalité. Dans cet exemple les singularités (toutes deux du type "parapluie de Whitney") sont en $(x,y,z) = (0,0,1)$ et en $(1,0,0)$. Aussi pour la bouteille de Klein, on trouve un exemple dont on peut déduire que (1) et (2) sont valables pour toute application stable de surfaces dans E^3 quoique K ne soit pas définie aux points singuliers. Pour plus de détails, voir N.H. Kuiper "*Stable surfaces in euclidean three space*", Math. Scand. 36, (1975), 83-96.

Nicolaas H. KUIPER
Institut des Hautes Etudes Scientifiques
91449 BURES SUR YVETTE (France)