MÉMOIRES DE LA S. M. F.

CLAIRE DELAROCHE

Extensions des C^*-algèbres

Mémoires de la S. M. F., tome 29 (1972)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__29__3_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
Mémoires 29, 1972, 142 p.
(Thèse Sc. math., 1971)

EXTENSIONS DES C^*-ALGÈBRES,

par

Claire DELAROCHE

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE VI

Extensions encadrées d'une C^*-algèbre à trace continue

CHAPITRE VII

D'autres extensions de C^*-algèbres

CHAPITRE VIII

CHAPITRE IX

INTRODUCTION

Notre but principal dans ce mémoire est d'étudier la structure de certaines C^*-algèbres. Les travaux réalisés auparavant ([17] et [19]) concernant la structure des C^*-algèbres à trace continue ont abouti à une solution assez satisfaisante. Une C^*-algèbre B à trace continue, homogène de degré $\aleph_0$ ([16], déf. 10.9.4) est souvent (en un sens qui se précise à la lecture de ([16], corol. 10.9.6) isomorphe à $\mathcal{C}^\circ(\hat{B}, \mathcal{LC}(H))$, où H est un espace hilbertien de dimension $\aleph_0$. Quand on veut dépasser le cas des C^*-algèbres à trace continue, on est conduit au problème suivant : déterminer la structure d'une C^*-algèbre B connaissant $\hat{B}$ et sachant que B est une extension d'une C^*-algèbre connue A par une C^*-algèbre connue C. Rappelons en effet que toute C^*-algèbre postliminaire admet une suite de composition dont les quotients sont des C^*-algèbres à trace continue ([19], th. 4.2). Nous nous limiterons ici à l'étude de l'ensemble $\mathrm{Ext}(A,C)$ des extensions d'une C^*-algèbre à trace continue A par une C^*-algèbre C et, le plus souvent, nous supposerons que $A = \mathcal{C}^\circ(X, \mathcal{LC}(H))$ et $C = \mathcal{C}^\circ(Y, \mathcal{LC}(H'))$, où X, Y sont deux espaces localement compacts et H, H' deux espaces hilbertiens. Bien qu'ainsi limité, le problème consistant à classer les éléments de $\mathrm{Ext}(A,C)$ semble encore difficile. Il serait naturel de classer les extensions à équivalence faible près (0.13); pour des raisons techniques, c'est surtout une relation intermédiaire entre l'équivalence et l'équivalence faible qui interviendra (voir en IV.3.4 la définition de la semi-équivalence).

Dans le chapitre I nous rassemblons principalement des résultats permettant de déterminer les limites et les valeurs d'adhérence d'un filtre Θ sur le spectre $\hat{B}$ d'une C^*-algèbre B à partir de l'étude, pour $b \in B^+$ des fonctions $t \longmapsto \|b(t)\|$ ou $t \longmapsto \mathrm{Tr}\, b(t)$ définies sur $\hat{B}$. Les résultats du paragraphe I.1 sont classiques pour la plupart ([18], §II.9). Ils montrent qu'il existe des relations étroites entre les nombres réels $\liminf_{t,\Theta}\|b(t)\|$ (resp. $\limsup_{t,\Theta}\|b(t)\|$) et les limites (resp. les valeurs d'adhérence) de Θ (I.1.8). Dans le paragraphe I.2, nous montrons comment on peut déterminer certaines limites de Θ grâce aux fonctions $t \longmapsto \mathrm{Tr}\, b(t)$, et même parfois toutes les limites de Θ (I.2.13). Le cas le plus intéressant est celui où $\limsup_{t,\Theta} \mathrm{rg}\, b(t) < +\infty$ et où $\lim_{t,\Theta} \mathrm{Tr}\, b(t)$ existe pour tout b appartenant à l'idéal de Pedersen (0.10) de B (I.2.17 et I.2.26); en particulier, ces hypothèses entraînent que Θ converge vers chacune de ses valeurs d'adhérence dans $\hat{B}$. Dans le paragraphe I.3, nous étudions une réciproque de ce résultat (I.3.6); dans certains cas, elle permet d'obtenir des renseignements intéressants sur une C^*-algèbre à partir de l'étude de son spectre (VI.1.5).

Le chapitre II est purement topologique. On y étudie les extensions localement quasi-compactes d'un espace localement quasi-compact X par un espace localement quasi-compact Y. Ce chapitre contient, comme cas particuliers, des résultats concernant les compactifications des espaces localement compacts (voir à ce propos [26] et [35]). En supposant X séparé, on caractérise dans le corollaire II.12 toutes les extensions localement quasi-compactes Z de X par Y telles que les points de X soient fermés et séparés (déf. II.6) dans Z. On note $\mathcal{G}(X,Y)$ leur ensemble.

Le chapitre II est une première étape dans l'étude de l'ensemble $\mathrm{Ext}(A,C)$ des extensions B d'une C^*-algèbre A par une C^*-algèbre C ; en effet $\hat{B}$ est une extension localement quasi-compacte de $\hat{A}$ par $\hat{C}$. Signalons à ce propos qu'une extension localement quasi-compacte de $\hat{A}$ par $\hat{C}$ n'est pas nécessairement le spectre d'une extension de A par C (voir, par exemple, VI.2.15). Le problème consiste maintenant à déterminer combien il existe, à équivalence faible près, d'éléments de $\mathrm{Ext}(A,C)$ ayant un spectre donné. D'après [3], il existe une extension $M(A)$ de A telle que les éléments de $\mathrm{Ext}(A,C)$ soient canoniquement associés aux homomorphismes de C dans $M(A)/A$ (0.14). Nous supposons, dans la suite de cette introduction, que $\hat{A}$ est séparé. Nous montrons l'existence d'un idéal bilatère fermé $L(A)$ de $M(A)$, contenant A, tel que les éléments B de $\mathrm{Ext}(A,C)$ pour lesquels $\hat{B} \in \mathcal{G}(\hat{A},\hat{C})$ soient canoniquement associés aux homomorphismes de C dans $L(A)/A$ (IV.1.3). Nous notons $\mathcal{G}(A,C)$ l'ensemble des $B \in \mathrm{Ext}(A,C)$ tels que $\hat{B} \in \mathcal{G}(\hat{A},\hat{C})$. Signalons que les C^*-algèbres des groupes de Lie nilpotents connexes conduisent à de telles extensions ([14]). Soient $\gamma \in \mathrm{Hom}(C,L(A)/A)$ et B l'élément de $\mathcal{G}(A,C)$ qui lui est associé; nous éclaircissons dans la proposition IV.1.4 les rapports existant entre γ et $\hat{B} \in \mathcal{G}(\hat{A},\hat{C})$.

L'étude détaillée de $L(A)$ est faite au chapitre III. Elle se révèle être plus simple que l'étude de $M(A)$. Ainsi, lorsque $A = \mathcal{C}^\circ(X, \mathcal{LC}(H))$, on a $L(A) = \mathcal{C}^b(X, \mathcal{LC}(H))$. La C^*-algèbre $L(A)$ est définie par un champ continu de C^*-algèbres sur $\beta\hat{A}$, mais ses composantes $L(A)(x)$ pour $x \in \beta\hat{A} - \hat{A}$ peuvent être très compliquées (III.4.12).

Le chapitre V groupe un certain nombre de lemmes techniques qui seront utilisés dans les chapitres suivants.

Soient X et Y deux espaces localement compacts et H, H' deux espaces hilbertiens. Nous supposons à partir de maintenant que $A = \mathcal{C}^\circ(X,\mathcal{LC}(H))$ et $C = \mathcal{C}^\circ(Y,\mathcal{LC}(H'))$. Il existe dans $L(A)$ un idéal bilatère fermé uniformément liminaire (déf. I.2.2) $\bar{E}^1(A)$, contenant A, tel que les extensions de A par C canoniquement associées aux homomorphismes de C dans $\bar{E}^1(A)/A$ soient les C^*-algèbres uniformément liminaires qui appartiennent à $\mathcal{G}(A,C)$ (IV.2.1 et VI.1.2); nous notons $\mathcal{E}(A,C)$ l'ensemble de ces extensions. Lorsque X est normal, $\overline{E}^1(A)$ n'est autre que le plus grand idéal postliminaire de $L(A)$ (III.4.15). Les éléments de $\mathcal{E}(A,C)$ sont les plus faciles à étudier, étant donné que $\overline{E}^1(A)$ a une structure relativement simple (III.2.13). On verra heureusement des cas où beaucoup d'extensions sont de ce type (VI.1.3, 4 et 5). On associe à chaque $B \in \mathcal{E}(A,C)$ un invariant $\xi(\tilde{B})$ (pour la semi-équivalence, $\tilde{B}$ étant la classe de semi-équivalence de B). Cet invariant est plus fin que $\hat{B}$; il est directement lié au comportement des fonctions $t \longmapsto \mathrm{Tr}\, b(t)$ sur $\hat{A}$, pour $b \in B^+$. Dans le paragraphe VI.2, on étudie l'image de ξ et, à cette occasion, on donne un procédé simple pour obtenir des éléments de $\mathcal{E}(A,C)$ (prop. VI.2.6). Dans le paragraphe VI.3, on étudie une situation où $\xi(\tilde{B})$ suffit pour déterminer $\tilde{B}$ (VI.3.3 et VI.3.4). Dans une telle situation on peut donc dire que notre objectif de classification est atteint. Mais il existe aussi des exemples de C^*-algèbres A et C et d'extensions non semi-équivalentes (ni même faiblement équivalentes) B et B' dans $\mathcal{E}(A,C)$ telles que $\xi(\tilde{B}) = \xi(\tilde{B}')$ (VIII.3 et VIII.4). Dans certains cas (VI.3.8), on classe toutes les extensions de A par C ayant un spectre donné. Ce résultat permet de déterminer complètement la structure de certaines C^*-algèbres à partir de l'étude des fonctions $t \longmapsto \mathrm{Tr}\, b(t)$ sur une partie de leur spectre (VIII.4, 5 et 6)

Dans le chapitre VII nous nous intéressons à des éléments de $\mathcal{Y}(A,C)$ n'appartenant pas nécessairement à $\mathcal{E}(A,C)$. Le problème que nous abordons peut aussi se formuler comme suit. Soit W un espace localement compact, w un point non isolé de W , et $X = W - \{w\}$. Existe-t'il des champs continus de C^*-algèbres sur W qui induisent sur X le champ constant défini par $\mathcal{L}\mathcal{C}(H)$ et dont la fibre en w est C ? Si oui, combien existe-t'il de tels champs (à isomorphisme près)? On obtient des cas d'impossibilité (VII.1.4 et VII.1.5) et une condition suffisante d'existence (VII.2.3). Les propositions VII.3.4 et VII.3.5 prouvent l'existence d'un grand nombre de solutions, sous certaines conditions. Le problème de la classification des solutions (du moins pour des familles suffisamment vastes d'espaces Y , W et $X = W - \{w\}$) reste posé. Nous n'obtenons une solution satisfaisante que dans un cas très particulier (VII.4.3). Un réponse à ce problème serait utile pour l'étude de la structure de certaines C^*-algèbres non uniformément liminaires (IX.5).

Le chapitre VIII rassemble des exemples illustrant certains résultats obtenus au cours des chapitres précédents. Ainsi dans VIII.2 nous montrons qu'il existe exactement 6 classes d'équivalence faible d'extensions de $A = \mathcal{C}^\circ(\mathbb{R}, M_5(\mathbb{C}))$ par $C = M_2(\mathbb{C})$. Dans VIII.4 nous prenons $A = \mathcal{C}^\circ([0,+\infty[, \mathcal{L}\mathcal{C}(H))$ (ou $A = \mathcal{C}^\circ(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}\mathcal{C}(H))$) et $C = \mathcal{L}\mathcal{C}(H')$ avec $0 < \dim H' \leqslant \dim H = \aleph_0$. Nous montrons que les éléments de $\mathcal{Y}(A,C)$ sont classés, à équivalence faible près, de façon simple par $\mathbb{N}$. Dans VIII.7

nous prenons $A = \mathcal{C}^{\circ}(\mathbb{N}, \mathcal{L}\mathcal{C}(H))$ avec $\dim H \geqslant \aleph_0$, et $C = \mathbb{C}$. Nous classons, à équivalence faible près, les éléments B de $\mathfrak{S}(A,C)$ tels que $\hat{B}$ soit le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{N}$. On remarquera que cette classification est plus compliquée que les précédentes. Au paragraphe VIII.6, nous déterminons simplement, grâce à VI.3.9, la structure de la C^*-algèbre du groupe $SL(2,\mathbb{C})$, C^*-algèbre déjà étudiée par Fell ([19]).

La plupart des résultats ont été annoncés dans [6], [7], [8] et [9].

Je tiens à remercier ici très sincèrement Monsieur J. Dixmier qui m'avait suggéré d'entreprendre ce travail et n'a cessé de me prodiguer conseils et et encouragements tout au long de son élaboration.

CHAPITRE 0

Préliminaires

0.1. Nous noterons $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers rationnels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, $\mathbb{T}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1, et $\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{N}^*$) l'ensemble des entiers $\geqslant 0$ (resp. > 0). Pour tout cardinal p, nous choisirons un ensemble de cardinal p que nous noterons $N(p)$. Si p est fini nous prendrons $N(p) = \{1,\dots,p\}$, et si $p = \aleph_0$ nous prendrons $N(p) = \mathbb{N}^*$. D'autre part, si p et q sont deux cardinaux tels que $q \leqslant p$, nous supposerons parfois implicitement que $N(q) \subset N(p)$. Pour tous cardinaux p et q strictement positifs, nous noterons $[p : q]$ le plus grand cardinal r tel que $rq \leqslant p$. Remarquons que si p est infini, on a $[p : q] = p$ lorsque $q \leqslant p$ et $[p : q] = 0$ lorsque $q > p$.

0.2. Soient X un espace topologique et Y une partie de X. Nous noterons $\overline{Y}$ ($\overline{Y}^X$ en cas d'ambiguïté) l'adhérence de Y, et $\operatorname{Int} Y$ l'intérieur de Y.

0.3. Rappelons qu'un espace topologique X est quasi-compact si tout filtre sur X possède au moins une valeur d'adhérence, et que X est localement quasi-compact si tout point de X admet un système fondamental de voisinages quasi-compacts. Si X est séparé et quasi-compact (resp. localement quasi-compact), alors X est compact (resp. localement compact).

0.4. Soit X un espace localement compact. Nous noterons βX le compactifié de Stone-Čech de X. Nous désignerons par $\dot{X}$ l'espace X si X est compact, et le compactifié d'Alexdrandroff de X si X n'est pas compact. Nous désignerons par $\ddot{X}$ l'espace $\dot{X}$ si X n'est pas compact, et la somme topologique de X et d'un espace réduit à un point si X est compact. Le point de $\ddot{X} - X$ sera appelé point à l'infini de X.

Soient $x \in \beta X - X$ et Θ_x la trace sur X du filtre des voisinages de x dans βX. Ce filtre possède la propriété fondamentale suivante : il existe une base Ψ de Θ_x, formée d'ensembles ouverts, telle que pour tout $V \in \Psi$, il existe $W \in \Psi$ contenu dans V et une fonction continue de X dans $[0,1]$ égale à 0 dans W et à 1 hors de V. Un tel filtre est dit complètement régulier ([2], ex. 8, p. 23). Remarquons qu'un filtre complètement régulier possède aussi une base formée d'ensembles fermés.

0.5. Soit Y un espace topologique. Nous notons $\mathcal{F}(Y)$ l'ensemble de ses fermés et $\mathcal{F}_d(Y)$ l'ensemble de ses fermés discrets. Pour toute partie quasi-compacte K de Y, posons $\mathcal{V}(K) = \{F \in \mathcal{F}(Y) \mid F \cap K = \emptyset\}$; nous appellerons topologie surfellienne la topologie sur $\mathcal{F}(Y)$ qui possède comme base d'ouverts l'ensemble des $\mathcal{V}(K)$. Pour tout ensemble fini d'ouverts $O_1, \dots, O_n$ de Y, posons

$$\mathcal{W}(O_1, \dots, O_n) = \{F \in \mathcal{F}(Y) \mid F \cap O_i \neq \emptyset \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, n\} \quad ;$$

l'ensemble des $\mathcal{W}(O_1, \dots, O_n)$ est une base d'ouverts pour une topologie sur $\mathcal{F}(Y)$ que nous appellerons topologie sousfellienne. Enfin, nous appellerons topologie fellienne la borne supérieure des deux topologies précédemment définies sur $\mathcal{F}(Y)$. Cette dernière topologie a été introduite par J.M.G. Fell dans [20]; en particulier, il est démontré dans [20] que $\mathcal{F}(Y)$ est localement quasi-compact et que, si Y est localement quasi-compact, alors $\mathcal{F}(Y)$ est séparé (on notera que les topologies surfelliennes et sousfelliennes sont non séparées en général).

Soit f une application d'un espace topologique X dans $\mathcal{F}(Y)$. Nous dirons que f est continue (resp. semi-continue inférieurement (s.c.i.), resp. semi-continue supérieurement (s.c.s.)) si elle est continue lorsque $\mathcal{F}(Y)$ est muni de la topologie fellienne (resp. sousfellienne, resp. surfellienne).

0.6. Soient X et Y deux espaces topologiques. Nous noterons $\mathcal{C}(X,Y)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans Y. En particulier $\mathcal{C}(X, \mathcal{F}(Y))$ désignera l'ensemble des fonctions continues de X dans $\mathcal{F}(Y)$. Si V est un espace vectoriel normé, nous noterons $\mathcal{C}^b(X,V)$ l'ensemble des fonctions continues bornées de X dans V. Si de plus X est localement compact, $\mathcal{C}^\circ(X,V)$ désignera l'ensemble des fonctions continues de X dans V qui tendent vers 0 à l'infini. Lorsque $V = \mathbb{C}$ nous poserons $\mathcal{C}(X,V) = \mathcal{C}(X)$, $\mathcal{C}^b(X,V) = \mathcal{C}^b(X)$ et $\mathcal{C}^\circ(X,V) = \mathcal{C}^\circ(X)$.

0.7. Soit H un espace de Hilbert. Nous noterons $\mathcal{L}(H)$ la C^*-algèbre des opérateurs linéaires continus dans H et $\mathcal{LC}(H)$ la C^*-algèbre des opérateurs compacts dans H. Le groupe unitaire de H sera noté $\mathcal{U}(H)$ et $\mathcal{PU}(H)$ désignera le groupe projectif unitaire (i.e. le groupe quotient de $\mathcal{U}(H)$ par son centre). Si $u \in \mathcal{U}(H)$, nous noterons $\tilde{u}$ l'image de u par passage au quotient. Nous identifierons canoniquement $\mathcal{PU}(H)$ au groupe des automorphismes de $\mathcal{LC}(H)$ et nous le munirons de la topologie de la convergence simple normique. Nous munirons $\mathcal{U}(H)$ de la topologie forte. D'après ([11], lemme 3), la fonction $u \mapsto \tilde{u}$ est continue. Lorsque la dimension de H est finie, les groupes $\mathcal{U}(H)$ et $\mathcal{PU}(H)$ sont compacts.

Nous noterons $\dim H$ la dimension hilbertienne de H et Tr la trace canonique sur $\mathcal{L}(H)$. Soient $a \in \mathcal{L}(H)$ et $a(H)$ l'image de a ; nous poserons $\operatorname{rg} a = \dim \overline{a(H)}$

Soit x un vecteur de norme 1 appartenant à H ; nous noterons P_x le projecteur $y \mapsto \langle x|y\rangle x$ de H sur $\mathbb{C}x$.

0.8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous désignerons par $M_n(\mathbb{C})$ la C^*-algèbre des matrices sur $\mathbb{C}$ à n lignes et n colonnes. Pour tout cardinal p , nous noterons l_p^2 l'espace hilbertien des familles $(\xi_i)_{i\in N(p)}$ de nombres complexes telles que $\sum_{i\in N(p)} |\xi_i|^2 < +\infty$.

0.9. Soit A une C^*-algèbre. L'ensemble des classes des représentations irréductibles non nulles de A , muni de la topologie de Jacobson, sera noté $\hat{A}$ et appelé spectre de A ([16], § 3.1). Le spectre de toute C^*-algèbre canoniquement isomorphe à un idéal bilatère fermé de A sera identifié à un ouvert de $\hat{A}$, et le spectre de toute C^*-algèbre canoniquement isomorphe à une C^*-algèbre quotient de A sera identifié à un fermé de $\hat{A}$ ([16], prop. 3.2.2). Soit t une représentation de A ; nous noterons souvent $A(t)$ l'image de A par t et, pour tout $a \in A$, l'image de a par t sera souvent notée $a(t)$. D'après ce qui précède, $A(t)\hat{}$ sera identifié à un fermé de $\hat{A}$.

Soit $a \in A$; nous considérerons souvent a comme un champ d'opérateurs sur $\hat{A}$, la valeur de a en $t \in \hat{A}$ étant $a(t)$. Remarquons que cette valeur n'est définie qu'à équivalence unitaire près.

0.10. Pour tout espace vectoriel ordonné V , nous noterons V^+ le cône de ses éléments ≥ 0 .

Soit A une C^*-algèbre. Nous dirons qu'un idéal bilatère (ou qu'une sous-C^*-algèbre) B de A est facial(e) si $B^+ = B \cap A^+$ est une face de A^+ et si le sous-espace vectoriel de A engendré par B^+ est égal à B ([4], déf. 1.1). Nous noterons $\mathcal{K}(A)$ le plus petit idéal bilatère facial de A qui soit dense dans A et nous l'appellerons idéal de Pedersen de A ([29], th. 1.3). Il résulte immédiatement de la définition de $\mathcal{K}(A)$ que, pour tout $a \in \mathcal{K}(A)$, l'ensemble $\{t \in \hat{A} \mid a(t) \neq 0\}$ est contenu dans une partie quasi-compacte de $\hat{A}$. Soit $a \in \mathcal{K}(A)$; d'après ([31], prop. 4) la sous-C^*-algèbre de A engendrée par a est contenue dans $\mathcal{K}(A)$. En particulier, pour tout $a \in \mathcal{K}(A)$ et toute fonction complexe continue f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$, on a $f(a) \in \mathcal{K}(A)$. D'après la définition de $\mathcal{K}(A)$ ([29], p. 133), tout projecteur de A appartient à $\mathcal{K}(A)$; d'autre part, pour tout $a \in A^+$ et toute fonction complexe continue f définie sur $\mathbb{R}$ et nulle au voisinage de 0 , on a $f(a) \in \mathcal{K}(A)$.

Si A est une C^*-algèbre commutative de spectre X, alors $\mathcal{K}(A)$ n'est autre que l'ensemble des fonctions complexes continues à support compact définies sur X, et sera aussi noté $\mathcal{K}(X)$.

0.11. Soient A une C^*-algèbre et Γ une trace définie sur A^+. Posons $I^+ = \{a \in A^+ \mid \Gamma(a) < +\infty\}$. D'après ([16], prop. 6.12), I^+ est la partie positive d'un idéal bilatère facial I de A et il existe une forme linéaire unique sur I qui coïncide avec Γ sur I^+ ; cette forme linéaire sera toujours notée comme la trace qui a servi à la définir. Nous dirons que I est l'idéal de définition de Γ. Nous noterons $\mathcal{T}(A)$ l'ensemble des traces semi-continues inférieurement (s.c.i.) sur A^+ à idéal de définition dense dans A (nous dirons aussi densément définies). D'après 0.10, l'idéal de définition de tout élément de $\mathcal{T}(A)$ contient $\mathcal{K}(A)$. Nous munirons $\mathcal{T}(A)$ de la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{K}(A)^+$ ([32], § 1.3 et 1.4).

0.12. Soit X un espace localement compact. Nous noterons $\mathcal{M}(X)$ l'ensemble des mesures de Radon positives sur X et nous munirons $\mathcal{M}(X)$ de la topologie vague. Soit A une C^*-algèbre à trace continue de spectre X. D'après ([12], th. 1), pour tout $\Gamma \in \mathcal{T}(A)$ il existe ν_Γ unique appartenant à $\mathcal{M}(X)$ tel que, pour tout $a \in \mathcal{K}(A)^+$, on ait

$$\Gamma(a) = \int_X \mathrm{Tr}\, a(x).d\nu_\Gamma(x) \quad ,$$

et l'application $\Gamma \mapsto \nu_\Gamma$ est une bijection de $\mathcal{T}(A)$ sur $\mathcal{M}(X)$ (voir aussi ([32], corol. 2.4)). De plus, on s'assure facilement que cette bijection est un homéomorphisme de $\mathcal{T}(A)$ sur $\mathcal{M}(X)$.

0.13. Soient A et C deux C^*-algèbres. Nous appelons extension de A par C une suite exacte $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ de C^*-algèbres. Nous disons que deux extensions

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \longrightarrow A \longrightarrow B' \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

sont équivalentes s'il existe un isomorphisme β de B sur B' tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & B \arrow[dd, "\beta"'] \arrow[dr] & & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[ur] \arrow[dr] & & C \arrow[r] & 0 \\ & & B' \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Dans la suite nous dirons "extension" pour "classe d'équivalence d'extension", et la classe de la suite exacte

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

sera notée plus brièvement B ([3], déf. 4.1). Nous noterons $\mathrm{Ext}(A,C)$ l'ensemble des extensions de A par C.

Nous dirons que deux extensions B et B' de A par C sont faiblement équivalentes s'il existe des automorphismes α et δ de A et C respectivement et un isomorphisme β de B sur B' tels que le diagramme suivant soit commutatif ([3], § 5) :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \delta\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

0.14. Soient A et C deux C^*-algèbres. Dans [3] R.C. Busby a associé à A une C^*-algèbre fondamentale pour l'étude de $\mathrm{Ext}(A,C)$. Nous notons $M(A)$ (comme dans [3]) cette C^*-algèbre et nous renvoyons à ([3], § 2) pour sa définition. D'après ([3], prop. 3.1) A s'identifie canoniquement à un idéal bilatère fermé de $M(A)$, et nous notons Π (Π_A s'il y a ambiguïté) la surjection canonique de $M(A)$ sur $M(A)/A$. Le résultat fondamental de [3] est le suivant ([3], th. 4.3) : l'ensemble $\mathrm{Hom}(C,M(A)/A)$ des homomorphismes de C dans $M(A)/A$ est en bijection canonique avec $\mathrm{Ext}(A,C)$. Plus précisément, cette bijection fait correspondre à $\gamma \in \mathrm{Hom}(C,M(A)/A)$ l'extension

$$B = \{(m,c) \in M(A) \times C \mid \Pi(m) = \gamma(c)\} \quad .$$

Nous dirons que B est associée à γ et que γ est associé à B . Remarquons que $\hat{A}$ s'identifie à un ouvert de $\hat{B}$ et à un ouvert de $M(A)^\wedge$. En particulier, si $b = (m,c)$ appartient à B , on a $b(t) = m(t)$ pour tout $t \in \hat{A}$ (et évidemment $b(t) = c(t)$ pour tout $t \in \hat{C}$). Lorsqu'un élément de B sera écrit (m,c) on sous-entendra que $m \in M(A)$, que $c \in C$ et que $\Pi(m) = \gamma(c)$.

0.15. Soient A une C^*-algèbre et α un automorphisme de A . Alors d'après ([3], prop. 3.8) il existe un automorphisme unique $\bar{\alpha}$ de $M(A)$ et un automorphisme unique $\bar{\bar{\alpha}}$ de $M(A)/A$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & M(A) & \longrightarrow & M(A)/A & \longrightarrow & 0 \\ & & \alpha\downarrow & & \bar{\alpha}\downarrow & & \bar{\bar{\alpha}}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & M(A) & \longrightarrow & M(A)/A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

soit commutatif

CHAPITRE I

Limites et valeurs d'adhérence d'un filtre sur le spectre d'une C^*-algèbre

I.1. Norme et topologie sur le spectre d'une C^*-algèbre.

Dans le paragraphe I.1, nous entendrons par représentation d'une C^*-algèbre A un homomorphisme de A dans une C^*-algèbre quelconque.

I.1.1. DEFINITION. Soient A une C^*-algèbre, ω une partie de $\hat{A}$ et $a \in A$. On dira que a est porté par ω si l'ensemble

$$\{x \in \hat{A} \mid a(x) \neq 0\}$$

est contenu dans ω.

I.1.2. PROPOSITION. Soient A une C^*-algèbre, T un ensemble de représentations de A et Θ un filtre sur T. Notons f l'application de T dans $\mathcal{F}(\hat{A})$ définie par $f(t) = A(t)^\wedge$ pour tout $t \in T$.

(i) Un fermé F de $\hat{A}$ est limite de f suivant Θ dans $\mathcal{F}(\hat{A})$ muni de la topologie sousfellienne si et seulement si on a

$$\sup_{x \in F} \|a(x)\| \leqslant \liminf_{t,\Theta} \|a(t)\|$$

pour tout $a \in A$.

(ii) Soit F l'ensemble des $x \in \hat{A}$ tels que, pour tout voisinage ω de x, il existe $a \in A$ porté par ω pour lequel $\liminf_{t,\Theta} \|a(t)\| \neq 0$. Alors F est le plus grand élément de l'ensemble des fermés de $\hat{A}$ qui sont limites de f suivant Θ dans $\mathcal{F}(\hat{A})$ muni de la topologie sousfellienne.

DEMONSTRATION DE (i). Supposons que

$$\sup_{x \in F} \|a(x)\| \leqslant \liminf_{t,\Theta} \|a(t)\|$$

pour tout $a \in A$. Soit ω un ouvert de $\hat{A}$ tel que $\omega \cap F \neq \emptyset$. Il existe $a \in A$, porté par ω, tel que $\sup_{x \in F} \|a(x)\| \neq 0$ et donc $\liminf_{t,\Theta} \|a(t)\| \neq 0$. Ceci entraîne que $a(t)$ est non nul pour tout t appartenant à un élément V de Θ et donc que $A(t)^\wedge \cap \omega \neq \emptyset$ si $t \in V$.

Supposons maintenant que F est limite de f suivant Θ dans $\mathcal{F}(\hat{A})$ muni de la topologie sousfellienne. Soit $a \in A$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\sup_{x \in F} \|a(x)\| > \lambda$, et $\omega = \{x \in \hat{A} \mid \|a(x)\| > \lambda\}$ On a évidemment $\omega \cap F \neq \emptyset$ et donc il existe $V \in \Theta$ tel que $f(V) \subset \{F' \in \mathcal{F}(\hat{A}) \mid F' \cap \omega \neq \emptyset\}$. Si $t \in V$ on a $\|a(t)\| = \sup_{x \in f(t)} \|a(x)\| > \lambda$ d'où $\liminf_{t,\Theta} \|a(t)\| \geqslant \lambda$.

Ceci entraîne que $\sup_{x\in F} \|a(x)\| \leqslant \liminf_{t,\Theta} \|a(t)\|$.

DEMONSTRATION DE (ii). Soit ω un ouvert de $\hat{A}$ tel que $\omega \cap F \neq \emptyset$. Il existe a porté par ω tel que $\liminf_{t,\Theta} \|a(t)\| \neq 0$. On en déduit l'existence de $V \in \Theta$ tel que $A(t)^\wedge \cap \omega \neq \emptyset$ si $t \in \omega$, ce qui prouve que F est une limite de f suivant Θ dans $\mathcal{F}(\hat{A})$ muni de la topologie sous-fellienne. Supposons l'existence d'une limite F' telle que $F' \not\subset F$. Soient $x' \in F' - F$ et ω un voisinage de x' . Prenons $a \in A$ porté par ω tel que $a(x') \neq 0$. D'après (i), on a

$$\liminf_{t,\Theta} \|a(t)\| \geqslant \sup_{x\in F'} \|a(x)\| \geqslant \|a(x')\| \neq 0 .$$

Alors x' appartient à F , ce qui est absurde.

I.1.3. PROPOSITION. <u>On conserve les notations de la proposition</u> I.1.2.

(i) <u>Un fermé</u> F <u>de</u> $\hat{A}$ <u>est limite de</u> f <u>suivant</u> Θ <u>dans</u> $\mathcal{F}(\hat{A})$ <u>muni de la topologie surfellienne si et seulement si on a</u>

$$\sup_{x\in F} \|a(x)\| \geqslant \limsup_{t,\Theta} \|a(t)\|$$

<u>pour tout</u> $a \in A$.

(ii) <u>Soit</u> F <u>l'ensemble des</u> $x \in \hat{A}$ <u>tels que, pour tout voisinage</u> ω <u>de</u> x , <u>il existe</u> $a \in A$ <u>porté par</u> ω <u>pour lequel</u> $\limsup_{t,\Theta} \|a(t)\| \neq 0$. <u>Alors</u> F <u>est le plus petit élément de l'ensemble des fermés de</u> $\hat{A}$ <u>qui sont limites de</u> f <u>suivant</u> Θ <u>dans</u> $\mathcal{F}(\hat{A})$ <u>muni de la topologie surfellienne</u>.

DEMONSTRATION DE (i). Supposons que $\sup_{x\in F} \|a(x)\| \geqslant \limsup_{t,\Theta} \|a(t)\|$ pour tout $a \in A$. Soit K une partie quasi-compacte de $\hat{A}$ telle que $K \cap F = \emptyset$ et montrons l'existence de $V \in \Theta$ tel que

$$f(V) \subset \{F' \in \mathcal{F}(\hat{A}) \mid F' \cap K = \emptyset\} .$$

Supposons au contraire que, pour tout $V \in \Theta$, il existe $t_V \in V$ tel que $f(t_V) \cap K \neq \emptyset$. Choisissons $x_V \in f(t_V) \cap K$ et soit $x_0 \in K$ une valeur d'adhérence de la famille $(x_V)_{V\in\Theta}$ suivant Θ . Puisque $x_0 \notin F$, il existe $a \in A$ tel que $\|a(x_0)\| = 1$ et $\sup_{x\in F} \|a(x)\| = 0$, d'où $\limsup_{t,\Theta} \|a(t)\| = 0$. Il existe alors $V_1 \in \Theta$ tel que $\|a(t)\| < 1/2$ si $t \in V_1$. D'autre part, il existe $V_2 \in \Theta$, contenu dans V_1 , tel que x_{V_2} appartienne au voisinage $\{x \in \hat{A} \mid \|a(x)\| > 1/2\}$ de x_0 . Ceci est absurde puisqu'on a $\|a(t_{V_2})\| \geqslant \|a(x_{V_2})\|$.

Supposons maintenant que F est limite de f suivant Θ dans $\mathcal{F}(\hat{A})$ muni de la topologie surfellienne. Soient $a \in A$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda > \sup_{x\in F} \|a(x)\|$. Appelons K l'ensemble quasi-compact

$$\{x \in \hat{A} \mid \|a(x)\| \geqslant \lambda\} .$$

On a $F \cap K = \emptyset$ et donc il existe $V \in \Theta$ tel que

$$f(V) \subset \{F' \in \mathcal{F}(\hat{A}) \mid F' \cap K = \emptyset\} \ .$$

Or, si $f(t) \cap K = \emptyset$, on a $\|a(x)\| < \lambda$ pour tout $x \in f(t)$ et donc $\|a(t)\| < \lambda$. Il en résulte que $\sup_{t \in V} \|a(t)\| \leq \lambda$, d'où

$$\lim \sup_{t,\Theta} \|a(t)\| \leq \lambda \ .$$

Ceci entraîne que $\lim \sup_{t,\Theta} \|a(t)\| \leq \sup_{x \in F} \|a(x)\|$.

DEMONSTRATION DE (ii). Montrons que F est limite de f suivant Θ dans $\mathcal{F}(\hat{A})$ muni de la topologie surfellienne. Soit K une partie quasi-compacte de $\hat{A}$ telle que $K \cap F = \emptyset$. Supposons que pour tout $V \in \Theta$ il existe $t_V \in V$ tel que $f(t_V) \cap K \neq \emptyset$. Prenons $x_V \in f(t_V) \cap K$ et soit $x_0 \in K$ une valeur d'adhérence de $(x_V)_{V \in \Theta}$. Il existe alors $a \in A$ tel que $\|a(x_0)\| = 1$ et $\lim \sup_{t,\Theta} \|a(t)\| = 0$, car $x_0 \notin F$. On termine comme dans la démonstration de (i) pour obtenir une contradiction.

Supposons l'existence d'une limite F' de f suivant Θ dans $\mathcal{F}(\hat{A})$ muni de la topologie surfellienne, telle que $F' \not\supset F$. Soient $x' \in F - F'$ et ω un voisinage de x' tel que $\omega \cap F' = \emptyset$. Pour tout $a \in A$, porté par ω , on a

$$0 = \sup_{x \in F'} \|a(x)\| \geq \lim \sup_{t,\Theta} \|a(t)\| \ ,$$

ce qui est absurde puisque $x' \in F$.

I.1.4. COROLLAIRE. <u>On conserve les notations de la proposition I.1.2. Un fermé F de $\hat{A}$ est limite de f suivant Θ dans $\mathcal{F}(\hat{A})$ muni de la topologie fellienne si et seulement si on a</u>

$$\sup_{x \in F} \|a(x)\| = \lim_{t,\Theta} \|a(t)\|$$

<u>pour tout</u> $a \in A$.

Cela résulte des propositions I.1.2 et I.1.3.

I.1.5. COROLLAIRE. <u>Soient A une C^*-algèbre et T un ensemble de représentations de A , muni d'une topologie. Appelons f la fonction de T dans $\mathcal{F}(\hat{A})$ telle que $f(t) = A(t)^\wedge$ pour tout $t \in T$. Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) f <u>est s.c.i. (resp. s.c.s., resp. continue) de T dans $\mathcal{F}(\hat{A})$</u> ;

(ii) <u>pour tout $a \in A$, la fonction $t \longmapsto \|a(t)\|$ est s.c.i. (resp. s.c.s., resp. continue)</u>.

Démontrons le corollaire dans le cas de la semi-continuité inférieure. Soit $t_0 \in T$. D'après la proposition I.1.2, $f(t_0)$ est une limite, lorsque t tend vers t_0 , de f dans $\mathcal{F}(\hat{A})$ muni de la topologie sous-fellienne si et seulement si on a

$$\sup_{x \in f(t_0)} \|a(x)\| \leq \lim \inf_{t \to t_0} \|a(t)\|$$

pour tout $a \in A$, c'est-à-dire si et seulement si on a

$$\|a(t_o)\| \leqslant \liminf_{t\to t_o} \|a(t)\|$$

pour tout $a \in A$.

I.1.6. Soient A une C^*-algèbre et $a \in A$. On note $Sp'a$ le spectre de a dans la C^*-algèbre déduite de A par adjonction d'une unité.

COROLLAIRE. Soient A une C^*-algèbre, T un ensemble de représentations de A et Θ un filtre sur T . Soient F un fermé de $\hat{A}$ et a un élément hermitien de A tels que, pour toute fonction continue φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ nulle en 0 , on ait $\lim_{t,\Theta} \|\varphi(a)(t)\| = \sup_{x\in F} \|\varphi(a)(x)\|$. Appelons I l'idéal bilatère fermé de A tel que $(A/I)^\wedge = F$, et s la surjection canonique de A sur A/I . Alors on a $\lim_{t,\Theta} Sp'a(t) = Sp's(a)$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ muni de la topologie fellienne.

Soit C la C^*-algèbre commutative engendrée par a . Pour tout $c \in C$ on $\lim_{t,\Theta} \|c(t)\| = \|s(c)\| = \sup_{x\in s(C)^\wedge}\|c(x)\|$. Il résulte alors de I.1.4 que $\lim_{t,\Theta} C(t)^\wedge = s(C)^\wedge$ dans $\mathcal{F}(\hat{C})$ muni de la topologie fellienne. D'autre part $Sp'a = \hat{C}\cup\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$, et donc la topologie fellienne de $\mathcal{F}(\hat{C}\cup\{0\})$ est induite par la topologie fellienne de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. Il en résulte facilement qu'on a $\lim_{t,\Theta} C(t)^\wedge\cup\{0\} = s(C)^\wedge\cup\{0\}$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ muni de la topologie fellienne, c'est-à-dire que $\lim_{t,\Theta} Sp'a(t) = Sp's(a)$.

I.1.7. LEMME. Soient T un espace localement quasi-compact et Θ un filtre sur T . Notons g l'application de T dans $\mathcal{F}(T)$ telle que $g(t) = \overline{\{t\}}$ pour tout $t \in T$.

(i) L'ensemble fermé F_o des limites de Θ est le plus grand élément de l'ensemble des limites de g suivant Θ dans $\mathcal{F}(T)$ muni de la topologie sousfellienne.

(ii) L'ensemble fermé F_1 des valeurs d'adhérence de Θ est le plus petit élément de l'ensemble des limites de g suivant Θ dans $\mathcal{F}(T)$ muni de la topologie surfellienne.

La démonstration ne présente pas de difficulté. Nous nous contenterons de prouver (ii). Prenons une partie quasi-compacte K de T telle que $K\cap F_1 = \emptyset$. Pour tout $t \in K$ il existe un voisinage ouvert ω_t de t et un élément V_t de Θ tels que $\omega_t \cap V_t = \emptyset$. Grâce à la quasi-compacité de K , on peut trouver un ouvert ω contenant K et un élément $V\in\Theta$ tels que $\omega\cap V = \emptyset$. Alors, si $t \in V$, on a $g(t)\cap\omega = \emptyset$, d'où

$$g(V) \subset \{F\in\mathcal{F}(T) \mid F\cap K = \emptyset\} .$$

Soit maintenant F une limite de g suivant Θ dans $\mathcal{F}(T)$ muni de la topologie surfellienne et montrons que $F_1\subset F$. Soient $t\in T - F$, et K un voisinage quasi-compact de t tel que $K\cap F = \emptyset$. Il existe $V\in\Theta$ tel que $g(V) \subset \{F'\in\mathcal{F}(T) \mid F'\cap K = \emptyset\}$, d'où $V\cap K = \emptyset$. Ainsi t n'est pas valeur d'adhérence de Θ .

I.1.8. Soit A une C^*-algèbre. Remarquons que pour tout $t \in \hat{A}$, le fermé $A(t)^\wedge$ est l'adhérence de t dans $\hat{A}$. On déduit alors immédiatement des résultats précédents les corollaires connus suivants ([18], § II.9).

COROLLAIRE a). Soient A une C^*-algèbre et Θ un filtre sur $\hat{A}$.

(i) Une partie F de $\hat{A}$ est contenue dans l'ensemble des limites de Θ si et seulement si on a $\sup_{t\in F} \|a(t)\| \leqslant \liminf_{t,\Theta} \|a(t)\|$ pour tout $a \in A$. L'ensemble des limites de Θ est l'ensemble des $x \in \hat{A}$ tels que, pour tout voisinage ω de x, il existe $a \in A$ porté par ω pour lequel $\liminf_{t,\Theta} \|a(t)\| \neq 0$.

(ii) Un fermé F de $\hat{A}$ contient l'ensemble des valeurs d'adhérence de Θ si et seulement si on a $\sup_{t\in F} \|a(t)\| \geqslant \limsup_{t,\Theta} \|a(t)\|$ pour tout $a \in A$. L'ensemble des valeurs d'adhérence de Θ est l'ensemble des $x \in \hat{A}$ tels que, pour tout voisinage ω de x, il existe $a \in A$ porté par ω pour lequel $\limsup_{t,\Theta} \|a(t)\| \neq 0$.

COROLLAIRE b). Soient A une C^*-algèbre et Θ un filtre sur $\hat{A}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Θ converge vers chacune de ses valeurs d'adhérence;

(ii) pour tout $a \in A$, la fonction $t \longmapsto \|a(t)\|$ a une limite suivant Θ ;

(iii) $t \longmapsto A(t)^\wedge$ a une limite F suivant Θ dans $\mathcal{F}(\hat{A})$ muni de la topologie fellienne.

Supposons (iii) vérifiée. Alors F est l'ensemble des limites de Θ et on a $\lim_{t,\Theta} \|a(t)\| = \sup_{t\in F} \|a(t)\|$ pour tout $a \in A$.

I.2. Trace et topologie sur le spectre d'une C^*-algèbre.

A partir de maintenant nous entendrons, comme d'habitude, par représentation d'une C^*-algèbre une représentation dans un espace hilbertien.

I.2.1. DEFINITIONS. Soient A une C^*-algèbre, T un ensemble de représentations de A et Θ un filtre sur T. Soit φ une fonction définie sur un élément de Θ à valeurs dans $]0,+\infty[$. Nous dirons qu'un élément a de A est φ-encadré suivant Θ s'il existe $V \in \Theta$ tel que $\sup_{t\in V} \varphi(t).\mathrm{rg}\, a(t) < +\infty$. Nous dirons simplement que a est encadré suivant Θ si a est φ-encadré suivant Θ avec $\varphi = 1$.

L'ensemble des éléments de A qui sont φ-encadrés suivant Θ est un idéal bilatère facial de A que nous noterons E^φ (ou $E^\varphi(A,\Theta)$ en cas d'ambiguïté). L'ensemble des $a \in A$ tels que $\lim_{t,\Theta} \varphi(t).\mathrm{rg}\, a(t) = 0$ est aussi un idéal bilatère facial de A qui sera noté Z^φ (ou $Z^\varphi(A,\Theta)$). Remarquons que nous avons $Z^\varphi \subset E^\varphi$ et $E^\varphi = (E^\varphi)^2$.

Nous dirons que A est φ-encadrée suivant Θ si E^{φ} est dense dans A. Nous dirons simplement que A est encadrée suivant Θ si A est φ-encadrée suivant Θ avec $\varphi = 1$.

I.2.2. DEFINITIONS. Soient A une C^*-algèbre et T un ensemble de représentations de A. Nous dirons qu'un élément a de A est encadré sur T si $\sup_{t \in T} \operatorname{rg} a(t) < +\infty$. Nous dirons que A est encadrée sur T si l'idéal bilatère facial des éléments de A qui sont encadrés sur T est dense dans A.

Nous dirons qu'une C^*-algèbre A est uniformément liminaire si elle est encadrée sur $\hat{A}$.

Cette dernière notion a été introduite par J.M.G. Fell dans une rédaction non publiée (voir aussi [32], §2.1). Remarquons qu'une C^*-algèbre uniformément liminaire est liminaire. Toute C^*-algèbre à trace continue est uniformément liminaire (III.3.1). D'autre part, d'après ([18], lemme 3.4) la C^*-algèbre d'un groupe de Lie réel connexe semi-simple linéaire est uniformément liminaire.

I.2.3. DEFINITION. Soient A une C^*-algèbre et Γ une trace sur A^+. Nous appellerons support de Γ et nous noterons $\operatorname{Supp} \Gamma$ (ou $\operatorname{Supp}_A \Gamma$) l'ensemble fermé des $x \in \hat{A}$ tels que, pour tout voisinage ω de x, il existe $a \in A^+$ porté par ω pour lequel on ait $\Gamma(a) > 0$.

I.2.4. LEMME. Soient A une C^*-algèbre, Γ une trace s.c.i. sur A^+ et $\omega = \hat{A} - \operatorname{Supp} \Gamma$. Pour tout $a \in A^+$ porté par ω on a $\Gamma(a) = 0$.

Pour tout $x \in \omega$, il existe un voisinage ouvert V_x de x, contenu dans ω, tel que, pour $a \in A^+$ porté par V_x, on ait $\Gamma(a) = 0$. Appelons I (resp. I_x) l'idéal bilatère fermé de A tel que $\hat{I} = \omega$ (resp. $\hat{I}_x = V_x$). Alors $\sum_{x \in \omega} I_x$ est un idéal bilatère autoadjoint dense dans I et, pour $a \in A^+ \cap (\sum_{x \in \omega} I_x)$, on a $\Gamma(a) = 0$. Comme Γ est s.c.i., on a donc $\Gamma(a) = 0$ pour tout $a \in I^+$.

I.2.5. PROPOSITION. Soient A une C^*-algèbre, T un ensemble de représentations de A et Θ un filtre sur T. Soient φ une fonction définie sur un élément de Θ à valeurs dans $]0, +\infty[$, et D une sous-algèbre involutive de E^{φ} telle que :

(i) D est dense dans A ;

(ii) pour tout $a \in D$, la fonction $t \longmapsto \varphi(t).\operatorname{Tr} a(t)$ a une limite suivant Θ.

Il existe une et une seule trace s.c.i. Γ sur A^+ telle que l'idéal de définition de Γ contienne D et telle que :

$$\lim_{t,\Theta} \varphi(t).\mathrm{Tr}\, a(t) = \Gamma(a)$$

pour tout $a \in D$. De plus, E^{φ} est contenu dans l'idéal de définition de Γ et, pour tout $a \in E^{\varphi}$, on a $\lim_{t,\Theta} \varphi(t).\mathrm{Tr}\, a(t) = \Gamma(a)$.

L'unicité d'une telle trace résulte évidemment de ([16], lemme 6.5.3 et proposition 6.4.5).

Soit Θ' un ultrafiltre sur T , plus fin que Θ . Pour tout $a \in E^{\varphi}$, la fonction $t \longmapsto \varphi(t).\mathrm{Tr}\, a(t)$ est bornée en valeur absolue sur un élément de Θ ; posons $\Lambda'(a) = \lim_{t,\Theta'} \varphi(t).\mathrm{Tr}\, a(t)$. Appelons s la fonction définie sur $E^{\varphi} \times E^{\varphi}$ par $s(a,b) = \Lambda'(ab^*)$. C'est évidemment une forme sesquilinéaire hermitienne positive. Pour tous $b,c \in E^{\varphi}$ et tout $a \in A$ on a

$$\begin{aligned} s(ab,c) &= \lim_{t,\Theta'} \varphi(t).\mathrm{Tr}\, a(t)b(t)c(t)^* \\ &= \lim_{t,\Theta'} \varphi(t).\mathrm{Tr}\, b(t)c(t)^*a(t) = s(b,a^*c) . \end{aligned}$$

De même, pour tous $a, b \in E^{\varphi}$, on a $s(a,b) = s(b^*,a^*)$; pour tout $a \in A$ et tout $b \in E^{\varphi}$ on a $s(ab,ab) \leq \|a\|^2 s(b,b)$. Ainsi s satisfait aux axiomes (i), (ii), (iii), (iv) de ([16], déf. 6.2.1) (avec $\mathfrak{n} = E^{\varphi}$). En utilisant ces axiomes et l'égalité $E^{\varphi} = (E^{\varphi})^2$ on prouve, comme dans ([16], 6.4.2), l'existence d'une trace Γ' sur A^+ , s.c.i. et densément définie, telle que $\Gamma'(aa^*) = s(a,a)$ pour tout $a \in E^{\varphi}$. De plus une telle trace est unique. Montrons maintenant que Γ' ne dépend pas de Θ' . Soient Θ'' un autre ultrafiltre plus fin que Θ , et Γ'' la trace s.c.i. sur A^+, densément définie, construite (comme précédemment) à partir de Θ''. Les idéaux de définition de Γ' et Γ'' contiennent E^{φ}, et on a $\overline{\Gamma'|D} = \Gamma''|D$. Il résulte alors de ([16], lemme 6.5.3 et prop. 6.4.5) que $\Gamma' = \Gamma''$. Ainsi pour tout $a \in E^{\varphi}$ on a $\lim_{t,\Theta} \varphi(t).\mathrm{Tr}\, a(t) = \Gamma'(a)$. Ceci achève la démonstration de la proposition.

I.2.6. Pour tout $\varepsilon > 0$, nous noterons g_ε la fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty[$ définie comme suit :

$g_\varepsilon(t) = 0$ si $t \leq \varepsilon$; $g_\varepsilon(t) = t$ si $t \geq 2\varepsilon$; g linéaire sur $[\varepsilon, 2\varepsilon]$.

Conservons les notations de I.2.1 et, pour tout $a \in \mathcal{K}(A)^+$, supposons que $t \longmapsto \varphi(t).\mathrm{Tr}\, a(t)$ ait une limite finie. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t \in T$, on a $\varepsilon.\mathrm{rg}\, g_\varepsilon(a)(t) \leq \mathrm{Tr}\, a(t)$. Il en résulte que $g_\varepsilon(a) \in E^{\varphi}$ pour tout $a \in \mathcal{K}(A)^+$ et tout $\varepsilon > 0$. Comme on a $\|g_\varepsilon(a) - a\| \leq \varepsilon$, on en déduit que E^{φ} est dense dans A (voir aussi ([32], lemme 2.2)). On a donc $\mathcal{K}(A) \subset E^{\varphi}$ et on peut alors appliquer la proposition I.2.5 avec $D = \mathcal{K}(A)$.

I.2.7. Pour que la proposition I.2.5 soit valable, il est essentiel que D soit contenu dans E^{φ} , comme le prouve l'exemple suivant. Prenons $A = \mathcal{C}^{\circ}(]0,1])$. Appelons a_0 l'élément $x \longmapsto x$ de A , et D l'algèbre involutive engendrée par a_0 ; alors D est dense dans A . Soient H un espace hilbertien de dimension $\aleph_0$ et $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base orthonormale de H. A tout entier $n \geqslant 0$ associons la représentation $a \longmapsto \sum_{q=o}^{n} a(\frac{1}{q+1}) Pe_q$ de A et notons-la t_n. Soient $T = \{t_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et Θ le filtre des complémentaires des parties finies de T. Enfin, soit φ la fonction $t_n \longmapsto (\sum_{q=o}^{n} \frac{1}{q+1})^{-1}$. On a $\lim_{t_n,\Theta} \varphi(t_n).\mathrm{rg}\, a_o(t_n) = +\infty$, donc D n'est pas contenu dans E^φ. D'autre part, les éléments de $\mathcal{K}(A)$ sont encadrés suivant Θ ; il en résulte que $\mathcal{K}(A) \subset Z^\varphi \subset E^\varphi$ et donc que $\lim_{t_n,\Theta} \varphi(t_n).\mathrm{Tr}\, a(t_n) = 0$ pour tout $a \in \mathcal{K}(A)$. La seule trace s.c.i. Γ sur A^+ telle que $\lim_{t_n,\Theta} \varphi(t_n).\mathrm{Tr}\, a(t_n) = \Gamma(a)$ pour tout $a \in E^\varphi$ est donc la trace nulle. On a $\lim_{t_n,\Theta} \varphi(t_n).\mathrm{Tr}\, a_o(t_n) = 1 \neq 0 = \Gamma(a_o)$.

I.2.8. PROPOSITION. <u>On conserve les notations de la proposition</u> I.2.5. <u>Soit</u> F <u>le support de</u> Γ. <u>Alors, pour tout</u> $a \in A$ <u>on a</u>

$$\sup_{x\in F} \|a(x)\| \leqslant \liminf_{t,\Theta} \|a(t)\| .$$

D'après la proposition I.1.2 (i), il suffit de montrer que F est une limite suivant Θ de $t \longmapsto A(t)^\wedge$ dans $\mathcal{F}(\hat{A})$ muni de la topologie sousfellienne. Soit ω un ouvert de $\hat{A}$ tel que $\omega \cap F \neq \emptyset$. Prenons $a \in E^\varphi$, porté par ω, tel que $\Gamma(a) \neq 0$. Comme $\Gamma(a) = \lim_{t,\Theta} \varphi(t).\mathrm{Tr}\, a(t)$ il existe $V \in \Theta$ tel que $\mathrm{Tr}\, a(t) \neq 0$ sur V. On a évidemment $a(t) \neq 0$ si $t \in V$, et donc $A(t)^\wedge \cap \omega \neq \emptyset$.

I.2.9. LEMME. <u>Soient</u> H <u>un espace hilbertien</u>, $n \in \mathbb{N}$ <u>et</u> $a \in \mathcal{L}(H)$ <u>tels que</u> $\mathrm{rg}\, a \leqslant n$. <u>Soient</u> $\alpha > 0$ <u>et</u> b <u>un opérateur hermitien tels que</u> $\|a - b\| < \alpha$. <u>Alors</u> $\mathrm{Sp}'b \cap]\alpha, +\infty[$ <u>possède au plus</u> n <u>points, multiplicités comprises</u>.

Supposons que b ne vérifie pas la condition énoncée. Alors on peut construire $n+1$ vecteurs unitaires $x_1,\ldots,x_{n+1}$ appartenant à H deux à deux orthogonaux ainsi que les vecteurs $bx_1,\ldots,bx_{n+1}$, tels que $\|bx_i\| > \alpha$ pour $i = 1,\ldots n+1$. Montrons que les vecteurs $ax_1,\ldots,ax_{n+1}$ sont indépendants. Sinon il existe des nombres complexes $\mu_1,\ldots,\mu_{n+1}$ tels que $\sum_1^{n+1} |\mu_i|^2 = 1$ et $\sum_1^{n+1} \mu_i a x_i = 0$. On a alors d'une part

$$(b - a)(\sum_1^{n+1} \mu_i x_i) = \sum_1^{n+1} \mu_i b x_i ,$$

d'où

$$\|(b - a)(\sum_1^{n+1} \mu_i x_i)\|^2 = \sum_1^{n+1} \|\mu_i b x_i\|^2 > \alpha^2,$$

et d'autre part $\|(b - a)(\sum_1^{n+1} \mu_i x_i)\| \leqslant \alpha$, ce qui est absurde. On en déduit $\mathrm{rg}\, a \geqslant n+1$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

I.2.10. LEMME. Soient A une C^*-algèbre, T un ensemble de représentations de A et Θ un filtre sur T. Soit φ une fonction définie sur un élément de Θ à valeurs dans $]0,+\infty[$. Pour tout $b \in (\overline{E^\varphi})^+$ (resp. $(\overline{Z^\varphi})^+$) et tout $\varepsilon > 0$, on a $g_\varepsilon(b) \in E^\varphi$ (resp. Z^φ).

Démontrons le lemme en supposant $b \in (\overline{E^\varphi})^+$. Soit $\varepsilon > 0$, et prenons $a \in E^\varphi$ tel que $\|a - b\| \leqslant \varepsilon$. D'après le lemme I.2.9, il existe $V \in \Theta$ tel que, pour tout $t \in V$, l'ensemble $(\mathrm{Sp}'b(t)) \cap]\varepsilon,+\infty[$ possède au plus $\mathrm{rg}\, a(t)$ points, multiplicités comprises. Il en résulte que $g_\varepsilon(b)$ est φ-encadré suivant Θ.

I.2.11. On démontre de même le résultat suivant. Soient A une C^*-algèbre et T un ensemble de représentations de A. Soit $a \in A^+$, adhérent à l'idéal des éléments de A qui sont encadrés sur T. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, l'élément $g_\varepsilon(a)$ est encadré sur T.

I.2.12. PROPOSITION. On conserve les hypothèses et les notations de la proposition I.2.5. Soit $a \in A^+$. On a $\Gamma(a) = 0$ si et seulement si $a \in \overline{Z^\varphi}$.

Soit $a \in (Z^\varphi)^+$. On a $\Gamma(a) = \lim_{t,\Theta} \varphi(t).\mathrm{Tr}\, a(t) = 0$. Comme Γ est s.c.i., on en déduit que Γ est nulle sur $(\overline{Z^\varphi})^+$.

Soit maintenant $a \in A^+$ tel que $\Gamma(a) = 0$. Supposons que $a \notin \overline{Z^\varphi}$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule fermée de centre a et de rayon ε ne rencontre pas Z^φ. On en déduit que $g_\varepsilon(a) \notin Z^\varphi$, d'où

$$\limsup_{t,\Theta} \varphi(t).\mathrm{rg}\, g_\varepsilon(a)(t) > 0 .$$

D'après le lemme I.2.10, l'élément $g_{\varepsilon/2}(a)$ appartient à E^φ (rappelons que, par hypothèse, on a $\overline{E^\varphi} = A$); d'autre part, pour tout $t \in T$, on a $\mathrm{Tr}\, g_{\varepsilon/2}(a)(t) \geqslant \varepsilon.\mathrm{rg}\, g_\varepsilon(a)(t)$. De tout ceci résulte que

$$\Gamma(g_{\varepsilon/2}(a)) = \lim_{t,\Theta} \varphi(t).\mathrm{Tr}\, g_{\varepsilon/2}(a)(t) \geqslant \varepsilon.\limsup_{t,\Theta}\varphi(t).\mathrm{rg}\, g_\varepsilon(a)(t) > 0$$

d'où $\Gamma(a) \geqslant \Gamma(g_{\varepsilon/2}(a)) > 0$, ce qui est absurde. Donc a appartient à $\overline{Z^\varphi}$.

I.2.13. PROPOSITION. On conserve toujours les hypothèses et les notations de la proposition I.2.5. Soit F le support de Γ. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout $a \in A$ tel que $\lim_{t,\Theta} \varphi(t).\mathrm{rg}\, a(t) = 0$, on a $\lim_{t,\Theta} \|a(t)\| = 0$;

(ii) F est la limite suivant Θ de $t \longmapsto A(t)^\wedge$ dans $\mathcal{F}(\hat{A})$ muni de la topologie fellienne;

(iii) pour tout $a \in A$, on a $\lim_{t,\Theta} \|a(t)\| = \sup_{x \in F} \|a(x)\|$;

(iv) pour tout $a \in A$ et tout filtre Θ' plus fin que Θ tels que

$\lim_{t,\Theta'} \varphi(t).\mathrm{rg}\ a(t) = 0$, on a $\lim_{t,\Theta'} \|a(t)\| = 0$.

D'après le corollaire I.1.4, on a (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) . D'autre part on a évidemment (iv) $\Longrightarrow$ (i) .

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : Supposons que A possède la propriété énoncée dans (i). D'après la proposition I.2.8, F est une limite suivant Θ de $t \longmapsto A(t)^\wedge$ dans $\mathscr{F}(\hat{A})$ muni de la topologie sousfellienne. Montrons que F est aussi une limite de $t \longmapsto A(t)^\wedge$ dans $\mathscr{F}(\hat{A})$ muni de la topologie surfellienne. Soit K une partie quasi-compacte de $\hat{A}$ telle que $K \cap F = \emptyset$ et prouvons l'existence de $V \in \Theta$ tel que $A(t)^\wedge \cap K = \emptyset$ sur V . Sinon, pour tout $V \in \Theta$ il existe $t_V \in V$ tel que $A(t)^\wedge \cap K \neq \emptyset$; prenons $x_V \in A(t_V)^\wedge \cap K$ et soit $x_0 \in K$ une valeur d'adhérence de la famille $(x_V)_{V\in\Theta}$ suivant Θ . Montrons que, pour tout $a \in A$ vérifiant $a(x_0) \neq 0$, on a $\limsup_{t,\Theta} \|a(t)\| \neq 0$. Supposons par exemple que $\|a(x_0)\| = 1$. L'ensemble $\omega = \{x \in \hat{A} \mid \|a(x)\| > 1/2\}$ est un voisinage ouvert de x_0 ; donc pour tout $V \in \Theta$ il existe $W \in \Theta$ contenu dans V tel que $x_W \in \omega$. On a alors $\|a(t_W)\| \geqslant \|a(x_W)\| > 1/2$, d'où $\limsup_{t,\Theta} \|a(t)\| \geqslant 1/2$. Comme $x_0 \notin F$, il existe un voisinage ω_0 de x_0 tel que, pour tout $a \in E^\varphi$ porté par ω_0 , on ait $\lim_{t,\Theta} \varphi(t).\mathrm{Tr}\ a(t) = 0$. Choisissons $a \in (E^\varphi)^+$ porté par ω_0 tel que $\|a(x_0)\| = 1$. Appelons f la fonction continue positive sur $\mathbb{R}$ qui vaut 0 si $x \leqslant 1/2$ et $2x-1$ si $x \geqslant 1/2$. On a $f(a)(x_0) \neq 0$, d'où $\limsup_{t,\Theta} \|f(a)(t)\| > 0$. Il en résulte, par hypothèse, que $\limsup_{t,\Theta} \varphi(t).\mathrm{rg}\ f(a)(t) \neq 0$. Soit maintenant g une fonction continue positive sur $\mathbb{R}$ qui vaut 1 si $x \geqslant 1/2$ et 0 si $x \leqslant 1/4$. On a $\mathrm{Tr}\ g(a)(t) \geqslant \mathrm{rg}\ f(a)(t)$ pour tout $t \in T$, d'où

$$\lim_{t,\Theta} \varphi(t).\mathrm{Tr}\ g(a)(t) \geqslant \limsup_{t,\Theta} \varphi(t).\mathrm{rg}\ f(a)(t) > 0 .$$

Ceci est absurde puisque $g(a)$ appartient à E^φ et est porté par ω_0 . Ainsi il existe $V \in \Theta$ tel que $A(t)^\wedge \cap K = \emptyset$ sur V .

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) : Supposons que A possède la propriété énoncée dans (iii). Soit Θ' un filtre plus fin que Θ et supposons qu'il existe $a \in A$ tel que $\lim_{t,\Theta'} \|a(t)\| \neq 0$ et $\lim_{t,\Theta'} \varphi(t).\mathrm{rg}\ a(t) = 0$. On peut évidemment choisir a hermitien, de sorte que AaA est un idéal bilatère autoadjoint de A . Pour tout $b \in AaA$ on a $\lim_{t,\Theta'} \varphi(t).\mathrm{rg}\ b(t) = 0$, d'où $\lim_{t,\Theta'} \varphi(t).\mathrm{Tr}\ b(t) = 0$ grâce à l'inégalité

$$\mathrm{Tr}\ b(t) \leqslant \|b(t)\|.\mathrm{rg}\ b(t) .$$

Appelons I l'adhérence de AaA dans A . Il résulte de la proposition I.2.5 (appliquée à la C^*-algèbre I , à sa sous-algèbre involutive AaA et au filtre Θ') que $\lim_{t,\Theta'} \varphi(t).\mathrm{Tr}\ b(t) = 0$ pour tout $b \in E^\varphi \cap I$. Remarquons que $\hat{I} \cap F$ n'est pas vide puisqu'on a

$$\sup_{x\in F} \|a(x)\| = \lim_{t,\Theta'} \|a(t)\| \neq 0 .$$

Ainsi tout point de $\hat{I} \cap F$ possède un voisinage, à savoir $\hat{I}$, tel que pour tout $b \in E^{\varphi}$ porté par $\hat{I}$ on ait

$$\Gamma(b) = \lim_{t,\Theta} \varphi(t).\mathrm{Tr}\, b(t) = \lim_{t,\Theta'} \varphi(t).\mathrm{Tr}\, b(t) = 0 .$$

Ceci est absurde puisque F est le support de Γ .

I.2.14. DEFINITION. Soient A une C^*-algèbre, T un ensemble de représentations de A et Θ un filtre sur T . Soit φ une fonction définie sur un élément de Θ à valeurs dans $]0,+\infty[$. Nous dirons que A est bien φ-encadrée suivant Θ si :

(i) A est φ-encadrée suivant Θ ;

(ii) pour tout $a \in A$ et tout filtre Θ' plus fin que Θ tels que $\lim_{t,\Theta'} \varphi(t).\mathrm{rg}\, a(t) = 0$ on a $\lim_{t,\Theta'} \|a(t)\| = 0$.

I.2.15 a). Conservons les notations de I.2.14. Remarquons que A est bien φ-encadrée suivant Θ si et seulement si A est bien φ-encadrée suivant tout filtre plus fin que Θ .

b). Considérons le cas particulier important où φ est constante de valeur 1 . Soient Θ' plus fin que Θ et $a \in A$ tels que $\lim_{t,\Theta'} \mathrm{rg}\, a(t) = 0$. Il existe $V \in \Theta'$ sur lequel $\mathrm{rg}\, a(t) = 0$; on a donc $\lim_{t,\Theta'} \|a(t)\| = 0$. Cela signifie que si A vérifie la condition (i) de la définition I.2.14 (c'est-à-dire si A est encadrée suivant Θ), alors A satisfait aussi à la condition (ii).

I.2.16. Soient A une C^*-algèbre, T un ensemble de représentations de A et Θ un filtre sur T . Supposons que A est liminaire séparable et que Θ a une base dénombrable. Alors on peut montrer qu'il existe une fonction φ définie sur un élément de Θ , à valeurs dans $]0,+\infty[$, telle que A soit φ-encadrée suivant Θ . Mais nous donnerons un exemple (VIII.1) où $T = \hat{A}$ et Θ converge vers chacune de ses valeurs d'adhérence dans $\hat{A}$, et pour lequel il n'existe pas de fonction φ définie sur un élément de Θ , à valeurs dans $]0,+\infty[$, telle que A soit bien φ-encadrée suivant Θ (A étant liminaire séparable et Θ à base dénombrable).

Par contre F. Perdrizet a montré le résultat suivant ([32], prop.2.11). Soient A une C^*-algèbre liminaire et Θ un filtre sur $\hat{A}$ qui n'a qu'une seule valeur d'adhérence t_0 , vers laquelle il converge. Alors il existe une fonction φ définie sur un élément de Θ , à valeurs dans $]0,+\infty[$, telle que $\lim_{t,\Theta} \varphi(t).\mathrm{Tr}\, a(t) = \mathrm{Tr}\, a(t_0)$ pour tout $a \in \mathcal{K}(A)$. On déduit de I.2.6 que A est φ-encadrée suivant Θ . Il résulte maintenant de la proposition I.2.13 que A est bien φ-encadrée suivant Θ .

I.2.17. On déduit de I.2.15 b) et de la proposition I.2.13 la proposition suivante qui généralise ([18], th. 2.3).

PROPOSITION. Soient A une C^*-algèbre, T un ensemble de représentations de A et Θ un filtre sur T. On suppose l'existence d'une sous--algèbre involutive D de A telle que :

(i) D est dense dans A et tout élément de D est encadré suivant Θ ;

(ii) pour tout $a \in D$, la fonction $t \longmapsto \operatorname{Tr} a(t)$ a une limite suivant Θ.

Il existe une et une seule trace s.c.i. Γ sur A^+ telle que l'idéal de définition de Γ contienne D et telle que $\lim_{t,\Theta} \operatorname{Tr} a(t) = \Gamma(a)$ pour tout $a \in D$. Soit F son support; pour tout $a \in A$, on a

$$\lim_{t,\Theta} \|a(t)\| = \sup_{x \in F} \|a(x)\|.$$

I.2.18. Soit A une C^*-algèbre. Interprétons certains des résultats qui précèdent lorsque $T = \hat{A}$. D'après le corollaire I.1.8, la proposition I.2.8 indique que les points du support de Γ sont des points limites de Θ (en conservant les notations de cette proposition). On peut facilement construire des exemples où $\operatorname{Supp} \Gamma$ est strictement contenu dans l'ensemble des limites de Θ. La proposition I.2.17 se reformule comme suit. Soient A une C^*-algèbre et Θ un filtre sur $\hat{A}$. On suppose l'existence d'une sous-algèbre involutive D de A telle que :

D est dense dans A et tout élément de D est encadré suivant Θ ;
pour tout $a \in D$, la fonction $t \longmapsto \operatorname{Tr} a(t)$ a une limite suivant Θ ;

Alors Θ converge vers chacune de ses valeurs d'adhérence et l'ensemble des limites de Θ est le support de la trace Γ définie dans la proposition I.2.17.

I.2.19. Avec les hypothèses de la proposition I.2.17 on peut préciser la forme de la trace Γ. Pour simplifier la rédaction, nous supposerons à partir de maintenant que $T = \hat{A}$. Les raisonnements qui suivent et qui aboutissent à la démonstration de la proposition I.2.26 sont inspirés d'une rédaction non plubliée de J.M.G. Fell où un théorème voisin de la proposition I.2.26 est démontré.

I.2.20. Soient A une C^*-algèbre et B une sous-C^*-algèbre faciale de A. Soient t une représentation irréductible de A et K le sous--espace essentiel de $t|B$. Alors $t|B$ est une représentation irréductible de B dans K lorsque $K \neq 0$ ([30], th. 1.3); notons-la t_B et posons $\hat{A}_B = \{t \in \hat{A} \mid B \not\subset \ker t\}$. D'après ([30], th. 1.6), l'application $t \longmapsto t_B$ est un homéomorphisme de $\hat{A}_B$ sur $\hat{B}$. Nous identifierons $\hat{B}$ au sous-espace ouvert $\hat{A}_B$ de $\hat{A}$ et nous conservons dans la suite les notations qui viennent d'être introduites.

I.2.21. LEMME. Soient A une C^*-algèbre, Θ un filtre sur $\hat{A}$ et F l'ensemble des limites de Θ. Soit $a \in A$ tel qu'il existe $V \in \Theta$ pour lequel $\sup_{t\in V} \mathrm{rg}\, a(t) = n < +\infty$.

(i) Soit $s \in F$ tel que $a(s) \neq 0$. Alors il existe une sous-C^*-algèbre faciale B de A contenant a et $W \in \Theta$ tels que :

a) $W \subset \hat{A}_B$ et $\sup_{t\in W} \dim t_B \leqslant 2n$;

b) le filtre Θ n'a qu'un nombre fini de limites dans $\hat{A}_B$ dont s.

(ii) On a $\sup_{t\in F} \mathrm{rg}\, a(t) \leqslant 2n$;

(iii) L'ensemble $\{t \in F \mid a(t) \neq 0\}$ est fini.

Démontrons (i). Pour tout $t \in \hat{A}$ notons $H(t)$ l'espace de la représentation t. Puisque s est limite de Θ et que $a(s)$ n'est pas nul, nous pouvons supposer $a(t) \neq 0$ sur V, en restreignant au besoin V. Choisissons, pour tout $t \in V$, un projecteur $P(t) \in \mathcal{L}(H(t))$ de rang $\leqslant 2n$ tel que $P(t)a(t)P(t) = a(t)$. Appelons B la C^*-algèbre des $b \in A$ tels que $P(t)b(t)P(t) = b(t)$ sur V ; c'est une sous-C^*-algèbre faciale de A. Elle contient a et, d'après les rappels I.2.20, à chaque point $t \in V$ est associée une représentation irréductible t_B de B, de dimension $\leqslant 2n$; de même, à s correspond la représentation s_B de B. On a ainsi $s \in \hat{A}_B$ et $V \subset \hat{A}_B$. Grâce à l'identification de $\hat{A}_B$ avec $\hat{B}$, on déduit de ([18], lemme 2.4) que Θ ne peut avoir qu'un nombre fini de limites dans $\hat{A}_B$. En particulier, Θ converge vers s et, toujours d'après ([18], lemme 2.4), on a $\dim s_B \leqslant 2n$. Alors, comme $a \in B$, on a $\mathrm{rg}\, a(s) \leqslant \dim s_B \leqslant 2n$.

On déduit immédiatement l'assertion (ii) de ce qui précède.

Démontrons (iii). Supposons qu'il existe $s \in F$ tel que $a(s) \neq 0$. Alors, en reprenant les notations de (i), l'ensemble $F \cap \hat{A}_B$ des limites de Θ appartenant à $\hat{A}_B$ est fini. L'ensemble $\{t \in F \mid a(t) \neq 0\}$, qui est contenu dans $\hat{A}_B \cap F$ est donc fini.

I.2.22. PROPOSITION. Soient A une C^*-algèbre et Θ un filtre sur $\hat{A}$ tel que A soit encadrée suivant Θ. Alors, pour toute valeur d'adhérence s de Θ, la C^*-algèbre $A(s)$ est élémentaire.

On peut supposer que s est limite de Θ. Sinon, il suffit de prendre un filtre Θ' plus fin que Θ qui converge vers s. Soient $b \in A$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $a \in A$, encadré suivant Θ, tel que $\|a - b\| \leqslant \varepsilon$. D'après le lemme I.2.21, $a(s)$ est un opérateur de rang fini; donc $b(s)$ est un opérateur compact.

I.2.23. PROPOSITION. Soient A une C^*-algèbre et Ω une partie de $\hat{A}$ dense dans $\hat{A}$. Alors A est uniformément liminaire si et seulement si A est encadré sur Ω.

Prenons $a \in A$ avec $\sup_{t\in\Omega} \mathrm{rg}\, a(t) = n < +\infty$. Soit $s \in \hat{A} - \Omega$. Comme il existe un filtre sur Ω qui converge vers s, on déduit du lemme I.2.21 que $\mathrm{rg}\ a(s) \leqslant 2n$. Ainsi, on a $\sup_{t\in\hat{A}} \mathrm{rg}\ a(t) \leqslant 2n$. La proposition I.2.23 en résulte immédiatement.

I.2.24. PROPOSITION. Soient A une C^*-algèbre et Θ un filtre sur $\hat{A}$ tel que A soit encadrée suivant Θ. L'ensemble F des limites de Θ est discret.

Soit $s \in F$. Il existe $a \in A$, encadré suivant Θ, tel que $a(s) \neq 0$. Reprenons les notations du lemme I.2.21 (i). D'après ce lemme, l'ensemble $\hat{A}_B \cap F$ des limites de Θ appartenant à $\hat{A}_B$ est fini et contient s. On a ainsi montré que tout point de F possède un voisinage dans F ne contenant qu'un nombre fini d'éléments. Comme d'autre part les points de F sont fermés d'après la proposition I.2.22, on en déduit que F est discret.

I.2.25. LEMME. Soient A une C^*-algèbre, Θ un filtre sur $\hat{A}$ et B_1, B_2 deux sous-C^*-algèbres faciales de A telles que :

(i) $\hat{A}_{B_j}$ contient un élément V_j de Θ $(j=1,2)$;

(ii) $\sup_{t\in V_j} \dim t_{B_j} = k_j < +\infty$ $(j=1,2)$.

Il existe une sous-C^*-algèbre faciale B_3 de A, contenant $B_1 \cup B_2$, qui possède les propriétés (i) et (ii) définies précédemment avec $j = 3$.

On peut supposer que $V_1 = V_2 = V$. Pour $j = 1,2$ et $t \in V$, soit $P_j(t)$ le projecteur de $H(t)$ (espace de la représentation t) sur le sous-espace essentiel de $t|B_j$. On a, par hypothèse, $\mathrm{rg}\ P_j(t) \leqslant k_j$. Pour tout $t \in V$ posons $Q(t) = \sup(P_1(t), P_2(t))$. Appelons B_3 la C^*-algèbre des $a \in A$ tels que $Q(t)a(t)Q(t) = a(t)$ sur V. Alors B_3 satisfait aux conditions exigées.

I.2.26. PROPOSITION. Soient A une C^*-algèbre et Θ un filtre sur $\hat{A}$. Notons F l'ensemble des limites de Θ. On suppose l'existence d'une sous-algèbre involutive D de A telle que

(i) D est dense dans A et tout élément de D est encadré suivant Θ ;

(ii) pour tout $a \in D$, la fonction $t \longmapsto \mathrm{Tr}\ a(t)$ a une limite suivant Θ.

Alors :

a) pour tout $a \in A$, on a $\lim_{t,\Theta} \|a(t)\| = \sup_{x\in F} \|a(x)\|$;

b) il existe une fonction m unique de F dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\lim_{t,\Theta} \mathrm{Tr}\ a(t) = \sum_{t\in F} m(t).\mathrm{Tr}\ a(t)$ pour tout a encadré suivant Θ.

L'assertion a) a été démontrée dans la proposition I.2.17.

b) Notons $E^1(A,\Theta)$ l'idéal des éléments de A qui sont encadrés suivant Θ . Soit B_1 une sous-C^*-algèbre faciale de A telle qu'il existe $V_1 \in \Theta$ avec $V_1 \subset \hat{A}_{B_1}$ et $\sup_{t\in V_1} \dim t_{B_1} < +\infty$. On a $B_1 \subset E^1(A,\Theta)$ et il résulte de la proposition I.2.5 que $\lim_{t,\Theta} \operatorname{Tr} a(t)$ existe pour tout $a \in B_1$. D'autre part, $\hat{A}_{B_1} \cap F$ est l'ensemble des limites de Θ dans $\hat{A}_{B_1}$ et Θ n'a pas d'autre valeur d'adhérence dans $\hat{A}_{B_1}$. Alors, d'après ([18] , lemme 2.5), il existe une fonction m_{B_1} de $\hat{A}_{B_1} \cap F$ dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\lim_{t,\Theta} \operatorname{Tr} a(t) = \sum_{t\in F\cap\hat{A}_{B_1}} m_{B_1}(t).\operatorname{Tr} a(t)$ pour tout $a \in B_1$. Soit B_2 une autre sous-C^*-algèbre faciale de A telle qu'il existe $V_2 \in \Theta$ avec $V_2 \subset \hat{A}_{B_2}$ et $\sup_{t\in V_2} \dim t_{B_2} < +\infty$. Notons m_{B_2} la fonction de $\hat{A}_{B_2} \cap F$ dans $\mathbb{N}^*$ définie comme précédemment. Montrons que $m_{B_2}(s) = m_{B_1}(s)$ si $s \in F \cap \hat{A}_{B_1} \cap \hat{A}_{B_2}$. Supposons tout d'abord que $B_1 \subset B_2$. Soit I l'idéal bilatère fermé de B_1 tel que $(B_1/I)^\wedge = \hat{A}_{B_1} \cap F$. La C^*-algèbre B_1/I est liminaire et son spectre est fini; il existe donc $b \in B_1/I$ tel que $b(t)=0$ si $t \in \hat{A}_{B_1} \cap F - \{s\}$ et tel que $b(s)$ soit un projecteur de rang 1. Par conséquent, il existe $a \in B_1$ tel que $a(t) = 0$ si $t \in F - \{s\}$ et tel que $a(s)$ soit un projecteur de rang 1. On a $\lim_{t,\Theta} \operatorname{Tr} a(t) = m_{B_1}(s)$. D'autre part, considérant a comme un élément de B_2 , on obtient $\lim_{t,\Theta} \operatorname{Tr} a(t) = m_{B_2}(s)$, d'où $m_{B_1}(s) = m_{B_2}(s)$. Si B_2 ne contient pas B_1 , soit B_3 la C^*-algèbre faciale construite dans le lemme I.2.25; on a, d'après ce qui précède, $m_{B_1}(s) = m_{B_3}(s) = m_{B_2}(s)$. Ainsi $m_{B_1}(s)$ ne dépend pas de B_1 et on le note $m(s)$. Remarquons que m est définie sur tout F car, d'après le lemme I.2.21, pour tout $t \in F$ il existe une sous-C^*-algèbre faciale convenable B de A telle que $t \in \hat{A}_B$. Soit alors $a \in E^1(A,\Theta)$. Si $a(t) = 0$ pour tout $t \in F$, on a

$$\lim_{t,\Theta} \|a(t)\| = \sup_{t\in F} \|a(t)\| = 0 ,$$

d'où $\lim_{t,\Theta} \operatorname{Tr} a(t) = 0$. Sinon, d'après le lemme I.2.21, il existe une sous-C^*-algèbre faciale B de A contenant a , et $W \in \Theta$ tels que $W \subset \hat{A}_B$ et $\sup_{t\in W} \dim t_B < +\infty$. Il résulte de ce qui précède que

$$\lim_{t,\Theta} \operatorname{Tr} a(t) = \sum_{t\in F\cap\hat{A}_B} m(t).\operatorname{Tr} a(t) = \sum_{t\in F} m(t).\operatorname{Tr} a(t) .$$

L'unicité de m se vérifie immédiatement.

I.3. Filtres sur $J(A)^\wedge$

I.3.1. Soit A une C^*-algèbre. L'ensemble des $a \in A^+$ tels que la fonction $t \longmapsto \operatorname{Tr} a(t)$ soit finie et continue sur $\hat{A}$ est la partie positive d'un idéal bilatère facial de A ([16] , 4.5.2). Nous noterons $J(A)$ l'adhérence de cet idéal dans A . Alors A est une C^*-algèbre à trace continue si et seulement si $A = J(A)$. D'après ([13] , lemme 3.4) pour tout

$t \in J(A)^\wedge$, la C^*-algèbre $A(t)$ est élémentaire.

I.3.2. DEFINITIONS. Soient H un espace hilbertien et $a \in \mathcal{LC}(H)^+$. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots)$ la suite décroissante des valeurs propres non nulles de a , multiplicités comprises. Si cette suite est finie et possède p éléments, posons $\alpha_{p+r} = 0$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$. Par abus de langage, nous dirons que la suite infinie $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ ainsi obtenue est la suite décroissante, multiplicités comprises, des valeurs propres de a .

Soient un espace T et, pour $t \in T$, un espace hilbertien $H(t)$. Soit a un champ d'opérateurs compacts positifs appartenant à $\prod_{t\in T} \mathcal{LC}(H(t))$. En chaque point t soit $(f_j(t))_{j\in\mathbb{N}^*}$ la suite décroissante, multiplicités comprises, des valeurs propres de $a(t)$. On dira que les fonctions $t \longmapsto f_j(t)$, avec $j \in \mathbb{N}^*$, sont les fonctions propres de a sur T .

I.3.3. LEMME. Soient A une C^*-algèbre et $a \in A^+$. Les fonctions propres de $t \longmapsto a(t)$ sur $J(A)^\wedge$ sont continues.

Notons $(f_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ la suite décroissante des fonctions propres de $t \longmapsto a(t)$ sur $J(A)^\wedge$. D'autre part, pour tout $t \in J(A)^\wedge$, appelons $H(t)$ l'espace de la représentation t .

Soit $t_0 \in J(A)^\wedge$ et soient α, β deux réels n'appartenant pas à $Sp'a(t_0)$ tels que $0 < \alpha < \beta$. Montrons que le nombre de valeurs propres de $a(t)$ contenues dans $]\alpha,\beta[$ est constant au voisinage de t_0 . Supposons qu'on ait

$$f_1(t_0) \geq \dots \geq f_p(t_0) > \beta > f_{p+1}(t_0) \geq \dots \geq f_q(t_0) > \alpha > f_{q+1}(t_0) \geq \dots$$

Choisissons deux réels α_1 et α_2 tels que $f_p(t_0) > \beta + \beta_1 > \beta$ et $f_{q+1}(t_0) < \alpha - \alpha_1 < \alpha$. D'après ([13], lemme 3.4) les points de $J(A)^\wedge$ sont séparés (au sens de ([11], § 1)) dans $\hat{A}$. Il en résulte que, pour tout $b \in B$, la fonction $t \longmapsto \|b(t)\|$ est continue sur $J(A)^\wedge$ ([11], § 1). Alors, d'après le corollaire I.1.6, la fonction $t \longmapsto Sp'a(t)$ est continue de $J(A)^\wedge$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. Il existe donc un voisinage ouvert ω de t_0 , contenu dans $J(A)^\wedge$, tel que $Sp'a(t) \cap ([\beta,\beta+\beta_1] \cup [\alpha-\alpha_1,\alpha]) = \emptyset$ sur ω . Soit g une fonction continue réelle définie sur $\mathbb{R}$, valant 1 sur $[\alpha,\beta]$ et 0 si $t \leq \alpha - \alpha_1$ et si $t \geq \beta + \beta_1$. Alors, si $t \in \omega$, l'opérateur $g(a)(t)$ est le projecteur de $H(t)$ sur le sous-espace propre de $a(t)$ correspondant à celles de ses valeurs propres qui appartiennent à $]\alpha,\beta[$. Comme le lemme 4.1 de [19] reste valable pour une C^*-algèbre A quelconque lorsqu'on se restreint à un ouvert contenu dans $J(A)^\wedge$, on en déduit que $t \longmapsto \mathrm{rg}\, g(a)(t)$ est continue sur ω et donc que $\mathrm{rg}\, g(a)(t)$ est constant au voisinage de t_0 .

Montrons la continuité de f_j en t_0 . Nous supposerons $j > 1$ et $a(t_0) \neq 0$. Si $j = 1$ ou si $a(t_0) = 0$, la démonstration qui suit s'adapte facilement. Notons n le plus grand entier tel que $f_n(t_\circ) > f_j(t_\circ)$. Soient $]\alpha,\beta[$ un voisinage de $[f_n(t_\circ),\|a\|]$ et $]\alpha',\beta'[$ un voisinage de $f_j(t_\circ)$ tels que $]\alpha,\beta[\cap]\alpha',\beta'[= \emptyset$. On a

$$([0,\|a\|] - ([0,\beta'[\cup]\alpha,\beta[)) \cap Sp'a(t_\circ) = \emptyset .$$

Si $t \in J(A)^\wedge$, notons $P(t)$ le projecteur de $H(t)$ sur le sous-espace propre de $a(t)$ correspondant à celles de ses valeurs propres qui appartiennent à $]\alpha,\beta[$. Grâce à la continuité en $t_\circ$ de $t \mapsto Sp'a(t)$ et de $t \mapsto \mathrm{rg}\, P(t)$, on peut trouver un voisinage ω de $t_\circ$ contenu dans $J(A)^\wedge$ tel que

$$Sp'a(t) \subset [0,\beta'[\cup]\alpha,\beta[\quad \text{si} \quad t \in \omega ;$$
$$Sp'a(t) \cap]\alpha',\beta'[\neq \emptyset \quad \text{si} \quad t \in \omega ;$$
$$\mathrm{rg}\, P(t) = \mathrm{rg}\, P(t_\circ) \quad \text{si} \quad t \in \omega .$$

Il en résulte que $f_j(t) \in]\alpha',\beta'[$ sur ω. Ceci achève la démonstration.

I.3.4. LEMME. <u>Soient</u> X <u>un espace localement quasi-compact,</u> T <u>un ensemble et</u> Θ <u>un filtre sur</u> T. <u>Soit</u> f <u>une fonction de</u> T <u>dans</u> $\mathcal{F}(X)$. <u>Alors</u> $\bigcap_{V\in\Theta} \overline{\bigcup_{t\in V} f(t)}$ <u>est la plus petite limite de</u> f <u>suivant</u> Θ <u>dans</u> $\mathcal{F}(X)$ <u>muni de la topologie surfellienne. En particulier, si</u> f <u>converge suivant</u> Θ <u>dans</u> $\mathcal{F}(X)$ <u>muni de la topologie fellienne, sa limite est</u> $\bigcap_{V\in\Theta} \overline{\bigcup_{t\in V} f(t)}$.

Posons $F = \bigcap_{V\in\Theta} \overline{\bigcup_{t\in V} f(t)}$. Soit K un quasi-compact de X tel que $K \cap F = \emptyset$. Il existe $V \in \Theta$ tel que $\overline{\bigcup_{t\in V} f(t)} \cap F = \emptyset$. Ceci entraîne que F est une limite de f suivant Θ dans $\mathcal{F}(X)$ muni de la topologie surfellienne. Supposons l'existence d'une limite F_1 ne contenant pas F. Soient $t_1 \in F - F_1$ et ω un voisinage ouvert de t_1 contenu dans un quasi-compact K tel que $K \cap F_1 = \emptyset$. Pour tout $V \in \Theta$, on a $t_1 \in \overline{\bigcup_{t\in V} f(t)}$, d'où $(\bigcup_{t\in V} f(t)) \cap \omega \neq \emptyset$, ce qui entraîne $(\bigcup_{t\in V} f(t)) \cap K \neq \emptyset$. Ceci est absurde puisque F_1 est une limite de F suivant Θ dans $\mathcal{F}(X)$ muni de la topologie surfellienne.

I.3.5. LEMME. <u>Soient</u> A <u>une</u> C^*<u>-algèbre et</u> Θ <u>un filtre sur</u> $J(A)^\wedge$ <u>qui possède une base formée de parties connexes. Soit</u> $a \in A^+$ <u>tel que</u> $t \mapsto Sp'a(t)$ <u>converge vers</u> F <u>suivant</u> Θ <u>dans</u> $\mathcal{F}(\mathbf{R})$ <u>muni de la topologie fellienne. Notons</u> $(f_j)_{j\in\mathbf{N}^*}$ <u>la suite décroissante des fonctions propres de</u> $t \mapsto a(t)$ <u>sur</u> $J(A)^\wedge$. <u>Alors, pour tout</u> $j \in \mathbf{N}^*$, <u>la fonction</u> f_j <u>a une limite</u> a_j <u>suivant</u> Θ <u>et, si</u> $\alpha = \inf_{j\in\mathbf{N}^*} a_j$, <u>on a</u>

$$F = [0,\alpha] \cup (\overline{\bigcup_{j\in\mathbf{N}^*} \{a_j\}}) .$$

Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Supposons qu'on ait démontré l'existence de $\lim_{t,\Theta} f_j(t)$ pour tout $j < p$. Posons $s = \limsup_{t,\Theta} f_p(t)$ et $r = \liminf_{t,\Theta} f_p(t)$. Nous allons montrer que $r = s$. Supposons au contraire $r < s$ et vérifions que $[r,s]$ est contenu dans F. Soient une partie connexe $V \in \Theta$, et $\varepsilon \in]0,\frac{s-r}{2}[$. Il existe $t_V \in V$ tel que $f_p(t_V) \geqslant s-\varepsilon$ et $t'_V \in V$ tel que $f_p(t'_V) \leqslant r+\varepsilon$. Grâce à la continuité de f_p (lemme I.3.3) et à la connexité de V , on a $[r+\varepsilon,s-\varepsilon] \subset f_p(V)$. Comme ceci est valable pour tout $\varepsilon \in]0,\frac{s-r}{2}[$, on a $]r,s[\subset f_p(V)$, d'où $[r,s] \subset \overline{f_p(V)}$. Enfin, puisque ceci est vrai pour toute partie connexe $V \in \Theta$, on obtient $[r,s] \subset \bigcap_{V\in\Theta}\overline{f_p(V)}$. D'après le lemme I.3.4, on a $\bigcap_{V\in\Theta}\overline{f_p(V)} \subset F$, d'où il résulte que $[r,s] \subset F$. Prenons deux points u_1 , u_2 dans $]r,s[$ et $\eta > 0$ tel que $r < u_2 - \eta < u_2 + \eta < u_1 - \eta < u_1 + \eta < s$. On peut trouver $W \in \Theta$ tel que, pour tout $t \in W$, l'opérateur $a(t)$ ait une valeur propre dans $]u_2-\eta,u_2+\eta[$ et une valeur propre dans $]u_1-\eta,u_1+\eta[$, puisque $t \longmapsto Sp'a(t)$ converge vers F suivant Θ (dans $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ muni de la topologie fellienne) et que u_1 et u_2 appartiennent à F . D'autre part, d'après l'hypothèse de récurrence, la fonction f_{p-1} converge suivant Θ vers $a_{p-1} \geqslant s$. On peut donc supposer $f_{p-1}(t) > u_1 + \eta$ si $t \in W$. De plus, on a $\liminf_{t,\Theta} f_{p+1}(t) \leqslant r$ et donc il existe $t_W \in W$ tel que $f_{p+1}(t_W) < u_2 - \eta$. Ainsi on a

$$f_{p+1}(t_W) < u_2 - \eta < u_2 + \eta < u_1 - \eta < u_1 + \eta < f_{p-1}(t_W) .$$

Il est donc impossible de trouver une valeur propre de $a(t_W)$ dans $]u_2-\eta,u_2+\eta[$ et une autre dans $]u_1-\eta,u_1+\eta[$. Par conséquent, on a $r = s$.

Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, posons $a_j = \lim_{t,\Theta} f_j(t)$. La suite $(a_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ est évidemment décroissante . Posons $\alpha = \inf_{j\in\mathbb{N}^*} a_j$ et montrons que $[0,\alpha]$ est contenu dans F . On peut évidemment supposer $\alpha > 0$. Soient $\varepsilon \in]0,\alpha/2[$ et V une partie connexe appartenant à Θ . Prenons $t_V \in V$; il existe un indice i tel que $f_i(t_V) < \varepsilon$. D'autre part, on a $\lim_{t,\Theta} f_i(t) = a_i \geqslant \alpha$. Il existe donc $t'_V \in V$ tel que $f_i(t'_V) > \alpha - \varepsilon$. On en déduit que

$$[\varepsilon,\alpha-\varepsilon] \subset f_i(V) \subset \overline{\bigcup_{t\in V} Sp'a(t)} .$$

Comme ceci est valable pour tout $\varepsilon \in]0,\alpha/2[$ et pour toute partie connexe $V \in \Theta$, on a $[0,\alpha] \subset \bigcap_{V\in\Theta}\overline{\bigcup_{t\in V} Sp'a(t)} = F$. Ainsi $[0,\alpha] \cup (\bigcup_{j\in\mathbb{N}^*}\{a_j\})$ est contenu dans F . Supposons l'existence de $y \in F$ tel que

$$y \notin [0,\alpha] \cup (\bigcup_{j\in\mathbb{N}^*}\{a_j\}) .$$

On a par exemple $y \in]a_{j+1} , a_j[$. Soit η tel que

$$a_{j+1} < y - \eta < y + \eta < a_j .$$

Il existe évidemment $V \in \Theta$ tel que, si $t \in V$, on ait $f_j(t) > y + \eta$ et $f_{j+1}(t) < y - \eta$, d'où $Sp'a(t) \cap]y-\eta,y+\eta[= \emptyset$. Ceci est absurde puisque $t \longmapsto Sp'a(t)$ converge vers F dans $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ muni de la topologie fellienne. On obtient ainsi l'égalité $F = [0,\alpha] \cup (\bigcup_{j\in\mathbb{N}^*}\{a_j\})$.

I.3.6. PROPOSITION. _Soient_ A _une_ C^*_-algèbre et_ Θ _un filtre sur_ $J(A)^\wedge$ _qui possède une base formée de parties connexes. On suppose que_ Θ _converge vers chacune de ses valeurs d'adhérence dans_ $\hat{A}$ _et que l'ensemble_

F <u>des limites de</u> Θ <u>dans</u> $\hat{A}$ <u>est discret. De plus, si</u> I <u>désigne l'idéal bilatère fermé de</u> A <u>tel que</u> $(A/I)^\wedge = F$, <u>on suppose que</u> A/I <u>est liminaire. Alors</u> A <u>est encadrée suivant</u> Θ <u>et</u> $\lim_{t,\Theta} \mathrm{Tr}\, a(t)$ <u>existe pour tout</u> $a \in A$ <u>encadré suivant</u> Θ .

Notons s la surjection canonique de A sur A/I . Soient $a \in \mathcal{K}(A)^+$ et $(f_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ la suite décroissante des fonctions propres de $t \longmapsto a(t)$ sur $J(A)^\wedge$. D'après ([31] , corol. 6), s(a) appartient à $\mathcal{K}(A/I)$. On vérifie facilement que l'idéal bilatère facial des $b \in A/I$, encadrés sur F et tels que $b(t) = 0$ sur F sauf en un nombre fini de points, est dense dans A/I . On en déduit que s(a)(t) est de rang fini pour tout $t \in F$ et que $s(a)(t) = 0$ sur F sauf en un nombre fini de points. Il en résulte que $Sp's(a) = \bigcup_{t\in F} Sp's(a)(t)$ est fini. Par hypothèse, on a $\lim_{t,\Theta} \|b(t)\| = \sup_{t\in F} \|b(t)\|$ pour tout $b \in A$; alors, on déduit du corollaire I.1.6 que $\lim_{t,\Theta} Sp'a(t) = Sp's(a)$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ muni de la topologie fellienne. D'après le lemme I.3.5, $\lim_{t,\Theta} f_j(t)$ existe pour tout $j \in \mathbb{N}^*$. Posons $a_j = \lim_{t,\Theta} f_j(t)$ et $\alpha = \inf_{j\in\mathbb{N}^*} a_j$. On a

$$Sp's(a) = [0,\alpha] \cup (\bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} \{a_j\})$$

toujours d'après ce lemme, d'où $\alpha = 0$ car Sp's(a) est fini. Donnons-nous $\varepsilon > 0$ et soit $j_\circ$ tel que $a_{j_\circ} < \varepsilon$. Il existe $V \in \Theta$ tel que $f_{j_\circ}(t) < \varepsilon$ si $t \in V$, et donc tel que $f_j(t) < \varepsilon$ si $t \in V$ et $j \geq j_\circ$. On a $\|a - g_\varepsilon(a)\| < \varepsilon$ et $\sup_{t\in V} \mathrm{rg}\, g_\varepsilon(a)(t) \leq j_\circ$. Ceci entraîne que tout élément de $\mathcal{K}(A)$ est adhérent à l'idéal des éléments de A qui sont encadrés suivant Θ .

Soit maintenant $b \in A^+$ encadré suivant Θ , et considérons la suite décroissante $(f_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ des fonctions propres de $t \longmapsto b(t)$ sur $J(A)^\wedge$. Il existe $V \in \Theta$ et $j_\circ$ tels que $f_j(t) = 0$ si $t \in V$ et $j \geq j_\circ$. De plus, $\lim_{t,\Theta} f_i(t)$ existe pour tout i . On a $\mathrm{Tr}\, b(t) = \sum_{j\in\mathbb{N}^*} f_j(t)$ si $t \in J(A)^\wedge$, d'où $\lim_{t,\Theta} \mathrm{Tr}\, b(t) = \sum_{j=1}^{j_\circ} \lim_{t,\Theta} f_j(t) < +\infty$.

I.3.7. La proposition I.3.6 n'est pas vraie si on ne suppose pas que Θ a une base formée de parties connexes comme le prouve l'exemple VIII.7.

CHAPITRE II

Extensions localement quasi-compactes d'espaces localement quasi-compacts

II.1. DEFINITIONS. Soient X et Y deux espaces topologiques. On appelle extension de X par Y un triplet (Z, ψ_X, ψ_Y) où Z est un espace topologique, ψ_X un homéomorphisme de X sur une partie ouverte de Z et ψ_Y un homéomorphisme de Y sur la partie fermée $Z - \psi_X(X)$ de Z.

On dit que deux extensions (Z, ψ_X, ψ_Y) et (Z', ψ'_X, ψ'_Y) de X par Y sont équivalentes s'il existe un homéomorphisme g de Z sur Z' tel que $g \circ \psi_X = \psi'_X$ et $g \circ \psi_Y = \psi'_Y$.

Toute extension (Z', ψ'_X, ψ'_Y) est équivalente à (Z, id, id), où Z est l'ensemble $X \amalg Y$ (somme ensembliste de X et Y) muni de la topologie transportée de celle de Z' par la bijection g telle que $g|X = \psi'_X$ et $g|Y = \psi'_Y$. Comme on ne s'intéresse qu'aux classes d'équivalence d'extensions, on ne considèrera que le représentant (Z, id, id) de la classe de (Z', ψ'_X, ψ'_Y). On le notera plus brièvement Z et on dira "extension" pour "classe d'équivalence d'extension".

II.2. Soient X et Y deux ensembles, et f une application de X dans l'ensemble $\mathcal{P}(Y)$ des parties de Y. Pour tout $E \in \mathcal{P}(Y)$ on notera $f^{-1*}(E)$ l'ensemble des $x \in X$ tels que $f(x) \cap E \neq \emptyset$.

II.3. PROPOSITION. Soient X_1 et Y deux espaces localement quasi-compacts, et X une partie ouverte de X_1. Soit f une fonction de X_1 dans $\mathcal{F}(Y)$ qui possède les propriétés suivantes :

a) f est s.c.i. sur $X_1 - X$;

b) pour toute partie quasi-compacte K de Y et tout ouvert ω de Y contenant K, il existe une partie F de $X_1 - X$ contenue dans $f^{-1*}(\omega)$ telle que $f^{-1*}(K) \cup F$ soit quasi-compacte.

Soit Ω l'ensemble des parties O de $X \amalg Y$ qui possèdent les propriétés suivantes :

(i) $O \cap Y$ est ouvert dans Y ;

(ii) $O \cap X \supset X \cap f^{-1*}(O \cap Y)$;

(iii) $(O \cap X) \cup f^{-1*}(O \cap Y)$ est ouvert dans X_1.

Alors Ω est l'ensemble des ouverts d'une topologie sur $X \amalg Y$ qui en fait une extension localement quasi-compacte de X par Y.

Montrons que Ω est l'ensemble des ouverts d'une topologie sur $X \amalg Y$. Soient O_1 et O_2 deux éléments de Ω. Alors $O_1 \cap O_2$ vérifie évidemment (i). On a

$$f^{-1*}(O_1 \cap O_2 \cap Y) \subset f^{-1*}(O_1 \cap Y) \cap f^{-1*}(O_2 \cap Y) ,$$

d'où

$$X \cap f^{-1*}(O_1 \cap O_2 \cap Y) \subset X \cap f^{-1*}(O_1 \cap Y) \cap f^{-1*}(O_2 \cap Y) \subset (O_1 \cap X) \cap (O_2 \cap X) .$$

Ainsi $O_1 \cap O_2$ vérifie (ii). Il résulte de la semi-continuité inférieure de f sur $X_1 - X$ que $f^{-1*}(O_1 \cap O_2 \cap Y) \cap (X_1 - X)$ est un ouvert de $X_1 - X$; donc $X \cup f^{-1*}(O_1 \cap O_2 \cap Y)$ est un ouvert de X_1 . Posons

$$\omega = (X \cup f^{-1*}(O_1 \cap O_2 \cap Y)) \cap ((O_1 \cap X) \cup f^{-1*}(O_1 \cap Y)) \cap ((O_2 \cap X) \cup f^{-1*}(O_2 \cap Y)) .$$

On a

$$\omega \cap X = O_1 \cap O_2 \cap X \quad \text{et} \quad \omega \cap (X_1 - X) = f^{-1*}(O_1 \cap O_2 \cap Y) \cap (X_1 - X) ,$$

d'où

$$\omega = (O_1 \cap O_2 \cap X) \cup f^{-1*}(O_1 \cap O_2 \cap Y) .$$

Comme ω est l'intersection de trois ouverts de X_1 , on en déduit que ω vérifie aussi (iii). On s'assure facilement, grâce à l'égalité $f^{-1*}(\bigcup_i (O_i \cap Y)) = \bigcup_i f^{-1*}(O_i \cap Y)$, qu'une réunion quelconque d'éléments de Ω appartient encore à Ω . Appelons $Z(f)$ l'espace $X \coprod Y$ muni de la topologie dont Ω est l'ensemble des ouverts; c'est évidemment une extension de X par Y .

Montrons maintenant que $Z(f)$ est localement quasi-compact. Il suffit de vérifier que tout point $y_0 \in Y$ possède un système fondamental de voisinages quasi-compacts dans $Z(f)$. Soit O un voisinage ouvert de y_0 dans $Z(f)$. L'espace Y étant localement quasi-compact, il existe des ouverts ω_1 , ω_2 et des quasi-compacts K_1 , K_2 de Y tels que $y_0 \in \omega_2 \subset K_2 \subset \omega_1 \subset K_1 \subset O \cap Y$. Soit F_2 une partie de $X_1 - X$ contenue dans $f^{-1*}(\omega_1)$ telle que $f^{-1*}(K_2) \cup F_2 = F_2'$ soit quasi-compact. On a

$$f^{-1*}(K_2) \subset f^{-1*}(\omega_1) \subset (O \cap X) \cup f^{-1*}(\omega_1) ;$$

donc

$$(O \cap X) \cup f^{-1*}(\omega_1) = (X \cup f^{-1*}(\omega_1)) \cap ((O \cap X) \cup f^{-1*}(O \cap Y))$$

est un voisinage ouvert de F_2' dans X_1 . Soit K un voisinage quasi-compact de F_2' dans X_1 contenu dans $(O \cap X) \cup f^{-1*}(\omega_1)$. Nous allons montrer que $(K \cap X) \cup K_1$ est un voisinage quasi-compact de y_0 dans $Z(f)$ (évidemment contenu dans O). Notons $\mathrm{Int}(K \cap X)$ l'intérieur de $K \cap X$ dans X (ou X_1) et vérifions d'abord que $\mathrm{Int}(K \cap X) \cup \omega_2$ est un voisinage ouvert de y_0 dans $Z(f)$. On a

$$(1) \qquad \mathrm{Int}(K \cap X) \supset F_2' \cap X \supset f^{-1*}(K_2) \cap X \supset f^{-1*}(\omega_2) \cap X .$$

D'autre part, comme K est un voisinage de F_2' dans X_1 , il existe un ouvert V de $X_1 - X$ contenant $F_2' \cap (X_1 - X)$ tel que $\mathrm{Int}(K \cap X) \cup V$ soit ouvert dans X_1 . On a

$$V \supset F_2' \cap (X_1 - X) \supset f^{-1*}(K_2) \cap (X_1 - X) \supset f^{-1*}(\omega_2) \cap (X_1 - X) ;$$

d'où

(2) $\quad \mathrm{Int}(K\cap X)\cup f^{-1*}(\omega_2) = (\mathrm{Int}(K\cap X)\cup V)\cap(X\cup f^{-1*}(\omega_2))$.

Ainsi $\mathrm{Int}(K\cap X)\cup\omega_2$ vérifie (ii) d'après (1); de plus $\mathrm{Int}(K\cap X)\cup f^{-1*}(\omega_2)$ est ouvert dans X_1 d'après (2), c'est-à-dire que $\mathrm{Int}(K\cap X)\cup\omega_2$ vérifie (iii).

Montrons que $(K\cap X)\cup K_1$ est quasi-compact. Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $(K\cap X)\cup K_1$. Alors $((O_i\cap X)\cup f^{-1*}(O_i\cap Y))_{i\in I}$ constitue un recouvrement ouvert de $(K\cap X)\cup f^{-1*}(K_1)$ dans X_1 . Or on a

$$(K\cap X)\cup f^{-1*}(K_1)\supset(K\cap X)\cup f^{-1*}(\omega_1)\supset K .$$

Comme K est quasi-compact, il existe un recouvrement fini $(O_{i_r}\cap X)_{r=1,\dots,p}$ de $(K\cap X)$ extrait de $(O_i\cap X)_{i\in I}$. D'autre part, K_1 étant quasi-compact, on peut extraire de $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement fini $(O_{j_s})_{s=1,\dots,q}$ de K_1 . Alors les ouverts $O_{i_1},\dots,O_{i_p},O_{j_1},\dots,O_{j_q}$ recouvrent $(K\cap X)\cup K_1$. Ceci prouve la quasi-compacité de cet ensemble et achève la démonstration de la proposition.

II.4. Conservons les notations de II.3. Pour tout $x\in X$ on a $f(x)\subset\overline{\{x\}}^{Z(f)}\cap Y$. En effet, soient $y\in f(x)$ et O un voisinage ouvert de y dans $Z(f)$. On a $x\in f^{-1*}(O\cap Y)\cap X\subset O\cap X$, d'où $x\in O$.

Lorsque X_1 est quasi-compact, les fonctions s.c.s. de X_1 dans $\mathcal{F}(Y)$ dont la restriction à $X_1 - X$ est continue vérifient les conditions a) et b) de II.3. En effet, pour tout quasi-compact K de Y , l'ensemble $f^{-1*}(K)$ est fermé dans X_1 et donc quasi-compact. Dans la suite nous utiliserons souvent le cas particulier de II.3 énoncé dans la proposition II.8. Introduisons auparavant deux définitions.

II.5. DEFINITION. <u>Soient</u> X <u>un espace localement compact et</u> Y <u>un espace compact. On appelle compactification de</u> X <u>par</u> Y <u>une extension compacte de</u> X <u>par</u> Y <u>dans laquelle</u> X <u>est dense</u>.

II.6. DEFINITION. <u>Soit</u> X <u>un espace topologique. On dira que deux points de</u> X <u>sont séparés dans</u> X <u>s'ils possèdent des voisinages disjoints. On dira qu'un point</u> $x\in X$ <u>est séparé dans</u> X <u>si, pour tout point</u> $y\in X$ <u>non adhérent à</u> x , <u>les points</u> x <u>et</u> y <u>sont séparés dans</u> X (<u>voir</u> [11], § 1).

II.7. LEMME. <u>Soient</u> X <u>et</u> Y <u>deux espaces topologiques et</u> Z <u>une extension de</u> X <u>par</u> Y <u>tels que les points de</u> X <u>soient séparés dans</u> Z . <u>Notons</u> g <u>la fonction de</u> X <u>dans</u> $\mathcal{F}(Z)$ <u>telle que</u> $g(x) = \overline{\{x\}}^Z$ <u>pour tout</u> $x\in X$; <u>alors</u> g <u>est un homéomorphisme de</u> X <u>sur</u> $g(X)$.

La fonction g est évidemment ouverte et injective, et sa continuité résulte de ([15], th. 17) .

On pourra donc dans ces conditions identifier X à un sous-espace topologique de $\mathcal{F}(Z)$.

II.8. PROPOSITION. Soient X un espace localement compact, X_1 une compactification de X , et Y un espace localement quasi-compact. Soit f une fonction continue de $X_1 - X$ dans $\mathcal{F}(Y)$. Appelons Ω l'ensemble des parties O de $X \amalg Y$ qui possèdent les propriétés suivantes :

(i) $O \cap Y$ est ouvert dans Y ;

(ii) $(O \cap X) \cup f^{-1*}(O \cap Y)$ est ouvert dans X_1 ;

Alors Ω est l'ensemble des ouverts d'une topologie sur $X \amalg Y$ qui en fait une extension localement quasi-compacte $Z(f)$ de X par Y . De plus :

a) les points de X sont fermés et séparés dans $Z(f)$;

b) pour $x \in X_1 - X$, notons Θ_x la trace sur X du filtre des voisinages de x dans X_1 . Alors, dans $Z(f)$, le filtre Θ_x converge vers chacune de ses valeurs d'adhérence, et $f(x)$ est l'ensemble des limites de Θ_x ;

c) la fonction g de X_1 dans $\mathcal{F}(Z)$ telle que $g(x) = \{x\}$ si $x \in X$ et $g(x) = f(x)$ si $x \in X_1 - X$ est continue .

Notons f' la fonction de X_1 dans $\mathcal{F}(Y)$ telle que $f'(x) = \emptyset$ si $x \in X$ et $f'(x) = f(x)$ si $x \in X_1 - X$. Alors f' est une fonction s.c.s. de X_1 dans $\mathcal{F}(Y)$ dont la restriction à $X_1 - X$ est continue. D'après la remarque II.4, f' satisfait aux conditions a) et b) de II.3. On déduit alors immédiatement de la proposition II.3 que Ω est l'ensemble des ouverts d'une topologie sur $X \amalg Y$ qui en fait une extension localement quasi-compacte de X par Y (remarquer que $X \cap f'^{-1*}(E) = \emptyset$ pour toute partie $E \subset Y$). De plus, on vérifie facilement que les points de X sont fermés et séparés dans $Z(f)$.

Démontrons b). Montrons d'abord que tout point $y \in f(x)$ est limite de Θ_x . Soit O un voisinage ouvert de y dans $Z(f)$; alors $(O \cap X) \cup f^{-1*}(O \cap Y)$ est un voisinage de x dans X_1 , et ainsi $O \cap X$ appartient à Θ_x . Vérifions maintenant qu'un point $y \in Z(f) - f(x)$ n'est pas valeur d'adhérence de Θ_x . C'est évident si $y \in X$ et on supposera donc que $y \in Y$. Soit K un voisinage quasi-compact de y dans Y tel que $K \cap f(x) = \emptyset$, et notons ω l'intérieur de K dans Y . L'ensemble $f^{-1*}(K)$ est fermé dans $X_1 - X$ et ne contient pas x . Prenons un voisinage ouvert V de $f^{-1*}(K)$ dans X_1 et un voisinage W de x dans X_1 tels que $V \cap W = \emptyset$. L'ensemble $(V \cap X) \cup \omega$ est un voisinage de y dans $Z(f)$ car $(V \cap X) \cup f^{-1*}(\omega) = V \cap (X \cup f^{-1*}(\omega))$ est ouvert dans X_1 . Com- $W \cap X$ appartient à Θ_x et $(W \cap X) \cap ((V \cap X) \cup \omega) = \emptyset$, le point y n'est pas valeur d'adhérence de Θ_x .

Démontrons c). D'après le lemme II.7 et a), la fonction $g|X$ est continue.

Soit $x \in X_1 - X$; grâce à b) et au lemme I.1.7, on a $\lim_{x' \to x, x \in X} g(x') = g(x)$ dans $\mathcal{F}(Z(f))$ muni de la topologie fellienne. Alors c) résulte de ([1], chap. 1, §8, th. 1) .

II.9. Conservons les notations de la proposition II.8. Nous dirons que $Z(f)$ est l'extension de X par Y associée à f , et que $Z(f)$ est obtenue par l'intermédiaire de X_1 . Remarquons que les fermés de $Z(f)$ se décrivent simplement de la façon suivante. Une partie F de $Z(f)$ est fermée si et seulement si :

(i) $F \cap X$ est fermée dans X et $F \cap Y$ est fermée dans Y ;

(ii) $F \cap Y$ contient $f(x)$ pour tout $x \in (X_1 - X) \cap \overline{F \cap X}^{X_1}$.

Vérifions-le. La condition (i) est évidemment nécessaire pour que F soit fermé dans $Z(f)$. Supposons donc que F satisfait à cette condition. Alors F est fermé dans $Z(f)$ si et seulement si $(X - F \cap X) \cup f^{-1*}(Y - F \cap Y)$ est ouvert dans X_1 . Si $(X - F \cap X) \cup f^{-1*}(Y - F \cap Y)$ est ouvert dans X_1 , on a évidemment $\overline{F \cap X}^{X_1} \cap f^{-1*}(Y - F \cap Y) = \emptyset$. Réciproquement, si $\overline{F \cap X}^{X_1} \cap f^{-1*}(Y - F \cap Y) = \emptyset$, on a

$$(X - F \cap X) \cup f^{-1*}(Y - F \cap Y) = (X \cup f^{-1*}(Y - F \cap Y)) \cap (X_1 - \overline{F \cap X}^{X_1}) ,$$

et donc $(X - F \cap X) \cup f^{-1*}(Y - F \cap Y)$ est ouvert dans X_1 . Enfin l'égalité $\overline{F \cap X}^{X_1} \cap f^{-1*}(Y - F \cap Y) = \emptyset$ est équivalente à (ii).

II.10. Soient X un espace localement compact et Y un espace localement quasi-compact. Nous notons $\mathcal{S}(X,Y)$ l'ensemble des extensions localement quasi-compactes Z de X par Y telles que les points de X soient fermés et séparés dans Z . La proposition II.8 donne un procédé pour construire des éléments de $\mathcal{S}(X,Y)$. Nous allons maintenant étudier comment s'obtiennent tous les éléments de $\mathcal{S}(X,Y)$ (voir corollaire II.12). Nous nous intéressons d'abord à l'ensemble des extensions Z de X par Y telles que les points de X soient séparés dans Z .

II.11. PROPOSITION. Soient X un espace localement compact et Y un espace localement quasi-compact.

a) Soit f une fonction s.c.s. de βX dans $\mathcal{F}(Y)$ dont la restriction à $\beta X - X$ est continue. Appelons Ω l'ensemble des parties O de $X \amalg Y$ telles que :

(i) $O \cap Y$ est ouvert dans Y ;

(ii) $(O \cap X) \supset X \cap f^{-1*}(O \cap Y)$;

(iii) $(O \cap X) \cup f^{-1*}(O \cap Y)$ est ouvert dans βX .

Alors Ω est l'ensemble des ouverts d'une topologie sur $X \amalg Y$ qui en fait une extension localement quasi-compacte $Z(f)$ de X par Y telle que les points de X soient séparés dans $Z(f)$.

b) Soit Z une extension localement quasi-compacte de X par Y

telle que les points de X soient séparés dans Z. Notons g le prolongement continu à βX de la fonction $x \longmapsto \overline{\{x\}}^Z$ de X dans $\mathcal{F}(Z)$. On a $g(x) \subset Y$ pour tout $x \in \beta X - X$. Appelons f_Z la fonction de βX dans $\mathcal{F}(Y)$ telle que $f_Z(x) = g(x) \cap Y$ pour tout $x \in \beta X$. Alors f_Z est s.c.s. de βX dans $\mathcal{F}(Y)$ et sa restriction à $\beta X - X$ est continue.

c) Les applications $f \longmapsto Z(f)$ et $Z \longmapsto f_Z$ sont des bijections réciproques entre les deux ensembles suivants :

l'ensemble des fonctions s.c.s. de βX dans $\mathcal{F}(Y)$ dont la restriction à $\beta X - X$ est continue ;

l'ensemble des extensions localement quasi-compactes Z de X par Y telles que les points de X soient séparés dans Z.

a) D'après la proposition II.3 et la remarque II.4, Ω est l'ensemble des ouverts d'une topologie qui fait de $X \amalg Y$ une extension localement quasi-compacte de X par Y. D'après la remarque II.4, pour tout $x \in X$, on a $f(x) \subset \overline{\{x\}}^{Z(f)} \cap Y$. Montrons qu'ici on a $f(x) = \overline{\{x\}}^{Z(f)} \cap Y$. Soit $y \in Y - f(x)$ et soit K un voisinage quasi-compact de y dans Y tel que $K \cap f(x) = \emptyset$. Notons V et W des voisinages ouverts disjoints de x et $f^{-1*}(K)$ respectivement dans βX. Soit ω un voisinage ouvert de y dans Y, contenu dans K. On a $f^{-1*}(\omega) \subset f^{-1*}(K) \subset W$. Il en résulte que $f^{-1*}(\omega) \cap X$ est contenu dans $W \cap X$ et que

$$(W \cap X) \cup f^{-1*}(\omega) = (X \cup f^{-1*}(\omega)) \cap W$$

est ouvert dans βX. Ainsi $(W \cap X) \cup \omega$ est ouvert dans $Z(f)$. Alors $V \cap X$ et $(W \cap X) \cup \omega$ sont deux voisinages disjoints de x et y respectivement dans $Z(f)$. Ceci prouve que $\overline{\{x\}}^{Z(f)} \cap Y = f(x)$ et que les points de X sont séparés dans $Z(f)$.

b) La continuité de $x \longmapsto \overline{\{x\}}^Z$ définie sur X résulte du lemme II.7. Soit $x_0 \in \beta X - X$ et montrons que $g(x_0)$ est contenu dans Y. Remarquons que si $x_1 \in g(x_0) \cap X$, on a $g(x_1) = g(x_0)$. En effet, sinon, prenons $x_2 \in g(x_0) - \overline{\{x_1\}}^Z$. Par hypothèse, il existe dans Z des voisinages ouverts disjoints V_1 et V_2 de x_1 et x_2 respectivement. On a $V_1 \cap g(x_0) \neq \emptyset$ et $V_2 \cap g(x_0) \neq \emptyset$. Comme $g(x_0)$ est adhérent à $g(X)$ dans $\mathcal{F}(Z)$, il existe $x_3 \in X$ tel que $g(x_3) \cap V_1 \neq \emptyset$ et $g(x_3) \cap V_2 \neq \emptyset$, c'est-à-dire tel que $x_3 \in V_1 \cap V_2$, ce qui est absurde. Montrons maintenant qu'on ne peut avoir $g(x_0) = g(x_1)$. En effet, $g|X$ est un homéomorphisme de X sur $g(X)$ d'après le lemme II.7; alors (voir [22], lemme 6.11), $\overline{g(X)} - g(X)$ est l'image par g de $\beta X - X$ et on a donc $g(x_0) \neq g(x_1)$

D'après ce qui précède, on a $f_Z(x) = g(x)$ pour tout $x \in \beta X - X$; d'autre part, si $x \in X$, on a $f_Z(x) \cup \{x\} = g(x)$. Comme la topologie fellienne de $\mathcal{F}(Y)$ est induite par la topologie fellienne de $\mathcal{F}(Z)$, la fonction $f_Z | \beta X - X$ est continue de $\beta X - X$ dans $\mathcal{F}(Y)$. Soit K une partie quasi-compacte de Y. On a $f_Z(x) \cap K = \emptyset$ si et seulement si $g(x) \cap K = \emptyset$; donc

$\{x \in X \mid f_Z(x) \cap K = \emptyset\}$ est ouvert dans βX et f est s.c.s.

c) Conservons les notations de b) et montrons que les ouverts de Z sont définis à partir de f_Z par les conditions (i), (ii), (iii) de a). Soit O un ouvert de Z. Il vérifie évidemment (i). Soit $x \in X$ tel que $f_Z(x) \cap (O \cap Y) \neq \emptyset$. On a $g(x) \cap O \neq \emptyset$ d'où $x \in O$; ceci entraîne que $(O \cap X) \supset X \cap f_Z^{-1*}(O \cap Y)$. Enfin $(O \cap X) \cup f_Z^{-1*}(O \cap Y) = g^{-1*}(O)$ est ouvert dans βX puisque g est s.c.i. Réciproquement, montrons qu'une partie O de Z qui vérifie les conditions (i), (ii), (iii) de a) avec $f = f_Z$ est ouverte dans Z. La condition (iii) entraîne que

$$O \cap X = X \cap ((O \cap X) \cup f_Z^{-1*}(O \cap Y))$$

est ouvert dans X et donc dans Z. Il suffit maintenant de vérifier que O est voisinage de chaque point de $O \cap Y$. Supposons l'existence de $y \in O \cap Y$, non intérieur à O. Comme $O \cap Y$ est ouvert dans Y, tout voisinage V de y dans Z rencontre $X - O \cap X$. Soit $x_V \in V \cap (X - O \cap X)$. Dans $\beta X - (O \cap X \cup f_Z^{-1*}(O \cap Y))$, la famille (x_V), indexée par l'ensemble filtrant des voisinages de y dans Z, admet une valeur d'adhérence $x_\circ$. On a $g(x_\circ) \cap O = \emptyset$. Il existe donc un voisinage quasi-compact K de y dans Z tel que $K \cap g(x_\circ) = \emptyset$. Comme $\omega = \{x \in \beta X \mid g(x) \cap K = \emptyset\}$ est un voisinage de $x_\circ$, il existe un voisinage W de y dans Z, contenu dans K, tel que $x_W \in \omega$, c'est-à-dire tel que $g(x_W) \cap K = \emptyset$, ce qui est absurde puisque $x_W \in g(x_W) \cap W \subset g(x_W) \cap K$. Ainsi O est ouvert dans Z.

Soit f une fonction s.c.s. de βX dans $\mathcal{F}(Y)$ dont la restriction à $\beta X - X$ est continue. Pour achever la démonstration de c) il faut montrer que $f = f_{Z(f)}$. Nous poserons $f' = f_{Z(f)}$. Il résulte de la démonstration de a) que $f(x) = Y \cap \overline{\{x\}}^{Z(f)}$ pour tout $x \in X$, d'où $f|X = f'|X$. D'après le début de la démonstration de c) les fonctions f et f' déterminent toutes deux la topologie de $Z(f)$ de la façon décrite dans a). Supposons qu'il existe $x \in \beta X - X$ et $y \in Y$ tels que $y \in f'(x) - f(x)$. Soit ω un voisinage ouvert de y dans Y contenu dans un quasi-compact K de Y tel que $K \cap f(x) = \emptyset$. Posons $W = \{t \in \beta X \mid f(t) \cap K = \emptyset\}$. Alors W est un ouvert de βX ; de plus on a $W \cap f^{-1*}(\omega) = \emptyset$ et $x \in W \cap f'^{-1*}(\omega)$. Soit U un voisinage compact de x dans βX contenu dans W. Alors $(X - U) \cup \omega$ est ouvert dans $Z(f)$: on a $X \cap f^{-1*}(\omega) \subset X - U$, et $(X - U) \cup f^{-1*}(\omega) = (\beta X - U) \cap (X \cup f^{-1*}(\omega))$ est ouvert dans βX. Il en résulte que $(X - U) \cup f'^{-1*}(\omega)$ est ouvert dans βX et donc que $U \cap ((X - U) \cup f'^{-1*}(\omega))$ est un voisinage de x dans βX. Ceci est absurde car ce voisinage ne rencontre pas X. On a donc $f'(x) \subset f(x)$. De même, on montre que $f(x) \subset f'(x)$, d'où $f(x) = f'(x)$ pour tout $x \in \beta X - X$ et donc pour tout $x \in \beta X$.

II.12. COROLLAIRE. <u>Soient</u> X <u>un espace localement compact et</u> Y <u>un espace localement quasi-compact</u>.

a) Soit $Z \in \mathcal{S}(X,Y)$. La fonction $g : x \longmapsto \{x\}$ de X dans $\mathcal{F}(Z)$ est continue. Pour $x \in \beta X - X$, posons $f'_Z(x) = \lim_{x' \to x, x' \in X} g(x')$ (dans $\mathcal{F}(Z)$ muni de la topologie fellienne). Alors f'_Z est une fonction continue de $\beta X - X$ dans $\mathcal{F}(Y) \subset \mathcal{F}(Z)$.

b) Pour tout $f \in \mathcal{C}(\beta X - X, \mathcal{F}(Y))$ notons $Z(f)$ l'élément de $\mathcal{S}(X,Y)$ associé à f (voir II.9). Alors $f \longmapsto Z(f)$ et $Z \longmapsto f'_Z$ sont des bijections réciproques de $\mathcal{C}(\beta X - X, \mathcal{F}(Y))$ sur $\mathcal{S}(X,Y)$ et de $\mathcal{S}(X,Y)$ sur $\mathcal{C}(\beta X - X, \mathcal{F}(Y))$.

L'assertion a) résulte immédiatement de la proposition II.11.b) en remarquant que $\{x\} = \overline{\{x\}}^Z$.

b) Soit Z une extension localement quasi-compacte de X par Y telle que les points de X soient séparés dans Z. Soit f_Z la fonction s.c.s. de βX dans $\mathcal{F}(Y)$ dont la restriction à $\beta X - X$ est continue qui a été associée à Z dans la proposition II.11.b). Pour $x \in X$ on a $f_Z(x) = \overline{\{x\}}^Z \cap Y$; donc les points de X sont fermés dans Z si et seulement si $f_Z(x) = \emptyset$ pour tout $x \in X$. Comme on a $f_Z | \beta X - X = f'_Z$ la conclusion résulte immédiatement de la proposition II.11.c).

II.13. Conservons les notations de II.12. Nous dirons parfois que f'_Z est associée à Z.

II.14. COROLLAIRE. Soient X et Y deux espaces localement compacts L'ensemble des extensions localement compactes de X par Y est en bijection avec l'ensemble des couples (ω, f), où ω désigne un ouvert de $\beta X - X$ et f une fonction continue de ω dans Y telle que, pour tout compact K de Y, $f^{-1}(K)$ soit compact. Cette bijection associe au couple (ω, f) l'extension $Z(\omega, f)$ suivante : $Z(\omega, f)$ est l'espace $X \amalg Y$ muni de la topologie pour laquelle une partie O de $X \amalg Y$ est ouverte si et seulement si :

(i) $O \cap Y$ est ouvert dans Y ;

(ii) $(O \cap X) \cup f^{-1}(O \cap Y)$ est ouvert dans βX.

Ce corollaire ne sera pas utilisé dans la suite. Sa démonstration ne présente pas de difficulté et nous l'omettrons.

II.15. On déduit facilement du corollaire II.14 le corollaire connu suivant (voir par exemple [26]).

COROLLAIRE. Soient X un espace localement compact et Y un espace compact. L'ensemble des compactifications de X par Y est en bijection avec l'ensemble des fonctions continues de $\beta X - X$ sur Y. La compactification Z associée à une fonction continue h de $\beta X - X$ sur Y est définie de la façon suivante. Notons $\bar{h}$ la fonction de βX sur $X \amalg Y$ telle que $\bar{h}(x) = x$ si $x \in X$ et $\bar{h}(x) = h(x)$ si $x \in \beta X - X$, et notons $\mathfrak{R}$

la relation d'équivalence $\bar{h}(x) = \bar{h}(x')$ *définie sur* βX . *Alors* Z *est l'espace topologique quotient de* βX *par* $\mathfrak{R}$.

II.16. Soient X un espace localement compact et X_1 une compactification de X . On notera h_{X,X_1} la fonction continue de $\beta X - X$ sur $X_1 - X$ associée à cette compactification d'après le corollaire II.15. On notera $\bar{h}_{X,X_1}$ la fonction de βX sur X_1 telle que $\bar{h}_{X,X_1}(x) = x$ si $x \in X$ et $\bar{h}_{X,X_1}(x) = h_{X,X_1}(x)$ si $x \in \beta X - X$. On notera plus simplement h et $\bar{h}$ ces fonctions s'il n'y a pas d'ambiguïté sur les espaces X et X_1.

II.17. Soient X un espace localement compact et $\mathrm{Comp}(X)$ l'ensemble de ses compactifications. Si X_1 et X_2 appartiennent à $\mathrm{Comp}(X)$ posons $X_1 \leqslant X_2$ s'il existe une fonction continue φ de X_2 sur X_1 telle que $\varphi(x) = x$ pour $x \in X$. Cette relation est une relation d'ordre sur $\mathrm{Comp}(X)$. L'espace $\dot{X}$ est le plus petit élément de $\mathrm{Comp}(X)$ et, d'après le corollaire II.15, l'espace βX est son plus grand élément.

II.18. Soient X un espace localement compact, X_1 et X_2 deux compactifications de X telles $X_1 \leqslant X_2$, et φ la fonction continue de X_2 sur X_1 telle que $\varphi(x) = x$ si $x \in X$. D'après ([22] , lemme 6.11), $\varphi' = \varphi|X_2 - X$ est continue de $X_2 - X$ sur $X_1 - X$. Soit Y un espace localement quasi-compact, $f \in \mathscr{C}(X_1 - X, \mathscr{F}(Y))$ et $Z \in \mathscr{S}(X,Y)$. On s'assure facilement que Z est associé à f si et seulement si Z est associé à $f \circ \varphi' \in \mathscr{C}(X_2 - X, \mathscr{F}(Y))$.

II.19. PROPOSITION. *Soient* X *un espace localement compact,* Y *un espace localement quasi-compact et* $Z \in \mathscr{S}(X,Y)$. *Identifions canoniquement* X *à un sous-espace topologique de* $\mathscr{F}(Z)$ (voir II.7). *L'ensemble des compactifications* X_1 *de* X *telles que* Z *soit obtenu par l'intermédiaire de* X_1 (*voir* II.9) *possède un plus petit élément, à savoir l'adhérence de* X *dans* $\mathscr{F}(Z)$.

Soient X_1 une compactification de X et $f_1 \in \mathscr{C}(X_1 - X, \mathscr{F}(Y))$ telle que Z soit associée à f_1 . Soit g_1 la fonction de X_1 dans $\mathscr{F}(Z)$ telle que $g_1(x) = x$ (identifié à $\{x\}$) si $x \in X$ et $g_1(x) = f_1(x)$ si $x \in X_1 - X$. D'après la proposition II.8.c), g_1 est continue. Posons $X' = g_1(X_1)$; alors X' est compact et c'est l'adhérence de X dans $\mathscr{F}(Z)$. De plus, d'après ([22] , lemme 6.11), on a $g_1(X_1 - X) = X' - X$. Il en résulte que X est ouvert dans X' et que $X' - X \subset \mathscr{F}(Y) \subset \mathscr{F}(Z)$. On a évidemment $X_1 \geqslant X'$. Notons f' l'injection canonique de $X' - X$ dans $\mathscr{F}(Y)$. Comme $f_1 = f' \circ (g_1|X_1 - X)$, l'extension Z est associée à f' (voir II.18).

II.20. Indiquons un procédé pour construire des éléments de $\mathscr{S}(X,Y)$.

PROPOSITION. *Soient* X *un espace localement compact,* Y *un espace* *localement quasi-compact et* l *une fonction continue de* X *dans* $\mathcal{F}(Y)$. *Soit* Ω *l'ensemble des parties* O *de* $X \coprod Y$ *telles que* :

(i) $O \cap X$ *est ouvert dans* X *et* $O \cap Y$ *est ouvert dans* Y ;

(ii) *pour tout* $y \in O \cap Y$, *il existe un voisinage* V *de* y *dans* Y , *contenu dans* $O \cap Y$, *et un compact* K *de* X *tels que*

$$(X - K) \cap l^{-1*}(V) \subset O \cap X \ .$$

Alors Ω *est l'ensemble des ouverts d'une topologie sur* $X \coprod Y$ *qui en fait un élément* Z *de* $\mathcal{S}(X,Y)$. *En outre, si on note* l' *le prolongement continu de* l *à* βX , *l'espace* Z *est l'élément de* $\mathcal{S}(X,Y)$ *associé à* $f = l' | \beta X - X$.

Notons $Z(f)$ l'élément de $\mathcal{S}(X,Y)$ associé à f . Soit O un ouvert de $Z(f)$. Il vérifie (i) . Soit $y \in O \cap Y$ et prenons un voisinage quasi-compact V de y dans Y ,contenu dans $O \cap Y$; alors $l'^{-1*}(V)$ est un compact de βX . Posons $K = l'^{-1*}(V) - ((O \cap X) \cup f^{-1*}(O \cap Y))$; c'est une partie compacte de X telle que $(X - K) \cap l^{-1*}(V) \subset O \cap X$. Ainsi O vérifie (ii). Soit maintenant $O \in \Omega$ et montrons que $(O \cap X) \cup f^{-1*}(O \cap Y)$ est ouvert dans βX . Il suffit de montrer que cet ensemble est voisinage de chacun des points de $f^{-1*}(O \cap Y)$. Soient $z \in f^{-1*}(O \cap Y)$ et $y \in f(z) \cap O$. Prenons un voisinage V de y dans Y , contenu dans $O \cap Y$, et un compact K de X tels que $(X - K) \cap l^{-1*}(V) \subset O \cap X$. Alors $l'^{-1*}(V) \cap (\beta X - K)$ est un voisinage de z dans βX contenu dans $(O \cap X) \cup f^{-1*}(O \cap Y)$, ce qui achève la démonstration.

II.21. Conservons les notations de la proposition II.20. La topologie de Z s'interprète de la façon suivante. Notons $\mathcal{F}_1(Y)$ l'ensemble des fermés de Y muni de la topologie sousfellienne. L'espace Y est homéomorphe à un sous-espace de $\mathcal{F}_1(Y)$ par l'application qui à $y \in Y$ fait correspondre $\overline{\{y\}}^Y$; en effet, pour tout ouvert ω de Y , on a $\overline{\{y\}}^Y \cap \omega \neq \emptyset$ si et seulement si $y \in \omega$. On identifie ainsi Y à son image dans $\mathcal{F}_1(Y)$. Notons G le graphe de l dans $X \times \mathcal{F}_1(Y)$ et Z' le sous-espace $G \cup (\{x_\infty\} \times Y)$ de l'espace produit $\ddot{X} \times \mathcal{F}_1(Y)$, où x_∞ désigne le point à l'infini de X . Alors la fonction φ de Z sur Z' telle que $\varphi(x) = (x, l(x))$ si $x \in X$ et $\varphi(y) = (x_\infty , y)$ si $y \in Y$ est un homéomorphisme de Z sur Z' muni de la topologie induite par celle de $\ddot{X} \times \mathcal{F}_1(Y)$ Soit $y \in Y$. Prouvons la continuité de φ en Y . Soit $V \times W$ un voisinage ouvert de (x_∞ , y) et montrons que $\varphi^{-1}(V \times W)$ est ouvert dans Z . On peut supposer qu'il existe un ouvert ω de Y tel que

$$W = \{F \in \mathcal{F}(Y) \mid F \cap \omega \neq \emptyset\} \ ;$$

alors $\varphi^{-1}(V \times W) = (l^{-1*}(\omega) \cap V) \cup \omega$. Comme $X - V = \ddot{X} - V$ est compact, l'ensemble $(l^{-1*}(\omega) \cap V) \cup \omega$ satisfait à la condition (ii) de la proposition II.20. C'est donc un ouvert de Z puisqu'il satisfait évidemment à la condition (i). Montrons que φ^{-1} est continue au point (x_∞, y). Soit O un ouvert de Z contenant y. Il existe un voisinage ω de y dans Y contenu dans $O \cap Y$, et un compact K de X tels que

$$(X - K) \cap 1^{-1*}(\omega) \subset O \cap X .$$

Posons $W = \{F \in \mathcal{F}(Y) \mid F \cap \omega \neq \emptyset\}$. Alors on a $\varphi^{-1}((\ddot{X} - K) \times W) \subset O$. Ainsi φ^{-1} est continue en (x_∞, y). Comme $\varphi|X$ est évidemment un homéomorphisme de X sur G, la démonstration est achevée.

Ce résultat généralise le théorème de [35].

II.22. Remarquons que tout élément de $\mathcal{G}(X,Y)$ ne s'obtient pas de la façon décrite dans la proposition II.20. Il suffit pour cela de prouver qu'une fonction continue de $\beta X - X$ dans $\mathcal{F}(Y)$ ne se prolonge pas toujours en une fonction continue de βX dans $\mathcal{F}(Y)$. Prenons $X = \mathbb{N}$ et $Y = \beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$; soit f la fonction de $\beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$ dans $\mathcal{F}(\beta\mathbb{N} - \mathbb{N})$ telle que $f(x) = \{x\}$ pour tout $x \in \beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$. Supposons que f se prolonge en une fonction continue de $\beta\mathbb{N}$ dans $\mathcal{F}(\beta\mathbb{N} - \mathbb{N})$, notée encore f. L'ensemble $\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = \emptyset\}$ est un fermé de $\beta\mathbb{N}$ disjoint de $\beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$, et on peut donc supposer que cet ensemble est vide. Pour tout $x \in \beta\mathbb{N}$ choisissons un point $g(x)$ appartenant à $f(x)$. Montrons que la fonction g de $\beta\mathbb{N}$ dans $\beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$ ainsi définie est continue. Il suffit de prouver la continuité en chaque point $x \in \beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$. Soit ω un voisinage ouvert de x dans $\beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$. Alors l'ensemble $\{x' \in \beta\mathbb{N} \mid f(x') \cap ((\beta\mathbb{N} - \mathbb{N}) - \omega) = \emptyset\}$ est un voisinage de x dans $\beta\mathbb{N}$ et, sur ce voisinage, on a $g(x') \in f(x') \subset \omega$. Ainsi g est une rétraction de $\beta\mathbb{N}$ sur $\beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$. Mais, d'après ([5], th. 2.7), il n'existe pas de rétraction de $\beta\mathbb{N}$ sur $\beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$.

CHAPITRE III

L'extension L(A)

Pour toute C^*-algèbre A à spectre séparé nous allons introduire et étudier dans ce chapitre une extension de A qui est fondamentale pour la suite.

III.1. Quelques préliminaires.

III.1.1. Soient T un espace localement compact et $\mathcal{A} = ((A(t))_{t\in T}, \Lambda)$ un champ continu de C^*-algèbres sur T. Soit $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$ l'ensemble des $a \in \Lambda$ tels que $\sup_{t\in T} \|a(t)\| < +\infty$. Munissons $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$ de la norme $\|a\| = \sup_{t\in T} \|a(t)\|$. Pour cette norme la sous-algèbre involutive $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$ de Λ est une C^*-algèbre. Soit $\mathcal{C}^\circ(\mathcal{A})$ l'idéal bilatère fermé des $a \in \mathcal{C}^b(\mathcal{A})$ tels que $\|a(t)\|$ tende vers 0 à l'infini sur T. Nous dirons que $\mathcal{C}^\circ(\mathcal{A})$ est la C^*-algèbre définie par $\mathcal{A}$ (voir [16], 10.4.1). Pour $t \in T$, on a évidemment $A(t) = \{a(t) \mid a \in \mathcal{C}^\circ(\mathcal{A})\}$; nous dirons que $A(t)$ est la composante de $\mathcal{C}^\circ(\mathcal{A})$ (et de $\mathcal{A}$) en t. Si B est une partie de $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$ nous poserons $B(t) = \{a(t) \mid a \in B\}$.

Notons que la structure de $\mathcal{C}^\circ(\mathcal{A})$ est assez bien connue (en particulier son spectre est connu) dès que les composantes $A(t)$ sont connues (voir [19], §1.2).

III.1.2. LEMME. <u>Soient</u> T <u>un espace localement compact et</u> $\mathcal{A}$ <u>un champ continu de</u> C^*-<u>algèbres sur</u> T . <u>Soit</u> B <u>une sous</u>-C^*-<u>algèbre de</u> $A = \mathcal{C}^\circ(\mathcal{A})$ <u>telle que, pour tout</u> $t \in T$, <u>on ait</u> $A(t) = B(t)$. <u>Les deux conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) $B = A$;

(ii) <u>pour tout</u> $b \in B$ <u>et tout</u> $f \in \mathcal{C}^b(T)$, <u>le champ</u> $t \mapsto f(t)b(t)$ <u>appartient à</u> B .

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : évident.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : supposons que B satisfait à la condition (ii). Considérons deux points distincts t_1 et t_2 dans T et prenons $\alpha_1 \in A(t_1)$ et $\alpha_2 \in A(t_2)$. Soient b_1 et b_2 deux éléments de B tels que $b_1(t_1) = \alpha_1$ et $b_2(t\ ) = \alpha_2$. Soit $f \in \mathcal{C}^b(T)$ telle que $f(t_1) = 1$ et $f(t_2) = 0$ et appelons b l'élément $t \mapsto f(t)b_1(t) + (1 - f(t))b_2(t)$. Il appartient à B par hypothèse et on a $b(t_1) = \alpha_1$ et $b(t_2) = \alpha_2$. Il suffit maintenant d'appliquer ([19], corol. du th. 1.4).

III.1.3. LEMME. Soient T un espace localement compact et $\mathcal{A}$ un champ continu de C^*-algèbres sur T. Soit B une sous-C^*-algèbre de $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$ telle que, pour tout $b \in B$ et tout $f \in \mathcal{C}^b(T)$, le champ $t \longmapsto f(t)b(t)$ appartienne à B. Il existe un champ continu unique (à isomorphisme près) $\mathcal{B}'$ de C^*-algèbres sur βT tel que $\varphi : a \longmapsto a|T$ soit un isomorphisme de $\mathcal{C}^b(\mathcal{B}')$ sur B.

Pour tout $b \in B$, la fonction ξ_b définie par $\xi_b(t) = \|b(t)\|$ est continue et bornée sur T ; elle admet donc un prolongement continu à βT que nous noterons encore ξ_b. Pour tout $t \in \beta T$, on a $\xi_b(t) \leqslant \|b\|$ et $b \longmapsto \xi_b(t)$ est une C^*-semi-norme sur B au sens de ([16], 1.9.3). Appelons $I(t)$ l'idéal bilatère fermé des $b \in B$ tels que $\xi_b(t) = 0$. Notons $B'(t)$ la C^*-algèbre quotient de B par $I(t)$ et $b(t)$ l'image de $b \in B$ dans $B'(t)$. Remarquons que si $t \in T$ la C^*-algèbre $B'(t)$ s'identifie canoniquement à $B(t) = \{b(t) \mid b \in B\}$. Soit B' l'ensemble des champs d'opérateurs $t \longmapsto b(t)$ sur βT avec $b \in B$. C'est une sous-algèbre involutive de $\prod_{t \in \beta T} B'(t)$ et, pour tout $b \in B'$ on a $\sup_{t \in \beta T} \|b(t)\| = \sup_{t \in T} \|b(t)\|$. Il en résulte que l'application $\varphi : b \longmapsto b|T$ de B' sur B est un isomorphisme. Pour tout $t \in \beta T$, on a évidemment $B'(t) = \{b(t) \mid b \in B'\}$. De plus, pour tout $b \in B'$, la fonction $t \longmapsto \|b(t)\| = \xi_b(t)$ est continue sur βT. D'après ([16], prop. 10.2.3 et 10.3.2), il existe un champ continu unique $\mathcal{B}' = ((B'(t))_{t \in \beta T}, \Lambda')$ de C^*-algèbres sur βT tel que $b \in \Lambda'$ pour tout $b \in B'$. Montrons que pour tous $b \in B'$ et $f \in \mathcal{C}^b(\beta T)$ le champ $t \longmapsto f(t)b(t)$ appartient à B'. Appelons c le champ $t \longmapsto f(t)b(t)$ restreint à T. Par hypothèse, c appartient à B et on vérifie immédiatement que $c(t) = f(t)b(t)$ pour tout $t \in \beta T$. Alors, d'après le lemme III.1.2, on a $B' = \mathcal{C}^b(\mathcal{B}')$.

Montrons l'unicité de $\mathcal{B}'$. Soit $\mathcal{B}'' = ((B''(t))_{t \in \beta T}, \Lambda'')$ un autre champ continu de C^*-algèbres sur βT tel que $\varphi'' : a \longmapsto a|T$ soit un isomorphisme de $\mathcal{C}^b(\mathcal{B}'')$ sur B. Alors $\mathcal{C}^b(\mathcal{B}')$ et $\mathcal{C}^b(\mathcal{B}'')$ sont canoniquement isomorphes. Il en résulte que $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont isomorphes.

III.1.4. Grâce à φ nous identifierons B à $\mathcal{C}^b(\mathcal{B}')$.

III.2. Définition de $L(A)$ et premières propriétés.

III.2.1. DEFINITION. Soit A une C^*-algèbre à spectre séparé. D'après ([24], th. 4.1) la fonction $t \longmapsto \|a(t)\|$ est continue sur $\hat{A}$ pour tout $a \in A$. Alors, grâce à ([16], prop. 10.2.3 et 10.3.2) il existe un champ continu unique $\mathcal{L}_A = ((A(t))_{t \in \hat{A}}, \Lambda)$ de C^*-algèbres sur $\hat{A}$ tel que $a \in \Lambda$ pour tout $a \in A$. Nous dirons que ce champ est défini par A.

Grâce à ([19], th. 2.3) nous identifierons canoniquement A à $\mathcal{C}^\circ(\mathcal{L}_A)$, c'est-à-dire à un idéal bilatère fermé de $\mathcal{C}^b(\mathcal{L}_A)$. Nous noterons

$L(A)$ *l'extension* $\mathcal{C}^b(\mathcal{L}_A)$ *de* A .

III.2.2. LEMME. *Soit* A *une* C^**-algèbre à spectre séparé.*

(i) *Il existe un homomorphisme unique* j *de* $L(A)$ *dans* $M(A)$ *tel que* $j(a) = a$ *pour tout* $a \in A$.

(ii) *Pour tout* $l \in L(A)$ *il existe* m *unique* $\in M(A)$ *tel que* $m|\hat{A} = l$ *et on a* $j(l) = m$. *En particulier* j *est injectif et* $j(L(A))$ *est l'idéal bilatère fermé des* $m \in M(A)$ *tels que* $m|\hat{A} \in L(A)$.

(i) L'existence et l'unicité de j résultent de ([3], prop. 3.7 (i)).

(ii) Notons i l'application de $M(A)$ dans $\prod_{t \in \hat{A}} A(t)$ telle que $i(m) = m|\hat{A}$ pour tout $m \in M(A)$. Remarquons que $i(a) = a$ pour tout $a \in A$. D'après ([3], prop. 6.2) $\hat{A}$ est dense dans $M(A)^\wedge$; pour $m \in M(A)$, on a donc $i(m) = 0$ si et seulement si $m = 0$. Soit $l \in L(A)$. On a $i \circ j(l)a = i(j(l)a) = i \circ j(la) = la$ pour tout $a \in A$, d'où $i \circ j(l) = l$. Pour achever la démonstration de (ii) il reste à vérifier que la C^*-algèbre des $m \in M(A)$ tels que $m|\hat{A} \in L(A)$ est un idéal bilatère fermé de $M(A)$. Il suffit de montrer que cette C^*-algèbre est un idéal à gauche dans $M(A)$. Soit $m \in M(A)$ et soit $m' \in M(A)$ tel que $m'|\hat{A} \in L(A)$. Prenons $t_1 \in \hat{A}$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a \in A$ tel que $\|m'(t) - a(t)\| < \varepsilon$ au voisinage de t_1 , d'où $\|m(t)m'(t) - m(t)a(t)\| < \varepsilon\|m\|$ sur ce voisinage. Comme $ma \in A$, le champ mm' est continu en t_1 pour la structure $\mathcal{L}_A$. Ainsi $mm'|\hat{A}$ appartient à $\mathcal{L}_A$.

III.2.3. Grâce à j nous identifierons $L(A)$ à un idéal bilatère fermé de $M(A)$.

III.2.4. LEMME. *Soit* A *une* C^**-algèbre à spectre séparé. Alors* $L(A)$ *est le plus grand idéal bilatère fermé* I *de* $M(A)$ *qui contient* A *et tel que les points de* $\hat{A}$ *soient fermés et séparés dans* $\hat{I}$.

Soit I un idéal bilatère fermé de $M(A)$ contenant A et soit $t \in \hat{A}$. Alors t est fermé dans $\hat{I}$ si et seulement si $I(t) = A(t)$. De plus, d'après ([11], § 1) t est séparé dans $\hat{I}$ si et seulement si $t' \longmapsto \|m(t')\|$ est continue en t pour tout $m \in I$. Il en résulte que les points de $\hat{A}$ sont fermés et séparés dans $\hat{I}$ si et seulement si on a $I \subset L(A)$.

III.2.5. LEMME. *Soient* A *une* C^**-algèbre à spectre séparé et* $\mathcal{L}_A$ *le champ continu de* C^**-algèbres défini par* A *sur* $\hat{A}$. *Soit* $\mathcal{L}'_A$ *le champ continu de* C^**-algèbres sur* $\beta\hat{A}$ *tel que* $L(A) = \mathcal{C}^b(\mathcal{L}'_A)$ (*voir* III.1.3 *et* III.1.4) *et soit* $\mathcal{L}''_A$ *le champ induit par* $\mathcal{L}'_A$ *sur* $\beta\hat{A} - \hat{A}$. *L'application* ψ *qui à* $l \in L(A)$ *fait correspondre* $l|\beta\hat{A} - \hat{A}$ *est un homomorphisme de* $L(A)$ *sur* $\mathcal{C}^b(\mathcal{L}''_A)$ *de noyau* A .

Pour $l \in L(A)$ on a évidemment $\psi(l) = 0$ si et seulement si $l \in \mathcal{C}^{\circ}(\mathcal{L}_A) = A$. D'après ([16], prop. 10.2.3), $\mathcal{L}_A''$ est le champ continu de C^*-algèbres défini par $\psi(L(A))$ sur $\beta\hat{A} - \hat{A}$. On a $\psi(L(A)) \subset \mathcal{C}^b(\mathcal{L}_A'')$. Soient $\psi(l) \in \psi(L(A))$ et $f \in \mathcal{C}(\beta\hat{A} - \hat{A})$. On peut évidemment supposer que f se prolonge en un élément de $\mathcal{C}(\beta\hat{A})$ que nous noterons encore f . Alors $t \longmapsto f(t)l(t)$ appartient à $L(A)$, et sa restriction à $\beta\hat{A} - \hat{A}$ appartient donc à $\psi(L(A))$. Il résulte maintenant du lemme III.1.2 que $\mathcal{C}^b(\mathcal{L}_A'') = \psi(L(A))$.

III.2.6. Conservons les notations du lemme III.2.5 et précisons les identifications que nous ferons constamment dans la suite. La C^*-algèbre $L(A) = \mathcal{C}^b(\mathcal{L}_A)$ sera canoniquement identifiée, soit à $\mathcal{C}^b(\mathcal{L}_A')$ (voir III.2.5), soit à la C^*-algèbre des $m \in M(A)$ tels que $m|\hat{A} \in L(A)$ (voir III.2.3). De plus, grâce à ψ nous identifierons $L(A)/A$ à $\mathcal{C}^b(\mathcal{L}_A'')$, et la surjection canonique de $L(A)$ sur $L(A)/A$ sera identifiée à l'application qui à $l \in L(A)$ associe sa restriction à $\beta\hat{A} - \hat{A}$.

Nous utiliserons fréquemment le fait que $t \longmapsto f(t)l(t)$ appartient à $L(A)$ pour tout $l \in L(A)$ et tout $f \in \mathcal{C}(\beta\hat{A})$.

III.2.7. Soit A une C^*-algèbre à spectre séparé. Pour tout $t \in \hat{A}$ on a $L(A)(t) = A(t)$. Nous allons maintenant poursuivre notre étude de $L(A)$ en nous intéressant aux composantes $L(A)(t)$ pour $t \in \beta\hat{A} - \hat{A}$.

III.2.8. Soit X un espace localement compact. On notera Θ^X le filtre des voisinages de l'infini dans X et Φ^X l'ensemble des germes suivant Θ^X des fonctions continues bornées de X dans $]0,+\infty[$. Pour $x \in \beta X - X$, on notera Θ_x^X (ou plus simplement Θ_x) la trace sur X du filtre des voisinages de x dans βX . Ce filtre possède la propriété suivante que nous utiliserons souvent. Soit f une fonction continue définie sur un élément de Θ_x à valeurs dans $[0,+\infty[$. Alors $\lim_{t,\Theta_x} f(t)$ existe dans $[0,+\infty]$. On notera Φ_x^X (ou plus simplement Φ_x) l'ensemble des germes suivant Θ_x des fonctions continues bornées de X dans $]0,+\infty[$. Etant donnés φ et φ' dans Φ_x posons

$$\varphi \prec \varphi' \quad \text{si} \quad \lim_{t,\Theta_x} \varphi'(t)/\varphi(t) = \alpha < +\infty .$$

Cette relation est une relation de préordre sur Φ_x . Si $\alpha = 0$ on dira que φ' est strictement inférieur à φ . D'autre part, on définit dans Φ_x la relation d'équivalence

$$\varphi \simeq \varphi' \quad \text{si} \quad \lim_{t,\Theta_x} \varphi'(t)/\varphi(t) = \alpha \quad \text{avec} \quad 0 < \alpha < +\infty .$$

On notera $\Phi_x^{\bullet}$ le quotient de Φ_x par cette relation d'équivalence. La relation de préordre sur Φ_x est compatible avec l'équivalence et définit par passage au quotient une relation d'ordre total sur $\Phi_x^{\bullet}$. Dans $\Phi_x^{\bullet}$ il y a un plus grand élément : la classe des germes des fonctions constantes. Dans cette classe on choisira comme représentant canonique la fonction constante de valeur 1 sur X, qui sera notée 1.

III.2.9. Soit A une C^*-algèbre à spectre séparé. Soient $x \in \beta\hat{A} - \hat{A}$ et $\varphi \in \Phi_x$. L'idéal bilatère $E^\varphi(L(A),\Theta_x)$ des éléments de $L(A)$ qui sont φ-encadrés suivant Θ_x sera noté simplement $E_x^\varphi(A)$; son adhérence sera notée $\overline{E}_x^\varphi(A)$. De même, on notera simplement $Z_x^\varphi(A)$ l'idéal $Z^\varphi(L(A),\Theta_x)$ et $\overline{Z}_x^\varphi(A)$ son adhérence dans $L(A)$. Les propriétés suivantes se vérifient facilement :

les idéaux $E_x^\varphi(A)$, $\overline{E}_x^\varphi(A)$, $Z_x^\varphi(A)$ et $\overline{Z}_x^\varphi(A)$ ne dépendent que de la classe d'équivalence de φ ;

si $\varphi' \prec \varphi$ et φ non équivalent à φ', on a $Z_x^\varphi(A) \subset E_x^\varphi(A) \subset Z_x^{\varphi'}(A)$ et $\overline{Z}_x^\varphi(A) \subset \overline{E}_x^\varphi(A) \subset \overline{Z}_x^{\varphi'}(A)$.

Soit $\varphi \in \Phi^{\hat{A}}$. De même, on posera $E^\varphi(A) = E^\varphi(L(A),\Theta^{\hat{A}})$ et $Z^\varphi(A) = Z^\varphi(L(A),\Theta^{\hat{A}})$; on notera $\overline{E}^\varphi(A)$ et $\overline{Z}^\varphi(A)$ les adhérences de $E^\varphi(A)$ et $Z^\varphi(A)$ respectivement dans $L(A)$.

En particulier, nous aurons à considérer les idéaux $\overline{Z}_x^1(A)$, $Z_x^1(A)$, $\overline{E}_x^1(A)$, $E_x^1(A)$ pour $x \in \beta\hat{A} - \hat{A}$, et les idéaux $\overline{Z}^1(A)$, $Z^1(A)$, $\overline{E}^1(A)$, $E^1(A)$.

III.2.10. LEMME. Soient A une C^*-algèbre à spectre séparé, $x \in \beta\hat{A} - \hat{A}$ et $\varphi \in \Phi_x$. Soit $l \in L(A)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $l(x) \in \overline{E}_x^\varphi(A)(x)$ (resp. $\overline{Z}_x^\varphi(A)(x)$) ;

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in E_x^\varphi(A)$ (resp. $Z_x^\varphi(A)$) et $V \in \Theta_x$ tels que $\sup_{t\in V} \|a(t) - l(t)\| < \varepsilon$;

(iii) $l \in \overline{E}_x^\varphi(A)$ (resp. $\overline{Z}_x^\varphi(A)$).

(iii) $\Longrightarrow$ (i) : évident;

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : supposons que $l(x) \in \overline{E}_x^\varphi(A)(x)$ et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $a \in E_x^\varphi(A)$ tel que $\|a(x) - l(x)\| < \varepsilon$. D'après la continuité de $t \longmapsto \|a(t) - l(t)\|$, il existe un voisinage ω de x dans $\beta\hat{A}$ tel que $\|a(t) - l(t)\| < \varepsilon$ sur ω. Il suffit de poser $V = \omega \cap \hat{A}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : supposons la condition (ii) vérifiée et montrons que l est adhérent à $E_x^\varphi(A)$. Prenons $\varepsilon > 0$; il existe $a \in E_x^\varphi(A)$ et $V \in \Theta_x$ tels que $\sup_{t\in V} \|a(t) - l(t)\| < \varepsilon$. D'autre part, il existe $W \in \Theta_x$ contenu dans V et une fonction continue f de $\hat{A}$ dans $[0,1]$ tels que $f(t) = 0$ si $t \notin V$ et $f(t) = 1$ si $t \in W$. Alors l'élément b défini par $b(t) = (1-f(t))l(t) + f(t)a(t)$ pour $t \in \hat{A}$ appartient à $E_x^\varphi(A)$ et on a $\sup_{t\in\hat{A}} \|l(t) - b(t)\| < \varepsilon$.

III.2.11. LEMME. Soient A une C^*-algèbre à spectre séparé et $\varphi \in \Phi^{\hat{A}}$

Alors :

(i) $E^{\varphi}(A) = \bigcap_{x\in\beta\hat{A}-\hat{A}} E^{\varphi}_x(A)$;

(ii) on a $E^{\varphi}_x(A)(x) = E^{\varphi}(A)(x)$ pour tout $x\in\beta\hat{A}-\hat{A}$;

(i) Pour démontrer (i) il suffit de vérifier que tout $a\in\bigcap_{x\in\beta\hat{A}-\hat{A}} E^{\varphi}_x(A)$ appartient à $E^{\varphi}(A)$. Pour tout $x\in\beta\hat{A}-\hat{A}$, il existe un voisinage ouvert ω_x de x dans $\beta\hat{A}$ tel que

$$\sup_{t\in\omega_x\cap\hat{A}} \varphi(t).\mathrm{rg}\ a(t) < +\infty \quad .$$

Extrayons un recouvrement fini $(\omega_{x_1},\dots,\omega_{x_n})$ de $\beta\hat{A}-\hat{A}$ et posons $V = (\bigcup_{i=1}^{n}\omega_{x_i})\cap\hat{A}$. On a $V\in\Theta^{\hat{A}}$ et $\sup_{t\in V}\varphi(t).\mathrm{rg}\ a(t) < +\infty$.

(ii) Comme on a évidemment $E^{\varphi}(A)(x)\subset E^{\varphi}_x(A)(x)$, il suffit de prouver que $E^{\varphi}_x(A)(x)\subset E^{\varphi}(A)(x)$. Soit $l\in E^{\varphi}_x(A)$; par définition il existe $V\in\Theta_x$ tel que $\sup_{t\in V}\varphi(t).\mathrm{rg}\ l(t) < +\infty$. D'autre part, il existe $W\in\Theta_x$, contenu dans V , et une fonction continue f de $\hat{A}$ dans $[0,1]$ qui vaut 0 si $t\notin V$ et 1 si $t\in W$. Alors l'élément $a\in L(A)$ défini par $a(t) = f(t)l(t)$ pour tout $t\in\hat{A}$ appartient à $E^{\varphi}(A)$ et on a $a(x) = l(x)$.

III.2.12. On démontre de même les égalités suivantes pour $\varphi\in\Phi^{\hat{A}}$:

$$\overline{E}^{\varphi}(A) = \bigcap_{x\in\beta\hat{A}-\hat{A}}\overline{E}^{\varphi}_x(A)\ ,\quad Z^{\varphi}(A) = \bigcap_{x\in\beta\hat{A}-\hat{A}} Z^{\varphi}_x(A)\ ,\quad \overline{Z}^{\varphi}(A) = \bigcap_{x\in\beta\hat{A}-\hat{A}}\overline{Z}^{\varphi}_x(A)\ ;$$

et, pour $x\in\beta\hat{A}-\hat{A}$ et $\varphi\in\Phi^{\hat{A}}$:

$$\overline{E}^{\varphi}(A)(x) = \overline{E}^{\varphi}_x(A)(x)\ ,\quad Z^{\varphi}(A)(x) = Z^{\varphi}_x(A)(x)\ ,\quad \overline{Z}^{\varphi}(A)(x) = \overline{Z}^{\varphi}_x(A)(x)\ .$$

D'après le lemme III.2.10, on a $A\subset\overline{Z}^{\varphi}_x(A)$ pour tout $x\in\beta\hat{A}-\hat{A}$ et tout $\varphi\in\Phi_x$, d'où $A\subset\overline{Z}^{\varphi}(A)\subset\overline{E}^{\varphi}(A)$ pour tout $\varphi\in\Phi^{\hat{A}}$, d'après ce qui précède.

III.2.13. PROPOSITION. Soit A une C^*-algèbre à spectre séparé.

(i) Il existe un champ continu unique $\mathcal{L}'^{1}_A$ de C^*-algèbres sur $\beta\hat{A}$ tel que $\overline{E}^1(A) = \mathcal{C}^b(\mathcal{L}'^{1}_A)$.

(ii) Pour tout $x\in\beta\hat{A}-\hat{A}$, la C^*-algèbre $\overline{E}^1(A)(x)$ est duale.

(iii) Supposons que A est liminaire. Alors $\overline{E}^1(A)$ est liminaire.

(iv) Supposons que A est uniformément liminaire. Alors $\overline{E}^1(A)$ est uniformément liminaire et c'est l'adhérence de l'ensemble des éléments de $L(A)$ qui sont encadrés sur $\hat{A}$.

(i) Soit $\mathcal{L}'_A = ((L(A)(t))_{t\in\beta\hat{A}}, \Lambda')$ le champ continu de C^*-algèbres sur $\beta\hat{A}$ tel que $L(A) = \mathcal{C}^b(\mathcal{L}'_A)$. Appelons Λ'_1 l'ensemble des $l\in\Lambda'$ tels que $l(t)\in\overline{E}^1(A)(t)$ pour tout $t\in\beta\hat{A}$ et posons

$$\mathcal{L}'^{1}_A = ((\overline{E}^1(A)(t))_{t\in\beta\hat{A}}, \Lambda'_1)\ .$$

On a évidemment $\overline{E}^1(A)(t) = \{l(t)\ |\ l\in\Lambda'_1\}$ pour tout $t\in\beta\hat{A}$, et donc $\mathcal{L}'^{1}_A$ est un champ continu de C^*-algèbres. Comme $\overline{E}^1(A)$ est un idéal bilatère fermé de $\mathcal{C}^b(\mathcal{L}'^{1}_A)$, il résulte de ([16], 10.4.2) que $\overline{E}^1(A) = \mathcal{C}^b(\mathcal{L}'^{1}_A)$.

(ii) Soit $x \in \beta\hat{A} - \hat{A}$. Pour tout $l \in \overline{E}^1(A)$, on a

$$\lim_{t,\Theta_x} \|l(t)\| = \|l(x)\| .$$

Alors, d'après I.1.8 corollaire b), le filtre Θ_x converge vers chacune de ses valeurs d'adhérence dans $\overline{E}^1(A)^\wedge$, et $\overline{E}^1(A)(x)^\wedge$ est l'ensemble des limites de Θ_x . Comme $\overline{E}^1(A)$ est encadrée suivant Θ_x , l'ensemble $\overline{E}^1(A)(x)^\wedge$ est discret d'après la proposition I.2.24. De plus, d'après la proposition I.2.22, la C^*-algèbre $\overline{E}^1(A)(x)$ est liminaire. On en déduit que $\overline{E}^1(A)(x)$ est isomorphe au produit restreint (voir [16], 1.9.14) d'une famille de C^*-algèbres élémentaires et donc que $\overline{E}^1(A)(x)$ est duale (voir [16], 4.7.20)

(iii) Supposons que A est liminaire. Alors d'après (i),(ii) et ([16], th. 10.4.3), $\overline{E}^1(A)$ est liminaire.

(iv) Supposons maintenant que A est uniformément liminaire. Soient $l \in \overline{E}^1(A)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $V \in \Theta^{\hat{A}}$ et $a \in E^1(A)$ tels que $\|a - l\| \leqslant \varepsilon$ et $\sup_{t \in V} \mathrm{rg}\, a(t) < +\infty$. On peut trouver $W \in \Theta^{\hat{A}}$ contenu dans V et une fonction continue f de $\hat{A}$ dans $[0,1]$ égale à 0 hors de V et à 1 sur W . L'élément b défini par $b(t) = (1-f(t))l(t)$ sur $\hat{A}$ appartient à A . Il existe alors $c \in A$, encadré sur $\hat{A}$, tel que $\|b - c\| \leqslant \varepsilon$. Soit d l'élément de L(A) défini par $d(t) = c(t) + f(t)a(t)$ si $t \in \hat{A}$. Cet élément est encadré sur $\hat{A}$ et on a $\|l - d\| \leqslant 2\varepsilon$. Par ailleurs, $\overline{E}^1(A)$ contient évidemment l'adhérence de l'ensemble des éléments de L(A) qui sont encadrés sur $\hat{A}$.

La première assertion de (iv) résulte de ce qui précède et de la proposition I.2.23 (rappelons que $\hat{A}$ est dense dans $M(A)^\wedge$).

III.3. Etude de L(A) lorsque A est à trace continue.

III.3.1. Démontrons brièvement le résultat connu affirmant qu'une C^*-algèbre A à trace continue est uniformément liminaire. L'ensemble des $a \in A^+$, à support compact et tels que $t \longmapsto \mathrm{Tr}\, a(t)$ soit finie et continue sur $\hat{A}$ est la partie positive d'un idéal bilatère facial I dense dans A . Soit $a \in I^+$. On a $\sup_{t \in \hat{A}} \mathrm{Tr}\, a(t) = m < +\infty$; donc, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t \in \hat{A}$, on a $\varepsilon . \mathrm{rg}\, g_\varepsilon(a)(t) \leqslant m$, d'où $\sup_{t \in \hat{A}} \mathrm{rg}\, g_\varepsilon(a)(t) < +\infty$. Enfin, on a évidemment $\|g_\varepsilon(a) - a\| \leqslant \varepsilon$. Il en résulte que l'idéal bilatère facial des éléments de A qui sont encadrés sur $\hat{A}$ est dense dans A .

Remarquons que $\mathcal{K}(A)$ est contenu dans I . Donc, pour tout $a \in \mathcal{K}(A)$, la fonction $t \longmapsto \mathrm{Tr}\, a(t)$ est continue sur $\hat{A}$. De même, $\mathcal{K}(A)$ est contenu dans l'idéal bilatère facial des éléments de A qui sont encadrés sur $\hat{A}$. Donc, pour tout $a \in \mathcal{K}(A)$, on a $\sup_{t \in \hat{A}} \mathrm{rg}\, a(t) < +\infty$.

III.3.2. LEMME. <u>Soit</u> A <u>une</u> C^*-<u>algèbre à trace continue</u>.

(i) <u>Soient</u> ω <u>un ouvert de</u> $\hat{A}$ <u>et</u> $l \in L(A)$ <u>tels que</u> $\sup_{t\in\omega} \operatorname{rg} l(t) < +\infty$. <u>Alors</u> $t \longmapsto \operatorname{Tr} l(t)$ <u>est continue sur</u> ω .

(ii) <u>Pour tout</u> $l \in \mathcal{K}(L(A))$, <u>la fonction</u> $t \longmapsto \operatorname{Tr} l(t)$ <u>est finie et continue sur</u> $\hat{A}$.

(i) Vérifions d'abord que, pour tout compact K de $\hat{A}$ et tout $b \in L(A)$, il existe $a \in A$ tel que $a(t) = b(t)$ si $t \in K$. Prenons une fonction continue complexe f sur $\hat{A}$, à support compact, telle que $f(t) = 1$ si $t \in K$. Alors $t \longmapsto f(t)b(t)$ appartient à $L(A)$ et comme cet élément est nul en dehors d'un compact il appartient à A . Enfin, on a $f(t)b(t) = b(t)$ si $t \in K$.

Soit $l \in L(A)$ tel que $\sup_{t\in\omega} \operatorname{rg} l(t) < +\infty$. Prenons $t_0 \in \omega$ et soit $a \in A$ tel que $a(t) = l(t)$ au voisinage de t_0 . Alors a est encadré au voisinage de t_0 et donc, d'après ([19], th. 4.1) la fonction $t \longmapsto \operatorname{Tr} a(t)$ est continue en t_0 . Il en résulte que $t \longmapsto \operatorname{Tr} l(t)$ est continue en t_0 .

(ii) Soit $l \in \mathcal{K}(L(A))$. Il suffit de vérifier que pour tout compact K de $\hat{A}$ on a $\sup_{t\in K} \operatorname{rg} l(t) < +\infty$, et d'appliquer (i). L'ensemble des $b \in L(A)$ tels que $\sup_{t\in K} \operatorname{rg} b(t) < +\infty$ est un idéal bilatère facial I_K de $L(A)$. Soit $b \in L(A)^+$. Il existe $a \in A^+$ tel que $a(t) = b(t)$ si $t \in K$, d'où $g_\varepsilon(b)(t) = g_\varepsilon(a)(t)$ pour tous $\varepsilon > 0$ et $t \in K$. Comme $g_\varepsilon(a) \in \mathcal{K}(A)$ (voir 0.10), on a $\sup_{t\in K} g_\varepsilon(b)(t) < +\infty$. Ainsi I_K est dense dans $L(A)$ et, par conséquent, contient $\mathcal{K}(L(A))$.

III.3.3. PROPOSITION. <u>Soient</u> A <u>une</u> C^*-<u>algèbre à trace continue</u>, $x \in \beta\hat{A} - \hat{A}$ <u>et</u> $\varphi \in \Phi_x$.

(i) <u>Sur</u> $\overline{E}^\varphi_x(A)(x)^+$, <u>il existe une trace s.c.i. unique</u> T^φ_x <u>telle que, pour tout</u> $l \in E^\varphi_x(A)^+$ <u>on ait</u> $\lim_{t,\Theta_x} \varphi(t).\operatorname{Tr} l(t) = T^\varphi_x(l(x)) < +\infty$.

(ii) <u>Soit</u> $b \in \overline{E}^\varphi_x(A)(x)^+$; <u>on a</u> $T^\varphi_x(b) = 0$ <u>si et seulement si</u> $b \in \overline{Z}^\varphi_x(A)(x)$.

Pour tout $l \in E^\varphi_x(A)$, montrons l'existence de $\lim_{t,\Theta_x} \varphi(t).\operatorname{Tr} l(t)$. Par hypothèse, il existe V ouvert, appartenant à Θ_x , tel que $\sup_{t\in V} \varphi(t).\operatorname{rg} l(t) < +\infty$. Comme φ est continue et ne s'annule pas sur V , on déduit de l'inégalité précédente que l est encadré au voisinage de chaque point de V . Alors, d'après le lemme III.3.2, la fonction $t \longmapsto \operatorname{Tr} l(t)$ est continue sur V . Ainsi, $t \longmapsto \varphi(t).\operatorname{Tr} l(t)$ est continue et bornée sur V , d'où résulte l'existence de $\lim_{t,\Theta_x} \varphi(t).\operatorname{Tr} l(t)$ dans $\mathbb{C}$. D'après la proposition I.2.5, il existe une trace s.c.i. unique Γ sur $\overline{E}^\varphi_x(A)^+$ telle que $\lim_{t,\Theta_x} \varphi(t).\operatorname{Tr} l(t) = \Gamma(l)$ pour tout $l \in E^\varphi_x(A)^+$. Pour tout $l \in \overline{E}^\varphi_x(A)^+$, montrons que $\Gamma(l)$ ne dépend que de $l(x)$. On a

$\Gamma(1) = 0 \iff 1 \in \overline{Z}^{\varphi}_x(A)$ d'après la proposition I.2.12;

$\iff 1(x) \in \overline{Z}^{\varphi}_x(A)(x)$ d'après le lemme III.2.10.

En particulier, si $1(x) = 0$ on a $\Gamma(1) = 0$. Notons T^{φ}_x la trace s.c.i. sur $\overline{E}^{\varphi}_x(A)(x)^+$ déduite de Γ par passage au quotient. C'est évidemment l'unique trace s.c.i. T sur $\overline{E}^{\varphi}_x(A)(x)^+$ telle que $\lim_{t,\Theta_x} \varphi(t).\mathrm{Tr}\, 1(t) = T(1(x))$ pour tout $1 \in E^{\varphi}_x(A)^+$. Enfin, pour $b \in \overline{E}^{\varphi}_x(A)(x)^+$, on a, d'après ce qui précède, $T^{\varphi}_x(b) = 0$ si et seulement si $b \in \overline{Z}^{\varphi}_x(A)(x)$.

III.3.4. Conservons les notations de la proposition III.3.3. La trace T^{φ}_x donne, par passage au quotient, une trace s.c.i. fidèle sur $\overline{E}^{\varphi}_x(A)(x)/\overline{Z}^{\varphi}_x(A)(x))^+$, densément définie; on la notera $\dot{T}^{\varphi}_x$. D'autre part, la trace T^{φ}_x se prolonge en une trace s.c.i. sur $L(A)(x)^+$ valant $T^{\varphi}_x(b)$ si $b \in \overline{E}^{\varphi}_x(A)(x)^+$ et $+\infty$ sinon; on la notera aussi T^{φ}_x . Remarquons que T^1_x est fidèle sur $L(A)(x)^+$. Par ailleurs, on s'assure immédiatement que, si φ et φ' sont équivalentes dans Φ_x , les traces T^{φ}_x et $T^{\varphi'}_x$ sont proportionnelles.

III.4. <u>Etude de</u> $L(A)$ <u>lorsque</u> $A = \mathscr{C}^{\circ}(X, \mathscr{LC}(H))$

III.4.1. PROPOSITION. <u>Soient</u> X <u>un espace localement compact</u>, H <u>un espace hilbertien et</u> $A = \mathscr{C}^{\circ}(X, \mathscr{LC}(H))$. <u>Alors</u> $L(A) = \mathscr{C}^{b}(X, \mathscr{LC}(H))$. <u>Soit</u> D <u>l'ensemble des fonctions continues de</u> X <u>dans</u> $\mathscr{LC}(H)$ <u>qui, pour tout</u> $x \in \beta X - X$, <u>convergent normiquement suivant</u> Θ_x <u>dans</u> $\mathscr{LC}(H)$. <u>Alors</u> :

(i) D <u>est une sous-</u>C^*<u>-algèbre de</u> $\overline{E}^1(A)$;

(ii) <u>pour tout</u> $x \in \beta X - X$ <u>et tout</u> $d \in D$, $\lim_{t,\Theta_x} d(t)$ <u>ne dépend que de</u> $d(x)$. <u>De plus, l'application</u> ψ_x <u>de</u> $D(x)$ <u>dans</u> $\mathscr{LC}(H)$ <u>telle que</u> $\psi_x(d(x)) = \lim_{t,\Theta_x} d(t)$ <u>pour</u> $d \in D$ <u>est un isomorphisme de</u> $D(x)$ <u>sur</u> $\mathscr{LC}(H)$;

(iii) <u>l'application</u> ψ <u>qui à</u> $d \in D$ <u>fait correspondre le champ d'opérateurs valant</u> $d(x)$ <u>si</u> $x \in X$ <u>et</u> $\psi_x(d(x))$ <u>si</u> $x \in \beta X - X$ <u>est un isomorphisme de</u> D <u>sur</u> $\mathscr{C}(\beta X, \mathscr{LC}(H))$.

(i) Soit $d \in D$. Remarquons tout d'abord que $t \longmapsto \|d(t)\|$ est bornée sur X et donc que $d \in L(A)$. Soient $x \in \beta X - X$ et $\varepsilon > 0$; comme $t \longmapsto d(t)$ converge normiquement suivant Θ_x dans $\mathscr{LC}(H)$, on en déduit facilement l'existence de $V \in \Theta_x$ et de $a \in E^1_x(A)$ tels que $\sup_{t\in V} \|a(t) - d(t)\| \leq \varepsilon$. Il en résulte, d'après le lemme III.2.10, que $d \in \overline{E}^1_x(A)$ pour tout $x \in \beta X - X$, et donc que $d \in \overline{E}^1(A)$ (voir III.2.12).

(ii) Soient $x \in \beta X - X$ et $d \in D$. On a

$$d(x) = 0 \iff \lim_{t,\Theta_x} \|d(t)\| = 0 \iff \lim_{t,\Theta_x} d(t) = 0$$

(dans $\mathscr{LC}(H)$ muni de la topologie normique). On en déduit l'existence de ψ_x et son injectivité. Enfin, toute fonction constante d de X dans $\mathcal{LC}(H)$ appartient à D et $\psi_x(d(x))$ est égal à la valeur de d sur X. Ceci prouve que ψ_x est surjective.

(iii) Soit $d \in D$. Alors $t \longmapsto \psi(d)(t)$ est normiquement continue de βX dans $\mathcal{LC}(H)$ d'après ([1], chap. I, § 8, th. 1) et ψ est évidemment un isomorphisme de D sur $\mathcal{C}(\beta X, \mathcal{LC}(H))$.

III.4.2. Grâce à la proposition III.4.1 (dont nous conservons les notations), nous identifierons dans la suite $\mathcal{C}(\beta X, \mathcal{LC}(H))$ à une sous-C^*-algèbre de $\overline{E}^1(A)$ et $\mathcal{C}(\beta X - X, \mathcal{LC}(H))$ à une sous-C^*-algèbre de $\overline{E}^1(A)/A$. De même pour tout $x \in \beta X - X$, nous identifierons $\mathcal{LC}(H)$ à une sous-C^*-algèbre de $\overline{E}^1(A)(x)$. Nous utiliserons souvent les propriétés suivantes :

a) Soient $l \in L(A)$ et $x \in \beta X - X$. On a $l(x) \in \mathcal{LC}(H)$ si et seulement si $t \longmapsto l(t)$ converge normiquement (vers $l(x)$) suivant Θ_x dans $\mathcal{LC}(H)$;

b) Soit $l \in L(A)/A$. Alors $l \in \mathcal{C}(\beta X - X, \mathcal{LC}(H))$ si et seulement si $l(x) \in \mathcal{LC}(H)$ pour tout $x \in \beta X - X$;

c) Soit $l \in L(A)$ tel que $l|\beta X - X \in \mathcal{C}(\beta X - X, \mathcal{LC}(H))$; alors $l \in \mathcal{C}(\beta X, \mathcal{LC}(H))$.

Les propriétés a) et b) se vérifient immédiatement. Montrons c). Il existe $d \in \mathcal{C}(\beta X, \mathcal{LC}(H))$ tel que $d|\beta X - X = l|\beta X - X$ (voir par exemple [16], 10.1.12). Alors $l - d$ appartient à $A \subset \mathcal{C}(\beta X, \mathcal{LC}(H))$, d'où $l \in \mathcal{C}(\beta X, \mathcal{LC}(H))$.

III.4.3. LEMME. <u>Soient</u> X <u>un espace localement compact</u>, H <u>un espace hilbertien et</u> $A = \mathcal{C}^\circ(X, \mathcal{LC}(H))$.

(i) <u>Pour tout</u> $x \in \beta X - X$, $\mathcal{LC}(H)$ <u>est une sous</u>-C^*-<u>algèbre faciale</u> de $L(A)(x)$.

(ii) $\mathcal{C}(\beta X - X, \mathcal{LC}(H))$ (resp. $\mathcal{C}(\beta X, \mathcal{LC}(H))$) <u>est une sous</u>-C^*-<u>algèbre faciale de</u> $L(A)/A$ (resp. $L(A)$).

(i) Soit $x \in \beta X - X$. Soient p un projecteur de $\mathcal{LC}(H)$ et $a \in L(A)(x)$ tels que $0 \leqslant a \leqslant p$. Appelons d la fonction constante de X dans $\mathcal{LC}(H)$, de valeur p. D'après ([31], prop. 5), il existe $l \in L(A)^+$ tel que $l(x) = a$ et $l \leqslant d$. Ainsi l est une fonction continue de X dans $\mathcal{LC}(p(H))$; comme $\dim p(H) < +\infty$, cette fonction converge normiquement suivant Θ_x dans $\mathcal{LC}(H)$, et donc $a \in \mathcal{LC}(H)$.

Soient maintenant $b \in \mathcal{LC}(H)$ et $a \in L(A)(x)$ tels que $0 \leqslant a \leqslant b$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un projecteur $p_\varepsilon \in \mathcal{LC}(H)$ tel que, si $q_\varepsilon = 1 - p_\varepsilon$, on ait $\|q_\varepsilon b q_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon$. Il en résulte que $\|q_\varepsilon a q_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon$. On déduit de l'égalité

$$q_\varepsilon a q_\varepsilon = (q_\varepsilon \sqrt{a} q_\varepsilon)^2 + (q_\varepsilon \sqrt{a} p_\varepsilon)(p_\varepsilon \sqrt{a} q_\varepsilon) ,$$

que

$$\| q_\varepsilon \sqrt{a} q_\varepsilon \| \leqslant \sqrt{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \| q_\varepsilon \sqrt{a} p_\varepsilon \| = \| p_\varepsilon \sqrt{a} q_\varepsilon \| \leqslant \sqrt{\varepsilon} ,$$

d'où

$$\| \sqrt{a} - p_\varepsilon \sqrt{a} p_\varepsilon \| \leqslant 3\sqrt{\varepsilon} .$$

Or, d'après le début de la démonstration, on a $p_\varepsilon \sqrt{a} p_\varepsilon \in \mathscr{L}\mathscr{C}(H)$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $\sqrt{a} \in \mathscr{L}\mathscr{C}(H)$, ce qui entraîne $a \in \mathscr{L}\mathscr{C}(H)$.

(ii) Soient $b \in \mathscr{C}(\beta X - X, \mathscr{L}\mathscr{C}(H))$ et $a \in L(A)/A$ tels que $0 \leqslant a \leqslant b$. D'après (i) on a $a(x) \in \mathscr{L}\mathscr{C}(H))$ pour tout $x \in \beta X - X$, d'où $a \in \mathscr{C}(\beta X - X, \mathscr{L}\mathscr{C}(H))$ (voir III.4.2 b)).

III.4.4. Soient A une C^*-algèbre et B une sous-C^*-algèbre de A . Soient t une représentation de A dans un espace hilbertien H et u une représentation de B dans un sous-espace hilbertien K de H , tels que $b(u) = b(t)|K$ pour tout $b \in B$. Alors on dira que t est un agrandissement de u .

LEMME. <u>Soient</u> X <u>un espace localement compact,</u> H <u>un espace hilbertien et</u> $A = \mathscr{C}^\circ(X, \mathscr{L}\mathscr{C}(H))$. <u>Soit</u> $x \in \beta X - X$.

(i) <u>La représentation identique de</u> $\mathscr{L}\mathscr{C}(H)$ <u>admet un et un seul agrandissement</u> v_x <u>en une représentation irréductible de</u> $\overline{E}^1(A)(x)$ <u>et , si</u> $v \in \overline{E}^1(A)(x)^\wedge - \{v_x\}$, <u>on a</u> $\mathscr{L}\mathscr{C}(H) \subset \operatorname{Ker} v$.

(ii) <u>Il existe une fonction</u> n <u>unique de</u> $\overline{E}^1(A)(x)^\wedge - \{v_x\}$ <u>dans</u> $\mathbb{N}^*$ <u>telle que</u>

$$T^1_x(l(x)) = \lim_{t,\Theta_x} \operatorname{Tr} l(t) = \operatorname{Tr} l(v_x) + \sum_{v \in \overline{E}^1(A)(x)^\wedge - \{v_x\}} n(v).\operatorname{Tr} l(v)$$

<u>pour tout</u> $l \in \overline{E}^1(A)$ <u>encadré suivant</u> Θ_x . <u>En particulier, si</u> $l \in \mathscr{C}(\beta X, \mathscr{L}\mathscr{C}(H))$ <u>est encadré suivant</u> Θ_x , <u>on a</u>

$$T^1_x(l(x)) = \lim_{t,\Theta_x} \operatorname{Tr} l(t) = \operatorname{Tr} l(v_x) = \operatorname{Tr} l(x) .$$

L'assertion (i) résulte du lemme III.4.3 (i), de ([30] , th. 1.6) et du fait que $\mathscr{L}\mathscr{C}(H)$ n'a qu'une seule représentation irréductible.

(ii) Pour tout $l \in \mathscr{K}(\overline{E}^1(A)) \subset E^1_x(A)$, on a montré l'existence de $\lim_{t,\Theta_x} \operatorname{Tr} l(t)$ (voir III.3.3 (i)). D'autre part, $\overline{E}^1(A)(x)^\wedge$ est l'ensemble des limites de Θ_x dans $\overline{E}^1(A)^\wedge$. Alors, d'après la proposition I.2.26 il existe une fonction m unique de $\overline{E}^1(A)^\wedge$ dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\lim_{t,\Theta_x} \operatorname{Tr} l(t) = \sum_{v \in \overline{E}^1(A)^\wedge} m(v).\operatorname{Tr} l(v)$$

pour tout $l \in \overline{E}^1(A)$, encadré suivant Θ_x . Soit l une fonction constante sur X , prenant pour valeur un projecteur p de rang 1 appartenant à $\mathscr{L}\mathscr{C}(H)$. On a $1 = \lim_{t,\Theta_x} \operatorname{Tr} l(t) = m(v_x)$ puisque $l(v_x) = l(x) = p$ et $l(v) = 0$ pour tout $v \in \overline{E}^1(A)(x)^\wedge - \{v_x\}$. De même, pour tout $b \in \mathscr{C}(\beta X, \mathscr{L}\mathscr{C}(H))$, encadré suivant Θ_x , on a $b(v_x) = b(x) \in \mathscr{L}\mathscr{C}(H)$ et

$b(v) = 0$ si $v \in \overline{E}^1(A)(x)^\wedge - \{v_x\}$ (voir (i)), d'où

$$\lim_{t,\Theta_x} \operatorname{Tr} b(t) = \operatorname{Tr} b(v_x) = \operatorname{Tr} b(x) .$$

Cela signifie que T_x^1 induit la trace canonique sur $\mathcal{LC}(H)^+ \subset \overline{E}^1(A)(x)^+$.

III.4.5. DEFINITIONS. a) Soient T un espace topologique et $\mathcal{E} = ((H(t))_{t\in T}, \Lambda)$ un champ continu d'espaces hilbertiens sur T . Soit p un champ de projecteurs appartenant à $\prod_{t\in T} \mathcal{L}(H(t))$. On dira que p est trivial pour $\mathcal{E}$ s'il existe une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de Λ telle que, pour tout $t \in T$, la famille $(x_i(t))_{i\in I}$ soit une base orthonormale de $p(t)(H(t))$. Soit U une partie de T ; on dira que p est trivial pour $\mathcal{E}$ sur U si p est trivial pour le champ continu d'espaces hilbertiens induit par $\mathcal{E}$ sur U .

b) Soit T un espace topologique, H un espace hilbertien et p une fonction de T dans l'ensemble des projecteurs de $\mathcal{L}(H)$. On dira que p est trivial sur T si p est trivial pour le champ constant d'espaces hilbertiens défini par H sur T (voir [16], 10.1.4).

III.4.6. LEMME. Soient X un espace localement compact, H un espace hilbertien et $A = \mathcal{C}^\circ(X, \mathcal{LC}(H))$. Soient $x \in \beta X - X$, $V \in \Theta_x$ et $l \in \mathcal{C}^b(V, \mathcal{LC}(H))$ tels que $\sup_{t\in V} \operatorname{rg} l(t) < +\infty$.

(i) Il existe $l' \in \overline{E}^1(A)$ et $W \in \Theta_x$ contenu dans V tels que $l|W = l'|W$.

(ii) Supposons de plus que, pour tout $t \in V$, $l(t)$ est un projecteur. Il existe $W \in \Theta_x$ contenu dans V tel que le rang de l soit constant sur W .

L'assertion (i) se démontre facilement en utilisant le fait que Θ_x est complètement régulier.

(ii) Comme $t \longmapsto \operatorname{rg} l(t)$ est continue sur V , il existe une partition finie de V en sous-ensembles fermés (dans V) sur lesquels le rang de l est constant. D'après le lemme V.1.1, l'un de ces fermés appartient à Θ_x .

III.4.7. PROPOSITION. Soient X un espace localement compact, H un espace hilbertien et $A = \mathcal{C}^\circ(X, \mathcal{LC}(H))$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout $x \in \beta X - X$, la C^*-algèbre $\overline{E}^1(A)(x)$ est élémentaire;

(ii) $\overline{E}^1(A)^\wedge = \beta X$;

(iii) $\overline{E}^1(A)$ est à trace continue;

(iv) pour tout $x \in \beta X - X$, tout $V \in \Theta_x$ et tout champ de projecteurs $p \in \mathcal{C}(V, \mathcal{LC}(H))$ tel que $\sup_{t\in V} \operatorname{rg} p(t) < +\infty$, il existe $W \in \Theta_x$, contenu dans V , sur lequel p est trivial.

Introduisons la condition (ii)' : $\overline{E}^1(A)^\wedge$ est séparé.

(ii)' $\Longrightarrow$ (i) : supposons $\overline{E}^1(A)^\wedge$ séparé. Soit $x \in \beta X - X$; supposons que $\overline{E}^1(A)(x)^\wedge$ possède deux points distincts v_1 et v_2. On déduit immédiatement de la proposition III.2.13 (i) et de ([19], th. 1.2) que les points v_1 et v_2 ne sont pas séparés dans $\overline{E}^1(A)^\wedge$, ce qui est absurde. Ainsi $\overline{E}^1(A)(x)$ est une C^*-algèbre duale (voir III.2.13 (ii)) dont le spectre est réduit à un point, et donc $\overline{E}^1(A)(x)$ est élémentaire.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : cela résulte de la proposition III.2.13 (i) et de ([19], corol. du th. 1.2).

(ii) $\Longrightarrow$(iii) : supposons que $\overline{E}^1(A)^\wedge = \beta X$. Ceci entraîne, d'après ce qui précède que $\overline{E}^1(A)(x)$ est élémentaire pour tout $x \in \beta X - X$. Alors il résulte du lemme III.4.4 que, pour tout $x \in \beta X - X$ et tout $l \in \mathcal{K}(\overline{E}^1(A))$, on a $\lim_{t,\theta_x} \operatorname{Tr} l(t) = \operatorname{Tr} l(x) < +\infty$. D'autre part, si $l \in \mathcal{K}(\overline{E}^1(A))$, la fonction $t \longmapsto \operatorname{Tr} l(t)$ est continue sur X d'après le lemme III.3.2 (ii). Il en résulte que $t \longmapsto \operatorname{Tr} l(t)$ est finie et continue sur βX pour tout $l \in \mathcal{K}(\overline{E}^1(A))$ et donc que $\overline{E}^1(A)$ est à trace continue.

(iii) $\Longrightarrow$(ii)' : évident.

(i) $\Longrightarrow$ (iv) : supposons que $\overline{E}^1(A)(t)$ soit élémentaire pour tout $t \in \beta X - X$. Soient $x \in \beta X - X$, $V \in \theta_x$ et p un champ de projecteurs appartenant à $\mathcal{C}(V, \mathcal{LC}(H))$ tel que $\sup_{t\in V} \operatorname{rg} p(t) < +\infty$. D'après le lemme III.4.6, on peut supposer que p se prolonge en un élément de $\overline{E}^1(A)$ (noté encore p) et que le rang de $p(t)$ est constant sur V. Soit ω un voisinage ouvert de x dans βX tel que $V \supset \omega \cap X$. Pour tout $t \in \omega$, $p(t)$ est un projecteur; posons $n = \operatorname{rg} p(x)$ et soit d une fonction constante sur X prenant pour valeur un projecteur de rang n appartenant à $\mathcal{LC}(H)$. Alors $d(x)$ est un projecteur de rang n dans $\mathcal{LC}(H) \subset \overline{E}^1(A)(x)$. Il existe donc $\alpha \in \overline{E}^1(A)(x)$ tel que $\alpha\alpha^* = p(x)$ et $\alpha^*\alpha = d(x)$. D'après ([19], lemme 3.2) il existe un voisinage ω' de x dans βX, contenu dans ω, et $r \in \overline{E}^1(A)$ tels que $r(t)r(t)^* = p(t)$ et $r(t)^*r(t) = d(t)$ si $t \in \omega'$. Comme d est trivial sur $\omega' \cap X$, on en déduit que p est trivial sur $\omega' \cap X \subset V$.

(iv) $\Longrightarrow$ (i) : supposons la condition de (iv) réalisée. Soit $x \in \beta X - X$ tel que $\overline{E}^1(A)(x)^\wedge$ contienne deux points distincts v_1 et v_2. Comme $\overline{E}^1(A)(x)^\wedge$ est discret, il existe $a_i \in \overline{E}^1(A)(x)$ tel que $a_i(v_i)$ soit un projecteur non nul et $a_i(v) = 0$ si $v \in \overline{E}^1(A)(x)^\wedge - \{v_i\}$ $(i = 1,2)$. D'après ([31], corol. 6), il existe $l_i \in \mathcal{K}(\overline{E}^1(A))^+$ tel que $l_i(x) = a_i$, car a_i appartient évidemment à $\mathcal{K}(\overline{E}^1(A)(x))^+$ $(i = 1,2)$. Par des raisonnements classiques de calcul fonctionnel et puisque $\mathcal{K}(\overline{E}^1(A))$ est stable par calcul fonctionnel (voir 0.10), on peut de plus supposer l'existence de $V \in \theta_x$ tel que $l_i(t)$ soit un projecteur sur V $(i = 1,2)$. On a

$\sup_{t\in V} \operatorname{rg} 1_1(t) < +\infty$ puisque $1_1 \in \mathcal{K}(\bar{E}^1(A))$; on peut donc supposer que les champs de projecteurs $1_1|V$ et $1_2|V$ sont triviaux. A partir de là, on peut facilement construire une fonction normiquement continue b de V dans $\mathcal{LC}(H)$ telle que $\lim_{t,\Theta_x} \|1_1(t)b(t)1_2(t)\| \neq 0$ et on peut évidemment supposer que b est la restriction à V d'un élément (noté encore b) de $L(A)$. On a $1_1(x)b(x)1_2(x) \neq 0$; ceci est absurde d'après le choix de a_1 et a_2 .

III.4.8. On ne sait pas si les conditions équivalentes de la proposition III.4.7 sont toujours réalisées. Remarquons que, grâce au lemme III.4.6 (ii) la condition (iv) est équivalente à

(iv)' pour tout $x \in \beta X - X$, tout $V \in \Theta_x$ et tout champ de projecteurs $p \in \mathcal{C}(V, \mathcal{LC}(H))$ tel que $\operatorname{rg} p(t)$ soit fini et constant sur V , il existe $W \in \Theta_x$, contenu dans V , sur lequel p est trivial.

Donnons des exemples où les conditions de la proposition III.4.7 sont réalisées. Tout d'abord c'est le cas si $\dim H < +\infty$. En effet, lorsque $\dim H < +\infty$, tout élément de $\mathcal{C}^b(X,\mathcal{L}(H))$ se prolonge en une fonction continue de βX dans $\mathcal{L}(H)$. On a donc $L(A) = \mathcal{C}(\beta X,\mathcal{L}(H)) = \bar{E}^1(A)$. Par ailleurs, notons qu'on a $M(A) = L(A)$ d'après ([3], th. 3.15).

D'autre part, outre le cas évident où X est discret, la condition (iv)' est réalisée quel que soit H lorsque X est un ouvert de $\mathbb{R}$. En effet, prenons un ouvert Ω de X et un champ de projecteurs $p \in \mathcal{C}(\Omega, \mathcal{LC}(H))$ tel que $\operatorname{rg} p(t)$ soit fini et constant sur Ω . L'ouvert Ω s'écrit comme réunion d'intervalles ouverts deux à deux disjoints, et p est trivial sur chacun de ces intervalles (voir [17], remarque p. 250). Il en résulte que p est trivial sur Ω .

III.4.9. Conservons les notations de la proposition III.4.7 et supposons que les conditions de cette proposition sont réalisées. Soit $x \in \beta X - X$. La C^*-algèbre élémentaire $\bar{E}^1(A)(x)$ contient $\mathcal{LC}(H)$ (voir III.4.2), et on peut facilement s'assurer que $\bar{E}^1(A)(x)$ n'est pas toujours égale à $\mathcal{LC}(H)$ (utiliser III.4.2 a)).

III.4.10. LEMME. <u>Soient</u> H <u>un espace hilbertien de dimension infinie et</u> $A = \mathcal{C}^\circ(\mathbb{N}, \mathcal{LC}(H))$. <u>Soit</u> $x \in \beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$.

(i) $\bar{E}^1_x(A) = \bigcap_\varphi \bar{Z}^\varphi_x(A)$, <u>où</u> φ <u>décrit l'ensemble des éléments de</u> Φ_x <u>strictement inférieurs aux germes des fonctions constantes.</u>

(ii) $\bar{Z}^\varphi_x(A)(x)$ <u>est strictement contenu dans</u> $\bar{E}^\varphi_x(A)(x)$ <u>pour</u> $\varphi \in \Phi_x$.

(iii) $\bar{E}^\varphi_x(A)(x)$ <u>est strictement contenu dans</u> $\bar{Z}^{\varphi'}_x(A)(x)$ si φ' <u>est strictement inférieur à</u> φ dans Φ_x .

(iv) $\bar{E}^\varphi_x(A)(x) = \bar{E}^{\varphi'}_x(A)(x)$ <u>si et seulement si</u> φ et φ' <u>sont équivalentes dans</u> Φ_x .

(v) $\overline{Z}_x^{\varphi}(A)(x) = \overline{Z}_x^{\varphi'}(A)(x)$ <u>si et seulement si</u> φ <u>et</u> φ' <u>sont équivalentes dans</u> Φ_x .

(i) Notons Φ'_x l'ensemble des éléments de Φ_x strictement inférieurs aux germes des fonctions constantes. On a évidemment $\overline{E}_x^1(A) \subset \bigcap_{\varphi \in \Phi'_x} \overline{Z}_x^{\varphi}(A)$. Soit a positif appartenant à $\bigcap_{\varphi\in\Phi'_x} \overline{Z}_x^{\varphi}(A)$. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $g_\varepsilon(a)$ ne soit pas encadré suivant Θ_x . Posons $\varphi(t) = [\mathrm{rg}\ g_\varepsilon(a)(t)]^{-1}$ pour t appartenant à un $V \in \Theta_x$ sur lequel $\mathrm{rg}\ g_\varepsilon(a)(t) \neq 0$. On a

$$\lim_{t,\Theta_x} \varphi(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t,\Theta_x} \varphi(t).\mathrm{rg}\ g_\varepsilon(a)(t) = 1 .$$

Ceci est absurde puisque, d'après le lemme I.2.10, on doit avoir $g_\varepsilon(a) \in Z_x^{\varphi}(A)$. Ainsi on a $g_\varepsilon(a) \in E_x^1(A)$ pour tout $\varepsilon > 0$ et donc $a \in \overline{E}_x^1(A)$.

(ii) Pour tout réel $r \geqslant 0$, nous notons $E(r)$ sa partie entière. Prenons $l \in L(A)$ tel qu'il existe $V \in \Theta_x$ sur lequel $l(t)$ soit un projecteur de rang $E(\varphi(t)^{-1}) + 1$. On a $\varphi(t).\mathrm{rg}\ l(t) \leqslant 1 + \varphi(t)$ pour tout $t \in V$, d'où $l \in E_x^{\varphi}(A)$. Supposons que l appartienne à $\overline{Z}_x^{\varphi}(A)$. Alors il existe $a \in L(A)$ tel que $\|a - l\| \leqslant 1/2$ et $\lim_{t,\Theta_x} \varphi(t).\mathrm{rg}\ a(t) = 0$. D'après le lemme I.2.9, on a $\mathrm{rg}\ a(t) \geqslant \mathrm{rg}\ l(t)$ pour tout $t \in V$, d'où $\varphi(t).\mathrm{rg}\ a(t) \geqslant \varphi(t)(E(\varphi(t)^{-1}) + 1) \geqslant 1$ sur V , ce qui est absurde. Ainsi l n'appartient pas à $\overline{Z}_x^{\varphi}(A)$ et donc $l(x)$ n'appartient pas à $\overline{Z}_x^{\varphi}(A)(x)$ (voir III.2.10).

(iii) Supposons que $\lim_{t,\Theta_x} \varphi'(t)/\varphi(t) = 0$. On a évidemment $\overline{E}_x^{\varphi}(A) \subset \overline{Z}_x^{\varphi'}(A)$. Prenons $l \in L(A)$ tel qu'il existe $V \in \Theta_x$ sur lequel $l(t)$ soit un projecteur de rang égal à $E(\varphi(t)^{-1/2}\varphi'(t)^{-1/2})$. On a $\varphi'(t).\mathrm{rg}\ l(t) \leqslant \varphi'(t)^{1/2}\varphi(t)^{-1/2}$ si $t \in V$, d'où

$$\lim_{t,\Theta_x} \varphi'(t).\mathrm{rg}\ l(t) = 0 .$$

D'autre part, on a $\varphi(t).\mathrm{rg}\ l(t) \geqslant \varphi(t)^{1/2}\varphi'(t)^{-1/2} - \varphi(t)$ si $t \in V$,d'où

$$\lim_{t,\Theta_x} \varphi(t).\mathrm{rg}\ l(t) = +\infty .$$

Comme dans la démonstration de (ii), on prouve que $l(x) \notin \overline{E}_x^{\varphi}(A)(x)$ en utilisant le lemme I.2.9.

(iv) Si $\lim_{t,\Theta_x} \varphi'(t)/\varphi(t) = 0$, on a

$$\overline{E}_x^{\varphi}(A)(x) \subsetneq \overline{Z}_x^{\varphi'}(A)(x) \subset \overline{E}_x^{\varphi'}(A)(x) .$$

On en déduit immédiatement (iv) .

L'assertion (v) se démontre comme (iv) .

III.4.11. LEMME. <u>Soient</u> H <u>un espace hilbertien de dimension infinie</u>

et $A = \mathscr{C}^\circ(\mathbb{N}, \mathscr{LC}(H))$. Soient $x \in \beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$ et $\varphi \in \Phi_x$. Pour tout idéal bilatère fermé K de $L(A)(x)$, on a soit $K \subset \overline{Z}_x^\varphi(A)(x)$, soit $\overline{E}_x^\varphi(A)(x) \subset K$.

Supposons $K \not\subset \overline{Z}_x^\varphi(A)(x)$. Prenons $l \in L(A)^+$ tel que $l(x) \in K$ et $l(x) \notin \overline{Z}_x^\varphi(A)(x)$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule fermée de centre $l(x)$ et de rayon ε ne rencontre pas $Z_x^\varphi(A)(x)$. Or on a $\|g_\varepsilon(l)(x) - l(x)\| \leqslant \varepsilon$; il en résulte que $\lim_{t,\Theta_x} \varphi(t).\mathrm{rg}\, g_\varepsilon(l)(t) > 0$ (éventuellement $+\infty$). Notons p l'élément de $L(A)$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{N}$, $p(t)$ soit le projecteur de H sur le sous-espace propre de $l(t)$ correspondant aux valeurs propres de $l(t)$ strictement supérieures à ε . On a $\mathrm{rg}\, p(t) = \mathrm{rg}\, g_\varepsilon(l)(t)$ pour tout $t \in \mathbb{N}$, d'où

$$\lim_{t,\Theta_x} \varphi(t).\mathrm{rg}\, p(t) = \alpha \in]0,+\infty] .$$

Nous supposerons par exemple $\alpha < +\infty$. On a $p(t) \leqslant l(t)/\varepsilon$ pour tout $t \in \mathbb{N}$, d'où $p(x) \leqslant l(x)/\varepsilon$; ceci entraîne que $p(x) \in K$. Soit $b \in E_x^\varphi(A)^+$ et montrons que $b(x) \in K$. Appelons q l'élément de $L(A)$ tel que $q(t)$ soit le support de $b(t)$ pour tout $t \in \mathbb{N}$. On a $b(t) \leqslant \|b\| q(t)$ sur $\mathbb{N}$, d'où $b(x) \leqslant \|b\| q(x)$. Il suffit donc de montrer que $q(x)$ appartient à K . Par hypothèse, on a

$$\lim_{t,\Theta_x} \varphi(t).\mathrm{rg}\, q(t) = \lim_{t,\Theta_x} \varphi(t).\mathrm{rg}\, b(t) = \beta < +\infty .$$

Prenons un entier r tel que $r\alpha > \beta$ et soit $\eta > 0$ tel que $\beta + 2\eta < r\alpha$. On peut trouver un projecteur $p' \in L(A)$ tel que $p'(x) \in K$ et $\lim_{t,\Theta_x} \varphi(t).\mathrm{rg}\, p'(t) = r\alpha$. Il suffit de prendre, en chaque point $t \in \mathbb{N}$ un projecteur $p'(t)$ de rang égal à $r.\mathrm{rg}\, p(t)$. En effet, il existe alors des éléments $u_1, \dots, u_r$ appartenant à $L(A)$ tels que $p'(t) = \sum_{i=1}^{r} u_i(t)^* p(t) u_i(t)$ sur $\mathbb{N}$, d'où $p'(x) = \sum_{i=1}^{r} u_i(x)^* p(x) u_i(x) \in K$. Soit V un élément de Θ_x sur lequel on a

$$\varphi(t).\mathrm{rg}\, q(t) \leqslant \beta + \eta \leqslant r\alpha - \eta \leqslant \varphi(t).\mathrm{rg}\, p'(t) .$$

Alors il existe $u \in L(A)$ tel qu'on ait $q(t) \leqslant u(t)^* p'(t) u(t)$ si $t \in V$, d'où $q(x) \leqslant u(x)^* p'(x) u(x)$. Ainsi $q(x)$ appartient à K . Ceci prouve que $E_x^\varphi(A)(x)$ est contenu dans K , d'où $\overline{E}_x^\varphi(A)(x) \subset K$.

III.4.12. Nous dirons qu'une C^*-algèbre B est simple si elle ne possède pas d'idéaux bilatères fermés autres que $\{0\}$ et B .

PROPOSITION. Soient H un espace hilbertien de dimension infinie, $A = \mathscr{C}^\circ(\mathbb{N}, \mathscr{LC}(H))$ et $L(A)$ la C^*-algèbre des suites bornées d'éléments de $\mathscr{LC}(H)$. Soit $x \in \beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$.

(i) Pour tout $\varphi \in \Phi_x$, l'idéal bilatère fermé $\overline{Z}_x^\varphi(A)(x)$ de $L(A)(x)$ est primitif.

(ii) L'ensemble des idéaux primitifs de $L(A)(x)$ a un cardinal supérieur ou égal au continu.

(iii) Si φ est un germe de fonction constante suivant Θ_x, la C^*-algèbre $\overline{E}_x^{\varphi}(A)(x)/\overline{Z}_x^{\varphi}(A)(x) = \overline{E}^1(A)(x)$ est élémentaire. Sinon, $\overline{E}_x^{\varphi}(A)(x)/\overline{Z}_x^{\varphi}(A)(x)$ est une C^*-algèbre simple, antiliminaire, qui possède une trace s.c.i., fidèle et densément définie.

(i) $\overline{Z}_x^{\varphi}(A)(x)$ est l'intersection des idéaux primitifs de $L(A)(x)$ qui le contiennent. Or les idéaux bilatères fermés de $L(A)(x)$ qui contiennent strictement $\overline{Z}_x^{\varphi}(A)(x)$ contiennent $\overline{E}_x^{\varphi}(A)(x)$ d'après le lemme III.4.11. Comme $\overline{E}_x^{\varphi}(A)(x)$ contient strictement $\overline{Z}_x^{\varphi}(A)(x)$ d'après le lemme III.4.10, il en résulte que $\overline{Z}_x^{\varphi}(A)(x)$ est primitif.

(ii) D'après (i) et le lemme III.4.10 (v), il suffit de vérifier que le cardinal de $\Phi_x^{\bullet}$ est supérieur ou égal au continu. Pour tout $r \geqslant 0$, soit φ_r la fonction telle que $\varphi_r(n) = (n+1)^{-r}$ si $n \in \mathbb{N}$. Lorsque r et r' sont deux réels $\geqslant 0$ distincts, les fonctions φ_r et $\varphi_{r'}$ ne sont pas équivalentes dans Φ_x, d'où card $\Phi_x^{\bullet} \geqslant$ card $[0,+\infty[$.

(iii) La première assertion de (iii) résulte de la proposition III.4.7 et de III.4.8 (remarquer que $\overline{Z}_x^1(A)(x) = 0$). Démontrons les autres assertions. Soit $\varphi \in \Phi_x$ tel que $\lim_{t,\Theta_x} \varphi(t) = 0$. D'après le lemme III.4.11, la C^*-algèbre $\overline{E}_x^{\varphi}(A)(x)/\overline{Z}_x^{\varphi}(A)(x)$ est simple; l'existence d'une trace fidèle, s.c.i. et densément définie résulte de III.3.4. Montrons que $\overline{E}_x^{\varphi}(A)(x)/\overline{Z}_x^{\varphi}(A)(x)$ est antiliminaire. Nous allons prouver dans la suite que, pour tout espace localement compact Y à base dénombrable, il existe une sous-C^*-algèbre de $\overline{E}_x^{\varphi}(A)(x)/\overline{Z}_x^{\varphi}(A)(x)$ isomorphe à $\mathcal{C}^{\circ}(Y)$ (voir VII.3.7). Ceci entraîne évidemment que $\overline{E}_x^{\varphi}(A)(x)/\overline{Z}_x^{\varphi}(A)(x)$ n'est pas élémentaire et donc que $\overline{E}_x^{\varphi}(A)(x)/\overline{Z}_x^{\varphi}(A)(x)$ est antiliminaire.

III.4.13. Remarquons que dans ([24], th. 7.6) il est déjà prouvé que $\mathcal{C}^b(\mathbb{N}, \mathcal{LC}(H))$ n'est pas postliminaire lorsque $\dim H = +\infty$. Par contre, nous verrons (III.4.16) que $\mathcal{C}^b(X, \mathcal{LC}(H))$ peut être postliminaire (et même à trace continue) pour certains espaces espaces X localement compacts non compacts, bien que $\dim H = +\infty$.

III.4.14. LEMME. Soient X un espace localement compact normal, H un espace hilbertien séparable (resp. de dimension quelconque) et $A = \mathcal{C}^{\circ}(X, \mathcal{LC}(H))$. Soient F un fermé (resp. un fermé dénombrable) de X et $A_F = \mathcal{C}^{\circ}(F, \mathcal{LC}(H))$.

(i) $\overline{F}$ ($= \overline{F}^{\beta X}$) est le compactifié de Stone-Čech de F . Posons $F' = \overline{F} \cap (\beta X - X)$.

(ii) Notons $L(A)_{\overline{F}}$ la C^*-algèbre des $1|\overline{F}$ avec $1 \in L(A)$, et $L(A)_{F'}$, la C^*-algèbre des $1|F'$ avec $1 \in L(A)$. L'application φ qui à $1 \in L(A)_{\overline{F}}$ associe $1|F$ est un isomorphisme de $L(A)_{\overline{F}}$ sur $L(A_F) = \mathcal{C}^b(F, \mathcal{LC}(H))$.

<u>L'application qui à</u> $l \in L(A_F)$ <u>associe</u> $\varphi^{-1}(l)|F'$ <u>est un homomorphisme de</u> $L(A_F)$ <u>sur</u> $L(A)_{F'}$ <u>dont le noyau est</u> A_F .

L'assertion (i) se démontre facilement en utilisant la normalité de X .

(ii) Prouvons que φ est surjective . Soit $b \in \mathcal{C}^b(F, \mathcal{LC}(H))$. Dans les deux situations considérées b prend ses ses valeurs dans un sous-espace de Banach séparable de $\mathcal{LC}(H)$. Alors, d'après ([27] , th. 3.1), b se prolonge en une fonction normiquement continue bornée de X dans $\mathcal{LC}(H)$, c'est-à-dire en un élément l de L(A) . Posons $c = l|\overline{F}$. On a $\varphi(c) = b$. Les autres assertions de (ii) se vérifient immédiatement.

III.4.15. PROPOSITION. <u>Soient</u> X <u>un espace localement compact normal,</u> H <u>un espace hilbertien de dimension infinie et</u> $A = \mathcal{C}^\circ(X, \mathcal{LC}(H))$.

(i) $\overline{E}^1(A)$ <u>est le plus grand idéal postliminaire de</u> $L(A) = \mathcal{C}^b(X, \mathcal{LC}(H))$.

(ii) L(A) <u>est postliminaire (et donc égale à</u> $\overline{E}^1(A)$) <u>si et seulement si</u> X <u>ne possède pas de sous-ensemble fermé, discret, infini dénombrable.</u>

(i) On sait déjà que $\overline{E}^1(A)$ est uniformément liminaire (voir III.2.13 (iv)) . Soit K un idéal postliminaire de L(A) non contenu dans $\overline{E}^1(A)$. Il existe $x \in \beta X - X$ tel que $K(x) \not\subset \overline{E}^1(A)(x)$ d'après ([16], lemme 10.4.2). Prenons $l \in K^+$ tel que $l(x) \notin \overline{E}^1(A)(x)$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $g_\varepsilon(l)(x) \notin E^1(A)(x)$. On a $\mathrm{Tr}\, g_{\varepsilon/2}(l)(t) \geqslant \varepsilon.\mathrm{rg}\, g_\varepsilon(l)(t)$ sur X ; il en résulte que $\lim_{t,\Theta_x} \mathrm{Tr}\, g_{\varepsilon/2}(l)(t) \quad +\infty$, car $t \longmapsto \mathrm{Tr}\, g_{\varepsilon/2}(l)(t)$ est continue sur un élément de Θ_x (voir III.3.2). Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de X telle que la suite $(\mathrm{Tr}\, g_{\varepsilon/2}(l)(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ soit strictement croissante et tende vers l'infini avec n ; alors $\{t_o , \ldots, t_n , \ldots\}$ est un sous-ensemble fermé discret de X . Posons $F = \{t_o , \ldots, t_n , \ldots\}$ et $A_F = \mathcal{C}^\circ(F, \mathcal{LC}(H))$. Soit $x' \in \overline{F} \cap (\beta X - X)$. D'après le lemme III.4.14, la C^*-algèbre $L(A_F)(x')$ s'identifie canoniquement à $L(A)(x')$. Puisque $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Tr}\, g_{\varepsilon/2}(l)(t_n) = +\infty$, il résulte du lemme I.2.10 que $l|F$ (qui est un élément de $L(A_F)$) n'appartient pas à $\overline{E}^1_{x'}(A_F)$, et donc que $l(x') \notin \overline{E}^1_{x'}(A_F)(x')$. On déduit alors des lemmes III.4.10 (i) et III.4.11 l'existence d'une fonction φ de F dans $]0,+\infty[$ qui tend vers 0 suivant la trace sur F de $\Theta_{x'}$, et telle que $K(x') \supset \overline{E}^\varphi_{x'}(A_F)(x')$. D'après la proposition III.4.12, la C^*-algèbre $\overline{E}^\varphi_{x'}(A_F)(x')$ a un quotient antiliminaire; il en résulte que K(x') n'est pas postliminaire. Il en est donc de même pour K .

(ii) Supposons que X possède un sous-ensemble F fermé, discret, infini dénombrable. Posons $A_F = \mathcal{C}^\circ(F, \mathcal{LC}(H))$. D'après le lemme III.4.13 (ii), la C^*-algèbre $L(A_F)$ est isomorphe à la C^*-algèbre des $l|\overline{F}$ avec $l \in L(A)$, c'est-à-dire à un quotient de L(A) . Comme $L(A_F)$ n'est pas postliminaire d'après la proposition III.4.12, on en déduit que L(A) n'est pas postliminaire.

Supposons maintemant que L(A) n'est pas postliminaire. Alors L(A) contient strictement $\overline{E}^1(A)$. Soit $l \in L(A)^+$ tel que $l \notin \overline{E}^1(A)$. Comme on l'a fait dans la démonstration de (i), on peut construire, grâce à l , un sous-ensemble de X fermé, discret, infini dénombrable.

III.4.16. Soient X un espace localement compact, H un espace hilbertien et $A = \mathcal{C}^\circ(X, \mathcal{LC}(H))$. Lorsque dim H < +∞ , on a déjà remarqué (III.4.8) que $M(A) = L(A) = \mathcal{C}(\beta X, \mathcal{L}(H))$. Nous allons maintenant donner un exemple montrant que, même lorsque dim H = +∞ , il existe des cas où $L(A) = \overline{E}^1(A) = \mathcal{C}(\beta X, \mathcal{LC}(H))$. Prenons pour X l'espace des ordinaux dénombrables muni de la topologie de l'ordre. C'est un espace localement compact normal (voir [22], 5.11.b) dans lequel les ensembles dénombrables sont relativement compacts (voir [22], 5.12.a). De plus, la démonstration de ([22], 5.12.c) prouve que toute fonction continue bornée de X dans un espace de Banach converge suivant le filtre des voisinages de l'infini dans X . De ceci résulte que le compactifié de Stone-Čech de X est égal à son compactifié d'Alexandroff et que $L(A) = \mathcal{C}(\beta X , \mathcal{LC}(H))$. En particulier $L(A)/A$ est isomorphe à $\mathcal{LC}(H)$.

CHAPITRE IV

Extensions d'une C^*-algèbre à spectre séparé

IV.1. Spectre d'une extension de C^*-algèbres.

IV.1.1. DEFINITION. *Soient* A *une* C^*-*algèbre à spectre séparé et* C *une* C^*-*algèbre. Nous noterons* $\mathscr{S}(A,C)$ *l'ensemble des extensions* B *de* A *par* C *telles que les points de* $\hat{A}$ *soient fermés et séparés dans* $\hat{B}$.

IV.1.2. PROPOSITION. *Soit* A *une* C^*-*algèbre à trace continue et* C *une* C^*-*algèbre. Pour tout* $B \in \mathscr{S}(A,C)$ *on a* $A \subset J(B)$. *En particulier, si* A *et* C *sont à trace continue, les éléments de* $\mathscr{S}(A,C)$ *sont des* C^*-*algèbres à trace continue généralisée (voir* [12], déf. 4).

Soit $a \in \mathcal{K}(A)$. La fonction $t \longmapsto \mathrm{Tr}\, a(t)$ est continue sur $\hat{A}$ et à support compact (dans $\hat{A}$). Comme les points de $\hat{A}$ sont fermés et séparés dans $\hat{B}$, ce compact est fermé dans $\hat{B}$. Alors, puisque $\mathrm{Tr}\, a(t) = 0$ pour tout $t \in \hat{B} - \hat{A}$, on en déduit que $t \longmapsto \mathrm{Tr}\, a(t)$ est finie et continue sur $\hat{B}$. Il en résulte que A est contenu dans $J(B)$. Si de plus C est à trace continue, B satisfait à la condition (ii) de ([12], prop. 11) et donc B est à trace continue généralisée.

IV.1.3. PROPOSITION. *Soient* A *une* C^*-*algèbre à spectre séparé et* C *une* C^*-*algèbre. Soit* $B \in \mathrm{Ext}(A,C)$, *associée à un homomorphisme* γ *de* C *dans* $M(A)/A$. *Alors* B *appartient à* $\mathscr{S}(A,C)$ *si et seulement si* $\gamma(C) \subset L(A)/A$.

Les points de $\hat{A}$ sont fermés dans $\hat{B}$ si et seulement si $A(t) = B(t)$ pour tout $t \in \hat{A}$. De plus les points de $\hat{A}$ sont séparés dans $\hat{B}$ si et seulement si $t \longmapsto \|b(t)\|$ est continue sur $\hat{A}$ pour tout $b \in B$ (voir [11], § 1). Il résulte de ce qui précède que :

$$
\begin{aligned}
B \in \mathscr{S}(A,C) &\iff \text{pour tout } b = (m,c) \in B \text{ , on a } m|\hat{A} \in L(A) \text{ ;}\\
&\iff \text{pour tout } b = (m,c) \in B \text{ , on a } m \in L(A) \text{ (voir III.2.6);}\\
&\iff \text{pour tout } c \in C \text{ , on a } \gamma(c) \subset L(A)/A \text{ (voir 0.14).}
\end{aligned}
$$

IV.1.4. PROPOSITION. *Soient* A *une* C^*-*algèbre à spectre séparé et* C *une* C^*-*algèbre. Soit* $B \in \mathscr{S}(A,C)$, *associée à un homomorphisme* γ *de* C *dans* $L(A)/A$. *Notons* f *la fonction de* $\beta\hat{A} - \hat{A}$ *dans* $\mathscr{F}(\hat{C})$ *définie par* $f(x) = \gamma(C)(x)^\wedge$ *pour tout* $x \in \beta\hat{A} - \hat{A}$, *grâce à l'inclusion* $\gamma(C) \subset L(A)/A = \overline{\mathcal{C}^b(\mathcal{L}^*_A)}$. *Cette fonction est continue et* $\hat{B}$ *est l'élément de* $\mathscr{S}(\hat{A},\hat{C})$ *associé à* f *(voir* II.9).

La continuité de f résulte du corollaire I.1.5. Montrons que $\hat{B}$ est associé à f. Soit $x \in \beta\hat{A} - \hat{A}$. Pour tout $b = (m,c) \in B$ on a

$$\lim_{t,\Theta_x} \|b(t)\| = \lim_{t,\Theta_x} \|m(t)\| = \|m(x)\| = \|\gamma(c)(x)\|$$

$$= \sup_{y \in f(x)} \|c(y)\| = \sup_{y \in f(x)} \|b(y)\| \text{ .}$$

Alors, d'après le corollaire I.1.4, $f(x)$ est la limite suivant Θ_x, dans $\mathcal{F}(\hat{B})$ muni de la topologie fellienne, de la fonction $t \longmapsto \{t\}$ définie sur $\hat{A}$. Il suffit maintenant d'appliquer le corollaire II.12.

Notons que, d'après ce qui précède, Θ_x converge vers chacune de ses valeurs d'adhérence dans $\hat{B}$, et que $\gamma(C)(x)^\wedge$ est l'ensemble des limites de Θ_x.

IV.1.5. Soient A une C^*-algèbre à spectre séparé et C une C^*-algèbre. D'après la proposition IV.1.3, la bijection de $\mathrm{Ext}(A,C)$ sur $\mathrm{Hom}(C,M(A)/A)$ rappelée en 0.14 induit une bijection τ de $\mathcal{S}(A,C)$ sur $\mathrm{Hom}(C,L(A)/A)$. Désignons par λ l'application de $\mathcal{S}(A,C)$ dans $\mathcal{S}(\hat{A},\hat{C})$ telle que $\lambda(B) = \hat{B}$ pour $B \in \mathcal{S}(A,C)$, et par ρ la bijection canonique de $\mathcal{S}(\hat{A},\hat{C})$ sur $\mathcal{C}(\beta\hat{A} - \hat{A}, \mathcal{F}(\hat{C}))$ (voir II.12). Enfin, soit χ l'application de $\mathrm{Hom}(C,L(A)/A)$ dans $\mathcal{C}(\beta\hat{A} - \hat{A}, \mathcal{F}(\hat{C}))$ qui, à $\gamma \in \mathrm{Hom}(C,L(A)/A)$ fait correspondre la fonction $x \longmapsto \gamma(C)(x)^\wedge$ (voir IV.1.4). La proposition IV.1.4 signifie que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}(A,C) \arrow[r, leftrightarrow, "\tau"] \arrow[d, "\lambda"'] & \mathrm{Hom}(C,L(A)/A) \arrow[d, "\chi"] \\
\mathcal{S}(\hat{A},\hat{C}) \arrow[r, leftrightarrow, "\rho"] & \mathcal{C}(\beta\hat{A} - \hat{A}, \mathcal{F}(\hat{C}))
\end{tikzcd}$$

IV.1.6. Pour la définition des extensions scindées nous renvoyons à ([3], déf. 5.2).

PROPOSITION. Soient A une C^*-algèbre à spectre séparé, C une C^*-algèbre et B une extension de A par C, associée à $\gamma \in \mathrm{Hom}(C,M(A)/A)$.

(i) B est scindée et appartient à $\mathcal{S}(A,C)$ si et seulement si il existe un homomorphisme δ de C dans $L(A)$ tel que $\Pi \circ \delta = \gamma$.

(ii) Supposons que B soit scindée et appartienne à $\mathcal{S}(A,C)$. Soit δ un homomorphisme de C dans $L(A)$ tel que $\Pi \circ \delta = \gamma$. La fonction $t \longmapsto \delta(C)(t)^\wedge$ de $\hat{A}$ dans $\mathcal{F}(\hat{C})$ est continue, et $\hat{B}$ est l'élément de $\mathcal{S}(\hat{A},\hat{C})$ associé à cette fonction grâce à la proposition II.20.

L'assertion (i) résulte immédiatement de la proposition IV.1.3 et de ([3], prop. 5.3).

(ii) Appelons l la fonction $t \longmapsto \delta(C)(t)^\wedge$ de $\beta\hat{A}$ dans $\mathcal{F}(\hat{C})$. Elle est continue d'après le corollaire I.1.5. On a $l(t) = \gamma(C)(t)^\wedge$ pour tout $t \in \beta\hat{A} - \hat{A}$ puisque $\gamma(C) = \Pi(\delta(C))$. D'après la proposition IV.1.4,

$\hat{B}$ est l'élément de $\mathcal{G}(\hat{A},\hat{C})$ associé à $1|\beta\hat{A} - \hat{A}$. Il suffit maintenant d'appliquer II.20.

IV.1.7. La proposition IV.1.6 va nous permettre de construire une C^*-algèbre B, séparable et à trace continue généralisée (voir [12], déf.4), telle que l'ensemble des points séparés de $\hat{B}$ ne soit pas contenu dans une partie ouverte et séparée de $\hat{B}$. Ceci fournit une réponse négative au problème posé dans ([16], 4.7.9).

Soient $A = \mathcal{C}^\circ(\mathbb{N},M_2(\mathbb{C}))$ et $C = \mathcal{C}([-1,1])$. On a $L(A) = \mathcal{C}^b(\mathbb{N},M_2(\mathbb{C}))$ Ecrivons $\mathbb{N}$ comme réunion infinie de sous-ensembles $X_o, \ldots, X_n, \ldots$ deux à deux disjoints et eux-mêmes infinis. Notons (e_1,e_2) la base canonique de l_2^2 et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'ensemble des rationnels de $]0,1]$. Soit $c \in C$ et posons $\delta(c)(t) = c(q_n)Pe_1 + c(-q_n)Pe_2$ pour tout $t \in X_n$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $t \longmapsto \delta(c)(t)$ appartient à $L(A)$ et $c \longmapsto \delta(c)$ est un homomorphisme de C dans $L(A)$. Soit B l'extension scindée associée à $\Pi\circ\delta$; elle est à trace continue généralisée d'après la proposition IV.1.2. D'après la proposition IV.1.6, $\hat{B}$ est l'extension de $\hat{A}$ par $\hat{C}$ associée à la fonction l de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{F}(\hat{C})$ telle que $l(t) = \{-q_n , q_n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Vérifions que $\hat{A} \cup \{0\}$ est l'ensemble des points séparés de $\hat{B}$. Montrons que 0 est séparé dans $\hat{B}$. Soit $r \in [-1,1]$, distinct de 0, et supposons par exemple $r > 0$. Prenons, dans $[-1,1]$, des voisinages v et w de r et 0 respectivement tels que $v \cap w = \emptyset$ et $(-v) \cap w = \emptyset$ (où $-v = \{t \in [-1,1] \mid -t \in v\}$. On a alors $l^{-1*}(w) \cap l^{-1*}(v) = \emptyset$, d'où $(l^{-1*}(w) \cup w) \cap (l^{-1*}(v) \cup v) = \emptyset$. Or $l^{-1*}(w) \cup w$ et $l^{-1\times}(v) \cup v$ sont des voisinages de 0 et r respectivement dans $\hat{B}$ (voir II.20), ce qui entraîne que 0 et r sont séparés. Montrons par contre que les points de $[-1,1]$ distincts de 0 ne sont pas séparés dans $\hat{B}$ et, plus précisément, que les points r et $-r$ avec $r \in [-1,1] - \{0\}$ ne sont pas séparés. Soient V et W des voisinages de r et $-r$ respectivement, dans $\hat{B}$. Il existe n tel que $q_n \in V$ et $-q_n \in W$. Il résulte alors de la condition (ii) de la proposition II.20 que $V \cap \hat{A}$ et $W \cap \hat{A}$ contiennent tous les points de X_n sauf un nombre fini, d'où $\hat{A} \cap V \cap W \neq \emptyset$.

Soit maintenant une partie ouverte U de $\hat{B}$ contenant $\hat{A} \cup \{0\}$. Alors U contient un voisinage de 0 dans $[-1,1]$ et donc des points r et $-r$ avec $r \in [-1,1] - \{0\}$. Il résulte de ce qui précède que les points r et $-r$ ne sont pas séparés dans U et donc que U n'est pas séparé.

IV.2. <u>Extensions bien φ-encadrées d'une C^*-algèbre à trace continue.</u>

IV.2.1. PROPOSITION. <u>Soient</u> A <u>une</u> C^*-<u>algèbre à spectre séparé et</u> C <u>une</u> C^*-<u>algèbre. Soit</u> $B \in \mathcal{G}(A,C)$, <u>associé à</u> $\gamma \in \mathrm{Hom}(C,L(A)/A)$.

(i) <u>Soient</u> $x \in \beta\hat{A} - \hat{A}$ <u>et</u> $\varphi \in \Phi_x$. <u>Alors</u> B <u>est</u> φ-<u>encadrée suivant</u>

Θ_x <u>si et seulement si</u> $\gamma(C)(x) \subset \overline{E}_x^{\varphi}(A)(x)$.

(ii) <u>Soit</u> $\varphi \in \Phi^{\hat{A}}$. <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

a) B <u>est</u> φ<u>-encadrée suivant</u> $\Theta^{\hat{A}}$;

b) $\gamma(C) \subset \overline{E}^{\varphi}(A)/A$;

c) $\gamma(C)(x) \subset \overline{E}_x^{\varphi}(A)(x) = \overline{E}^{\varphi}(A)(x)$ <u>pour tout</u> $x \in \beta\hat{A} - \hat{A}$.

Nous allons par exemple démontrer (ii).

a) $\Longrightarrow$ c) : supposons que B est φ-encadrée suivant $\Theta^{\hat{A}}$. Soient $x \in \beta\hat{A} - \hat{A}$ et $b = (m,c) \in B$, φ-encadré suivant $\Theta^{\hat{A}}$. Alors m est φ-encadré suivant $\Theta^{\hat{A}}$ et donc $\gamma(c)(x) = m(x)$ appartient à $E^{\varphi}(A)(x)$. On en déduit l'inclusion $\gamma(C)(x) \subset \overline{E}^{\varphi}(A)(x)$.

c) $\Longrightarrow$ b) : l'assertion résulte de l'égalité $L(A)/A = \mathcal{C}^b(\mathcal{L}_{\hat{A}}^{"})$ (voir III.2.6) et de ([16], 10.4.2).

b) $\Longrightarrow$ a) : supposons que $\gamma(C) \subset \overline{E}^{\varphi}(A)/A$. Soit $b = (m,c) \in B^+$. On a $m \in \overline{E}^{\varphi}(A)$, d'où $g_\varepsilon(m) \in E^{\varphi}(A)$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'après le lemme I.2.10. Il en résulte que $g_\varepsilon(b) = (g_\varepsilon(m), g_\varepsilon(c))$ est φ-encadré suivant $\Theta^{\hat{A}}$ pour tout $\varepsilon > 0$, et donc que B est φ-encadrée suivant $\Theta^{\hat{A}}$.

IV.2.2. Soient A une C^*-algèbre à trace continue, C une C^*-algèbre et $\gamma \in \mathrm{Hom}(C, L(A)/A)$. Pour tout $x \in \beta\hat{A} - \hat{A}$ et tout $\varphi \in \Phi_x$, on notera Γ_x^{φ} , ($\Gamma_x^{\varphi,\gamma}$ en cas d'ambiguïté) la trace s.c.i. sur C^+ telle que $\Gamma_x^{\varphi}(c) = T_x^{\varphi}(\gamma(c)(x))$ pour $c \in C^+$.

LEMME. <u>Conservons les notations précédentes. Soit</u> B <u>l'élément de</u> $\mathcal{G}(A,C)$ <u>associé à</u> γ <u>et notons</u> P <u>la surjection canonique de</u> B <u>sur</u> C .

(i) <u>Soient</u> $x \in \beta\hat{A} - \hat{A}$ <u>et</u> $\varphi \in \Phi_x$. <u>Pour tout</u> $b \in B$, φ<u>-encadré suivant</u> Θ_x , on a $\Gamma_x^{\varphi}(P(b)) = \lim_{t,\Theta_x} \varphi(t).\mathrm{Tr}\, b(t)$.

(ii) <u>Soit</u> $\varphi \in \Phi^{\hat{A}}$. <u>Supposons que</u> $\gamma(C) \subset \overline{E}^{\varphi}(A)/A$. <u>Alors</u> $x \longmapsto \Gamma_x^{\varphi}$ <u>est continue de</u> $\beta\hat{A} - \hat{A}$ <u>dans</u> $\mathcal{T}(C)$.

(i) Soit $b = (m,c) \in B$, φ-encadré suivant Θ_x . D'après la proposition III.3.3 (i), on a $\lim_{t,\Theta_x} \varphi(t).\mathrm{Tr}\, m(t) = T_x^{\varphi}(m(x))$. Or $m(t) = b(t)$ si $t \in \hat{A}$ et $m(t) = \gamma(P(b))(t)$ si $t \in \beta\hat{A} - \hat{A}$, d'où

$$\Gamma_x^{\varphi}(P(b)) = \lim_{t,\Theta_x} \varphi(t).\mathrm{Tr}\, b(t)$$

(ii) Soient $c \in \mathcal{K}(C)^+$ et $m \in L(A)^+$ tels que $(m,c) \in \mathcal{K}(B)$. D'après la proposition IV.2.1, l'idéal des éléments de B qui sont φ-encadrés suivant $\Theta^{\hat{A}}$ est un idéal bilatère facial dense dans B . Il en résulte que (m,c) est φ-encadré suivant $\Theta^{\hat{A}}$, c'est-à-dire que $m \in E^{\varphi}(A)$. D'après (i), on a $\Gamma_x^{\varphi}(c) = \lim_{t,\Theta_x} \varphi(t).\mathrm{Tr}\, m(t) < +\infty$ pour tout $x \in \beta\hat{A} - \hat{A}$. Comme $t \longmapsto \varphi(t).\mathrm{Tr}\, m(t)$ est continue sur un élément de $\Theta^{\hat{A}}$ (voir III.3.2 (i)), on en déduit que $x \longmapsto \Gamma_x^{\varphi}(c)$ est continue sur $\beta\hat{A} - \hat{A}$ (voir [1], chap. I,

§ 8, th. 1).

IV.2.3. LEMME. <u>Conservons les notations du lemme</u> IV.2.2. <u>Soient</u> $x \in \beta\hat{A} - \hat{A}$ <u>et</u> $\varphi \in \Phi_x$. <u>Supposons que</u> $\gamma(C)(x) \subset (\overline{E}_x^{\varphi}(A)(x) - \overline{Z}_x^{\varphi}(A)(x)) \cup \{0\}$. <u>Alors</u> Γ_x^{φ} <u>est une trace s.c.i. sur</u> C^+ , <u>densément définie et de support</u> $\gamma(C)(x)^\wedge$. <u>En outre, pour tout</u> $\varphi' \in \Phi_x$ <u>strictement inférieur à</u> φ , <u>la trace</u> $\Gamma_x^{\varphi'}$ <u>est nulle et, pour tout</u> $\varphi' \in \Phi_x$ <u>strictement supérieur à</u> φ , <u>la trace</u> $\Gamma_x^{\varphi'}$ <u>est la trace qui vaut</u> $+\infty$ <u>en tout point non nul de</u> C^+ .

Vérifions que $\gamma(C)(x)^\wedge$ est le support de Γ_x^{φ} . D'après la proposition I.2.8, le corollaire I.1.8 a) et le lemme IV.2.2 (i), on a

$$\mathrm{Supp}_C\, \Gamma_x^{\varphi} = \mathrm{Supp}_B\, \Gamma_x^{\varphi} \circ P \subset \gamma(C)(x)^\wedge ,$$

car $\gamma(C)(x)^\wedge$ est l'ensemble des limites de Θ_x dans $\hat{B}$. Soient $y \in \gamma(C)(x)^\wedge$ et ω un voisinage de y dans $\hat{C}$. Prenons $c \in C^+$, porté par ω , tel que $c(y) \neq 0$. On a $\|\gamma(c)(x)\| = \sup_{t \in \gamma(C)(x)^\wedge} \|c(t)\| \neq 0$ et donc, par hypothèse, $\gamma(c)(x)$ n'appartient pas à $\overline{Z}_x^{\varphi}(A)(x)$. On déduit alors de la proposition III.3.3 (ii) que $\Gamma_x^{\varphi}(c) = T_x^{\varphi}(\gamma(c)(x)) \neq 0$, d'où $y \in \mathrm{Supp}\, \Gamma_x^{\varphi}$. D'autre part, on s'assure immédiatement que Γ_x^{φ} est densément définie.

Soit $\varphi' \in \Phi_x$, strictement inférieur à φ . On a

$$\gamma(C)(x) \subset \overline{E}_x^{\varphi}(A)(x) \subset \overline{Z}_x^{\varphi'}(A)(x)$$

d'où $\Gamma_x^{\varphi'}(c) = 0$ pour tout $c \in C^+$ (voir III.3.3 (ii)). Soit $\varphi' \in \Phi_x$, strictement supérieur à φ . On a

$$0 \in \gamma(C)(x) \cap \overline{E}_x^{\varphi'}(A)(x) \subset \gamma(C)(x) \cap \overline{Z}_x^{\varphi}(A)(x) = 0$$

d'où $\Gamma_x^{\varphi'}(c) = +\infty$ pour tout $c \neq 0$ appartenant à C^+ (voir III.3.4).

IV.2.4. PROPOSITION. <u>Soient</u> A <u>une</u> C^*<u>-algèbre à trace continue et</u> C <u>une</u> C^*<u>-algèbre. Soit</u> $B \in \mathcal{G}(A,C)$, <u>associée à</u> $\gamma \in \mathrm{Hom}(C, L(A)/A)$.

(i) <u>Soient</u> $x \in \beta\hat{A} - \hat{A}$ <u>et</u> $\varphi \in \Phi_x$. <u>Si</u> B <u>est bien</u> φ<u>-encadrée suivant</u> Θ_x , <u>on a</u> $\gamma(C)(x) \subset (\overline{E}_x^{\varphi}(A)(x) - \overline{Z}_x^{\varphi}(A)(x)) \cup \{0\}$.

(ii) <u>Soit</u> $\varphi \in \Phi^{\hat{A}}$. <u>Alors</u> B <u>est bien</u> φ<u>-encadrée suivant</u> $\Theta^{\hat{A}}$ <u>si et seulement si</u> $\gamma(C)(x) \subset (\overline{E}^{\varphi}(A)(x) - \overline{Z}^{\varphi}(A)(x)) \cup \{0\}$ <u>pour tout</u> $x \in \beta\hat{A} - \hat{A}$.

(i) Supposons que B est bien φ-encadrée suivant Θ_x . D'après la proposition IV.2.1 (i), on a $\gamma(C)(x) \subset \overline{E}_x^{\varphi}(A)(x)$. Soit $(m,c) \in B^+$ tel que $\gamma(c)(x) \neq 0$. Par hypothèse, on a $\lim\sup_{t,\Theta_x} \varphi(t).\mathrm{rg}\, g_\varepsilon(m)(t) \neq 0$ pour tout $\varepsilon > 0$ tel que

$$\lim_{t,\Theta_x} \|g_\varepsilon(m)(t)\| = \|g_\varepsilon(\gamma(c)(x))\| \neq 0 .$$

On déduit alors du lemme I.2.10 que $m \notin \overline{Z}_x^{\varphi}(A)$, d'où $\dot{m}(x) \notin \overline{Z}_x^{\varphi}(A)(x)$ (voir III.2.10). On a donc $\gamma(C)(x) \subset (\overline{E}_x^{\varphi}(A)(x) - \overline{Z}_x^{\varphi}(A)(x)) \cup \{0\}$.

(ii) Supposons que B est bien φ-encadrée suivant $\Theta^{\hat{A}}$. Pour tout $x \in \beta\hat{A} - \hat{A}$, la C^*-algèbre B est bien φ-encadrée suivant Θ_x, d'où $\gamma(C)(x) \subset (\overline{E}^{\varphi}(A)(x) - \overline{Z}^{\varphi}(A)(x)) \cup \{0\}$ d'après (i).

Supposons maintenant que $\gamma(C)(x) \subset (\overline{E}^{\varphi}(A)(x) - \overline{Z}^{\varphi}(A)(x)) \cup \{0\}$ pour tout $x \in \beta\hat{A} - \hat{A}$. D'après la proposition IV.2.1 (ii), la C^*-algèbre B est φ-encadrée suivant $\Theta^{\hat{A}}$. Supposons que B ne soit pas bien φ-encadrée suivant $\Theta^{\hat{A}}$. Alors il existe $b \in B$ et un ultrafiltre Θ' plus fin que $\Theta^{\hat{A}}$ tel que $\lim_{t,\Theta'} \varphi(t).\mathrm{rg}\, b(t) = 0$ et $\lim_{t,\Theta'} \|b(t)\| \neq 0$ (voir I.2.14). Cet ultrafiltre converge dans $\beta\hat{A}$ vers un point $x \in \beta\hat{A} - \hat{A}$, et il est donc plus fin que Θ_x. D'après le lemme IV.2.3, on a $\mathrm{Supp}\, \Gamma_x^{\varphi} = \gamma(C)(x)^{\wedge}$. D'autre part, pour tout $b' \in B$, on a

$$\lim_{t,\Theta_x} \|b'(t)\| = \sup_{t \in \gamma(C)(x)^{\wedge}} \|b'(t)\| .$$

Alors, d'après la proposition I.2.13, B est bien φ-encadrée suivant Θ_x. Ceci est absurde car $\lim_{t,\Theta'} \varphi(t).\mathrm{rg}\, b(t) = 0$ et $\lim_{t,\Theta'} \|b(t)\| \neq 0$.

IV.2.5. COROLLAIRE. Soient A une C^*-algèbre à trace continue et C une C^*-algèbre. Soit $\varphi \in \Phi^{\hat{A}}$ et soit $B \in \mathcal{S}(A,C)$, bien φ-encadrée suivant $\Theta^{\hat{A}}$. Notons γ l'homomorphisme de C dans $L(A)/A$ associé à B, et f la fonction continue de $\beta\hat{A} - \hat{A}$ dans $\mathcal{F}(\hat{C})$ associée à $\hat{B} \in \mathcal{S}(\hat{A},\hat{C})$. On a $f(x) = \gamma(C)(x)^{\wedge} = \mathrm{Supp}\, \Gamma_x^{\varphi}$ pour tout $x \in \beta\hat{A} - \hat{A}$.

Cela résulte de la proposition IV.1.4, du lemme IV.2.3, et de la proposition IV.2.4 (ii).

IV.2.6. Soient A une C^*-algèbre à trace continue et C une C^*-algèbre. L'exemple VIII.1 montre qu'étant donné $B \in \mathcal{S}(A,C)$ il n'existe pas nécessairement $\varphi \in \Phi^{\hat{A}}$ tel que B soit bien φ-encadrée suivant $\Theta^{\hat{A}}$.

IV.3. Extensions semi-équivalentes.

IV.3.1. LEMME. Soient X un espace localement compact, H un espace hilbertien et $A = \mathcal{C}^{\circ}(X, \mathcal{LC}(H))$. Désignons par $\mathcal{H}(X)$ le groupe des homéomorphismes de X sur X. Soient $f \in \mathcal{H}(X)$ et $v \in \mathcal{C}(X, \mathcal{PU}(H))$. Pour tout $a \in A$, l'élément $x \mapsto v(x)a(f(x))$ appartient à A. Notons $\psi(f,v)$ l'application de A dans A qui à a fait correspondre l'élément $x \mapsto v(x)a(f(x))$. Alors $\psi(f,v)$ est un automorphisme de A et l'application ψ qui associe $\psi(f,v)$ à (f,v) est une bijection de $\mathcal{H}(X) \times \mathcal{C}(X, \mathcal{PU}(H))$ sur le groupe des automorphismes de A.

Les premières assertions se vérifient facilement. Montrons que tout automorphisme α de A est de la forme $\psi(f,v)$. Soit $x \in X$ et considérons la représentation irréductible $a \mapsto \alpha(a)(x)$ de A ; il existe $f(x) \in X$ tel que cette représentation soit équivalente à la représentation $a \mapsto a(f(x))$, et cette propriété détermine $f(x)$ de façon unique. Il existe alors un élément unique $v(x)$ dans $\mathcal{PU}(H)$ tel que

$$\alpha(a)(x) = v(x)a(f(x))$$

pour tout $a \in A$. Ensuite on vérifie sans peine que les fonctions $x \longmapsto f(x)$ et $x \longmapsto v(x)$ sont continues. Montrons que ψ est injective. Soit $(f',v') \in \mathcal{H}(X) \times \mathcal{C}(X, \mathcal{PU}(H))$ tel que $\psi(f,v) = \psi(f',v')$. Pour tout $x \in X$ et tout $a \in A$, on a $v(x)a(f(x)) = v'(x)a(f'(x))$, d'où $f(x) = f'(x)$. On en déduit alors que $v = v'$.

IV.3.2. Conservons les notations du lemme IV.3.1. Si $v \in \mathcal{C}(X,\mathcal{PU}(H))$ on notera α_v l'automorphisme de A qui à $a \in A$ associe $x \longmapsto v(x)a(x)$. Soit u une fonction fortement continue de X dans $\mathcal{U}(H)$. Alors $x \longmapsto \tilde{u}(x)$ est continue de X dans $\mathcal{PU}(H)$ (voir 0.7); on posera $\alpha_u = \alpha_{\tilde{u}}$.

IV.3.3. On conserve toujours les notations du lemme IV.3.1. Soit α un automorphisme de A . On a $\bar{\alpha}(L(A)) = L(A)$ et $\bar{\bar{\alpha}}(L(A)/A) = L(A)/A$. On notera encore $\bar{\alpha}$ et $\bar{\bar{\alpha}}$ respectivement les automorphismes $\bar{\alpha}|L(A)$ et $\bar{\bar{\alpha}}|L(A)/A$. De même, on a $\bar{\alpha}(\bar{E}^1(A)) = \bar{E}^1(A)$ et $\bar{\bar{\alpha}}(\bar{E}^1(A)/A) = \bar{E}^1(A)/A$. Remarquons par contre que la sous-C^*-algèbre faciale $\mathcal{C}(\beta X, \mathcal{LC}(H))$ (resp. $\mathcal{C}(\beta X - X, \mathcal{LC}(H))$) de $\bar{E}^1(A)$ (resp. $\bar{E}^1(A)/A$) n'est pas nécessairement stable par $\bar{\alpha}$ (resp. $\bar{\bar{\alpha}}$) .

Soient $v \in \mathcal{C}(X, \mathcal{PU}(H))$, $x \in \beta X - X$ et $1 \in L(A)$. On a

$$\begin{aligned}\|\bar{\alpha}_v(1)(x)\| &= \lim_{t,\Theta_x} \|\bar{\alpha}_v(1)(t)\| = \lim_{t,\Theta_x} \|v(t)1(t)\| \\ &= \lim_{t,\Theta_x} \|1(t)\| = \|1(x)\| .\end{aligned}$$

Il en résulte que $\bar{\alpha}_v(1)(x)$ ne dépend que de $1(x)$ et que l'application $1(x) \longmapsto \bar{\alpha}_v(1)(x)$ est un automorphisme de $L(A)(x)$. On notera $\bar{\alpha}_v(x)$ cet automorphisme. Si $t \in X$, on posera $\bar{\alpha}_v(t) = v(t)$. L'automorphisme $\bar{\alpha}_v$ (resp. $\bar{\bar{\alpha}}_v$) de $L(A)$ (resp. $L(A)/A$) fait donc correspondre à $1 \in L(A)$ (resp. $L(A)/A$) le champ $t \longmapsto \bar{\alpha}_v(t)1(t)$ sur βX (resp. $\beta X - X$) . Pour tout $t \in \beta X - X$, on a $\bar{\alpha}_v(t)(\bar{E}^1(A)(t)) = \bar{E}^1(A)(t)$. Par contre la sous-C^*-algèbre faciale $\mathcal{LC}(H)$ de $\bar{E}^1(A)(t)$ n'est pas nécessairement stable par $\bar{\alpha}_v(t)$. Lorsque $\dim H < +\infty$, la fonction v se prolonge en une fonction continue (notée encore v) de βX dans $\mathcal{PU}(H)$ puisque $\mathcal{PU}(H)$ est compact, et $\bar{\alpha}_v(t)$ n'est autre que l'automorphisme $v(t)$ de $L(A)(t) = \mathcal{L}(H)$ si $t \in \beta X$.

Si $u \in \mathcal{C}(X, \mathcal{U}(H))$, on adoptera les notations correspondantes à partir de l'automorphisme α_u de A .

IV.3.4. DEFINITION. Soient X un espace localement compact, H un espace hilbertien, $A = \mathcal{C}^\circ(X, \mathcal{LC}(H))$, et C une C^*-algèbre. Soient B_1 et B_2 deux extensions de A par C . On dira que B_1 et B_2 sont semi-équivalentes s'il existe une fonction continue v de X dans $\mathcal{PU}(H)$

et un isomorphisme β *de* B_1 *sur* B_2 *tels que le diagramme suivant soit commutatif* :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_v"'] & B_1 \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr] & & \\ & & & C \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B_2 \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Si $B \in \mathrm{Ext}(A,C)$, on notera $\tilde{B}$ sa classe de semi-équivalence. L'ensemble des $\tilde{B}$ avec $B \in \mathrm{Ext}(A,C)$ (resp. $\mathcal{S}(A,C)$) sera noté $\mathrm{Ext}(A,C)^{\sim}$ (resp. $\mathcal{S}(A,C)^{\sim}$).

IV.3.5. LEMME. *Soient* X *un espace localement compact*, H *un espace hilbertien*, $A = \mathcal{C}^{\circ}(X, \mathcal{LC}(H))$ *et* C *une* C^**-algèbre*.

(i) $\mathcal{S}(A,C)$ *est stable par semi-équivalence, et deux extensions semi-équivalentes appartenant à* $\mathcal{S}(A,C)$ *ont même spectre*.

(ii) *Soient* B_1 *et* B_2 *deux extensions semi-équivalentes appartenant à* $\mathcal{S}(A,C)$. *Soit* $\varphi \in \Phi^X$. *Alors* B_1 *est bien* φ*-encadrée suivant* Θ^X *si et seulement si* B_2 *est bien* φ*-encadrée suivant* Θ^X .

(iii) *Soit* $\varphi \in \Phi^X$. *Soient* B_1 *et* B_2 *deux extensions semi-équivalentes appartenant à* $\mathcal{S}(A,C)$ *et bien* φ*-encadrées suivant* Θ^X . *Notons* γ_1 *et* γ_2 *les homomorphismes de* C *dans* $L(A)/A$ *associés respectivement à* B_1 *et* B_2 . *Pour tout* $x \in \beta X - X$ *on a* $\Gamma_x^{\varphi,\gamma_1} = \Gamma_x^{\varphi,\gamma_2}$.

Soient B_1 et B_2 deux extensions semi-équivalentes de A par C , associées respectivement aux homomorphismes γ_1 et γ_2 de C dans $M(A)/A$. Soient v une fonction continue de X dans $\mathcal{PU}(H)$ et β un isomorphisme de B_1 sur B_2 tel que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, dash, "\alpha_v"'] & B_1 \arrow[d, dash, "\beta"] \arrow[dr] & & \\ & & & C \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B_2 \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

On a $\bar{\bar{\alpha}}_v \circ \gamma_1 = \gamma_2$; donc, comme $\bar{\bar{\alpha}}_v(L(A)/A) = L(A)/A$, on a $\gamma_1(C) \subset L(A)/A$ si et seulement si $\gamma_2(C) \subset L(A)/A$, c'est-à-dire $B_1 \in \mathcal{S}(A,C)$ si et seulement si $B_2 \in \mathcal{S}(A,C)$ (voir IV.1.3). Ceci prouve la première assertion de (i).

Supposons que B_1 et B_2 appartiennent à $\mathcal{S}(A,C)$. Il résulte de l'égalité $\bar{\bar{\alpha}}_v \circ \gamma_1 = \gamma_2$ que $\bar{\alpha}_v(x)(\gamma_1(C)(x)) = \gamma_2(C)(x)$ pour tout $x \in \beta X - X$, d'où $\gamma_1(C)(x)^\wedge = \gamma_2(C)(x)^\wedge$ pour tout $x \in \beta X - X$. On déduit maintenant de la proposition IV.1.4 que $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$. Ceci prouve la deuxième assertion de (i) . Pour tout $b=(m,c) \in B_1$, on a $\beta(b) = (\bar{\alpha}_v(m),c)$ d'après la commutativité du diagramme précédent. Il en résulte que

$$\mathrm{rg}\ b(t) = \mathrm{rg}\ m(t) = \mathrm{rg}\ v(t)m(t) = \mathrm{rg}\ \beta(b)(t)$$

et

$$\mathrm{Tr}\ b(t) = \mathrm{Tr}\ m(t) = \mathrm{Tr}\ v(t)m(t) = \mathrm{Tr}\ \beta(b)(t)$$

pour tout $b \in B_1$ et tout $t \in X$. Les assertions (ii) et (iii) s'en déduisent immédiatement.

IV.3.6. Conservons les notations du lemme IV.3.5. L'application de $\mathcal{G}(A,C)^{\sim}$ dans $\mathcal{G}(X,\hat{C})$ qui, à $\tilde{B} \in \mathcal{G}(A,C)^{\sim}$ fait correspondre $\hat{B}$, sera notée $\tilde{\lambda}$.

CHAPITRE V

Quelques lemmes

On groupe dans ce chapitre quelques résultats qui n'ont pas d'intérêt en eux-mêmes mais seront utilisés à plusieurs reprises dans la suite.

V.1. Lemmes sur les filtres.

V.1.1. LEMME. Soient X un espace localement compact, $x \in \beta X - X$ et $V \in \Theta_x$. On suppose que V admet une partition finie en sous-ensembles $V_1, \dots, V_n$ fermés dans V . Alors il existe un indice i tel que $V_i \in \Theta_x$.

On peut évidemment supposer que $n = 2$ et que V est fermé dans X . Il existe deux éléments W et F appartenant à Θ_x et une fonction continue f de X dans $[0,1]$ tels que :

(i) F soit fermé dans X et W soit ouvert dans X ;

(ii) $F \subset W \subset V$;

(iii) f soit égale à 1 sur F et à 0 hors de W .

Appelons g_i la fonction de X dans $[0,1]$ telle que $g_i(t) = f(t)$ si $t \notin V_i$ et $g_i(t) = 0$ si $t \in V_i$ $(i = 1,2)$. Cette fonction est continue sur X et on notera encore g_i son prolongement continu à βX . On a $F \cap V_1 \subset g_2^{-1}(1)$ et $F \cap V_2 \subset g_2^{-1}(0)$; donc $F \cap V_1$ et $F \cap V_2$ ont des adhérences disjointes dans βX . On a évidemment

$$\overline{F}^{\beta X} = \overline{F \cap V_1}^{\beta X} \cup \overline{F \cap V_2}^{\beta X}$$

et $x \in \overline{F}^{\beta X}$. Supposons par exemple que $x \in \overline{F \cap V_1}^{\beta X}$. Alors

$$\{t \in X \mid g_2(t) > 1/2\}$$

appartient à Θ_x et est contenu dans $W \cap V_1$, d'où $V_1 \in \Theta_x$. Si $x \in \overline{F \cap V_2}^{\beta X}$ on utilise g_1 pour prouver de même que $V_2 \in \Theta_x$.

V.1.2. LEMME. Soient X un espace localement compact, Θ un filtre complètement régulier sur X , et K l'ensemble des valeurs d'adhérence de Θ dans βX . Alors Θ est la trace sur X du filtre des voisinages de K dans βX .

Soit Ω un voisinage ouvert de K dans βX . Comme $\bigcap_{V \in \Theta} \overline{V}^{\beta X}$ est contenu dans Ω , il existe $V \in \Theta$ tel que $V \subset \Omega$.

Soit $V \in \Theta$. Il existe $W \in \Theta$, contenu dans V , et une fonction continue f de X dans $[0,1]$ égale à 0 dans W et à 1 hors de V . Cette fonction se prolonge continuement à βX et le prolongement est évidemment nul sur K. Alors $\{x \in X \mid f(x) < 1/2\}$ appartient à la trace sur X du filtres des voisinages de K et est contenu dans V.

V.1.3. LEMME. <u>Soient X un espace localement compact, et X_1 une compactification de X. Soient F un fermé de $X_1 - X$ et Θ_F la trace sur X du filtre des voisinages de F dans X_1. Alors $h^{-1}_{X,X_1}(F)$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de Θ_F dans βX et Θ_F est la trace sur X du filtre des voisinages de $h^{-1}_{X,X_1}(F)$ dans βX.</u>

Posons $h = h_{X,X_1}$. Vérifions d'abord que $h^{-1}(F)$ est contenu dans l'ensemble des valeurs d'adhérence de Θ_F dans βX. Soit $t \in h^{-1}(F)$. Supposons qu'il existe un voisinage V de t dans βX et W appartenant à Θ_F avec $V \cap W = \emptyset$. Soit Ω un voisinage de F dans X_1 tel que $\Omega \cap X = W$. Alors $\overline{h}^{-1}(\Omega)$ est un voisinage de t dans βX et on a $\overline{h}^{-1}(\Omega) \cap V \cap X = W \cap V = \emptyset$. Ainsi $\overline{h}^{-1}(\Omega) \cap V$ est un voisinage de t dans βX qui ne rencontre pas X, ce qui est absurde.

Soit maintenant $t \in (\beta X - X) - h^{-1}(F)$. Comme F est compact, il existe, dans X_1, des voisinages disjoints Ω et Ω' de F et $h(t)$ respectivement. On a $\overline{h}^{-1}(\Omega) \cap \overline{h}^{-1}(\Omega') = \emptyset$; or $\overline{h}^{-1}(\Omega) \cap X \in \Theta_F$ et $\overline{h}^{-1}(\Omega')$ est un voisinage de t dans βX, donc t n'est pas valeur d'adhérence de Θ_F.

La deuxième assertion résulte immédiatement du lemme V.1.2.

V.1.4. LEMME. <u>On conserve les notations du lemme V.1.3. Soient O un ouvert de $X_1 - X$ et Θ_o la trace sur X du filtre des voisinages de O dans X_1. Alors $h^{-1}(O)$ est contenu dans l'ensemble des valeurs d'adhérence de Θ_o dans βX, et Θ_o est la trace sur X du filtre des voisinages de $h^{-1}(O)$ dans βX.</u>

Soit un ouvert $V \in \Theta_o$. Alors $V \cup O$ est ouvert dans X_1 et $\overline{h}^{-1}(V \cup O) = V \cup h^{-1}(O)$ est ouvert dans βX. Donc Θ_o est moins fin que la trace sur X du filtre des voisinages de $h^{-1}(O)$ dans βX. Soit maintenant $W \subset X$ tel que $W \cup h^{-1}(O)$ soit ouvert dans βX. Alors $F = \overline{h}(\beta X - (W \cup h^{-1}(O)))$ est fermé dans X_1. On a $O \subset X_1 - F$ et $(X_1 - F) \cap X = W$, d'où $W \in \Theta_o$. Ainsi Θ_o est la trace sur X du filtre des voisinages de $h^{-1}(O)$ dans βX. On en déduit que $h^{-1}(O)$ est contenu dans l'ensemble des valeurs d'adhérence de Θ_o dans βX.

V.1.5. LEMME. <u>Conservons les notations du lemme V.1.4 et supposons que que O est réunion dénombrable de compacts. Il existe $V \in \Theta_o$ tel que $V \cup h^{-1}(O)$ soit paracompact.</u>

Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de compacts dans $X_1 - X$ telle que $O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. On construit sans difficulté, dans X_1, une suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$

de compacts et une suite $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts telles que

$$K_n \subset \Omega_n \subset H_n \subset \Omega_{n+1} \quad \text{et} \quad \Omega_n \cap (X_1 - X) \subset 0$$

pour $n \in \mathbb{N}$. Posons $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ et $V = \Omega \cap X$. On a $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$ et $\Omega \cap (X_1 - X) = 0$. Les égalités

$$V \cup h^{-1}(0) = \bar{h}^{-1}(\Omega) = \bar{h}^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bar{h}^{-1}(H_n)$$

entraînent que $V \cup h^{-1}(0)$ est ouvert dans βX et dénombrable à l'infini, d'où il résulte que $V \cup h^{-1}(0)$ est paracompact.

V.1.6. DEFINITION. _Soient_ X _un espace localement compact et_ Θ _un filtre sur_ X . _On dira que_ Θ _se divise en_ n _bouts s'il existe_ n _filtres complètement réguliers_ $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ _possèdant les propriétés suivantes :_

(i) _pour_ $i = 1,\ldots,n$, _prenons_ $V_i \in \Theta_i$; _alors_ $\bigcup_{i=1}^{n} V_i \in \Theta$ _et une base de_ Θ _est formée de tels ensembles;_

(ii) _pour tous_ i _et_ j _distincts, il existe_ $V_i \in \Theta_i$ _et_ $V_j \in \Theta_j$ _tels que_ $V_i \cap V_j = \emptyset$;

(iii) $\bigcap_{V\in\Theta_i} V = \emptyset$ _pour_ $i = 1,\ldots,n$;

(iv) Θ_i _possède une base formée de parties connexes, pour_ $i = 1,\ldots,n$.

V.1.7. Conservons les notations de V.1.6. Il résulte évidemment de (i) que chaque filtre Θ_i est plus fin que Θ .

Supposons l'existence de deux ensembles $(\Theta_i)_{i=1,\ldots,n}$ et $(\Theta'_j)_{j=1,\ldots,m}$ de filtres sur X qui satisfont aux conditions de la définition V.1.6. Montrons d'abord que tout filtre Θ'_j est plus fin que l'un des filtres $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$. Pour $i = 1,\ldots,n$ prenons des ouverts $V_i \in \Theta_i$ tels que $V_i \cap V_{i'} = \emptyset$ si $i \neq i'$. Il existe $V'_j \in \Theta'_j$, que l'on choisira connexe, tel que $V'_j \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i$, et, par conséquent, il existe i_1 tel que $V'_j \subset V_{i_1}$. Prenons un ouvert $W_{i_1} \in \Theta_{i_1}$ contenu dans V_{i_1} . Comme précédemment, il existe un ensemble connexe $W'_j \in \Theta'_j$ contenu dans $W_{i_1} \cup (\bigcup_{i\neq i_1} V_i)$ Alors W'_j est contenu soit dans W_{i_1} soit dans $\bigcup_{i\neq i_1} V_i$. Cette dernière éventualité est impossible car $\bigcup_{i\neq i_1} V_i$ est disjoint de V_{i_1} , lequel appartient à Θ'_j . Ainsi Θ'_j est plus fin que Θ_{i_1}. De même, on démontre que tout filtre Θ_j est plus fin que l'un des filtres $\Theta'_1, \ldots, \Theta'_m$. Il résulte alors de la condition (ii) de la définition V.1.6 que tout filtre Θ'_j est égal à l'un des filtres $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$, que tout filtre Θ_j est égal à l'un des filtres $\Theta'_j, \ldots, \Theta'_m$, et donc que $m = n$.

On dira que les filtres $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ sont les bouts de Θ .

V.1.8. DEFINITION. _Soit_ X _un espace localement compact. On dira que_ X _a un nombre fini de bouts si le filtre_ Θ^X _des voisinages de l'infini dans_ X _se divise en un nombre fini de bouts. Un bout de_ Θ^X _sera appelé bout de_ X .

V.1.9. Lorsque X a un nombre fini de bouts, chaque bout de X possède une base formée de parties fermées connexes, à frontière compacte non vide. En effet, soient $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ les bouts de X. Prenons $V_1 \in \Theta_1$. Pour $j = 1, \dots, n$, choisissons des fermés $F_j \in \Theta_j$, deux à deux disjoints, avec F_1 connexe et contenu dans V_1. L'ensemble $F = \bigcup_{j=1}^{n} F_j$ appartient à Θ et donc $F \cup (\beta X - X)$ est un voisinage fermé de $\beta X - X$ dans βX. Il existe donc un ouvert ω de X, contenu dans F, tel que $\omega \cup (\beta X - X)$ soit ouvert dans βX. Il en résulte que $F - \omega$ est compact. On a $F - \omega \supset Fr(F) = \bigcup_{j=1}^{n} Fr(F_j)$ (où Fr désigne la frontière). Donc $Fr(F_1)$ est compact. Ainsi Θ_1 possède une base formée de parties connexes, fermées, à frontière compacte. La condition (iii) de V.1.6 entraîne que F_1 contient strictement un fermé G_1 à frontière compacte, appartenant à Θ_1. La frontière de G_1 n'est pas vide puisque F_1 est connexe.

Des notions voisines de cette notion de bout d'un espace localement compact ont déjà été considérées précédemment (voir [21] par exemple).

V.1.10. LEMME. <u>Soit</u> X <u>un espace localement compact</u>.

(i) <u>Soient</u> Θ <u>et</u> Θ' <u>deux filtres complètement réguliers tels qu'il existe</u> $S \in \Theta$ <u>et</u> $S' \in \Theta'$ <u>avec</u> $S \cap S' = \emptyset$. <u>Soient</u> K <u>et</u> K' <u>les ensembles des valeurs d'adhérence dans</u> βX <u>de</u> Θ et Θ' <u>respectivement</u>. <u>On a</u> $K \cap K' = \emptyset$.

(ii) <u>Soit</u> Θ <u>un filtre sur</u> X <u>se divisant en</u> n <u>bouts</u> $\Theta_1, \dots, \Theta_n$. <u>Soit</u> K_i <u>l'ensemble des valeurs d'adhérence de</u> Θ_i <u>dans</u> βX, <u>pour</u> $i = 1, \dots, n$. <u>Les ensembles</u> $K_1, \dots, K_n$ <u>sont des fermés connexes, deux à deux disjoints dans</u> $\beta X - X$, <u>et</u> $\bigcup_{i=1}^{n} K_i$ <u>est l'ensemble des valeurs d'adhérence de</u> Θ <u>dans</u> βX.

(i) Soit $x \in K \cap K'$. Alors Θ et Θ' sont moins fins que la trace sur X du filtre des voisinages de x dans βX d'après le lemme V.1.2, ce qui est absurde.

(ii) On a $K_i = \bigcap_{V \in \Theta_i} \overline{V}^{\beta X}$; ceci entraîne que K_i est connexe. La deuxième assertion de (ii) résulte de (i) et la troisième est évidente.

V.2. <u>Lemmes de prolongement</u>.

V.2.1. DEFINITION. <u>Soient</u> X <u>un espace topologique et</u> Θ <u>un filtre sur</u> X. <u>Soit</u> H <u>un espace hilbertien de dimension finie</u> r. <u>On dira que</u> Θ <u>possède la propriété de prolongement</u> $\mathcal{P}_r$ <u>si, pour tout</u> $V \in \Theta$ <u>et tout</u> $f \in \mathcal{C}(V, \mathcal{PU}(H))$, <u>il existe</u> $W \in \Theta$ <u>contenu dans</u> V <u>et</u> $g \in \mathcal{C}(X, \mathcal{PU}(H))$ <u>tels que</u> $g|W = f|W$.

Cette propriété est par exemple vérifiée lorsque Θ possède une base formée de rétractes de X .

V.2.2. Soient X un espace localement compact, H un espace hilbertien et $A = \mathscr{C}^\circ(X, \mathscr{L}\mathscr{C}(H))$. Soit $\mathscr{L}_A'^1$ le champ continu de C^*-algèbres défini par $\overline{E}^1(A)$ sur βX (voir III.2.13). Pour toute partie Ω de βX , on notera $\Lambda^1(\Omega,A)$ l'ensemble des champs d'opérateurs continus pour $\mathscr{L}_A'^1$ sur Ω . En particulier, si $\Omega \subset X$, on a $\Lambda^1(\Omega,A) = \mathscr{C}(\Omega, \mathscr{L}\mathscr{C}(H))$.

Soit $\Omega \subset \beta X - X$. Considérons un champ de projecteurs $P \in \Lambda^1(\Omega,A)$ tel que $T_x^1(P(x))$ soit constant sur Ω . Puisque $\overline{E}^1(A)(x)$ est une C^*-algèbre duale pour tout $x \in \Omega$, et d'après la forme de T_x^1 (voir III.4.4) cette constante est nécessairement un entier $k \geqslant 0$. On dira que P est de rang k .

V.2.3. LEMME. <u>Soient</u> X <u>un espace localement compact,</u> Ω <u>une partie de</u> $\beta X - X$, <u>et</u> Θ <u>la trace sur</u> X <u>du filtre des voisinages de</u> Ω <u>dans</u> βX . <u>Soient</u> H <u>un espace hilbertien de dimension finie</u> r <u>et</u> $A = \mathscr{C}^\circ(X, \mathscr{L}(H))$. <u>On fait les hypothèses suivantes</u> :

a) <u>pour tout</u> $W \in \Theta$ <u>et tout champ de projecteurs appartenant à</u> $\mathscr{C}(W, \mathscr{L}(H))$, <u>de rang constant, il existe</u> $W_1 \in \Theta$, <u>contenu dans</u> W , <u>sur lequel ce champ soit trivial</u>;

b) <u>il existe</u> $V \in \Theta$ <u>tel que</u> $V \cup \Omega$ <u>soit paracompact</u>;

c) Θ <u>possède la propriété de prolongement</u> $\mathscr{P}_r$.

(i) <u>Soit</u> P <u>un champ de projecteurs, de rang</u> k , <u>appartenant à</u> $\Lambda^1(\Omega,A)$. <u>Il existe un projecteur</u> $Q \in L(A)$ <u>tel que</u> $\operatorname{rg} Q(t) = k$ <u>si</u> $t \in X$ <u>et tel que</u> $Q|\Omega = P$. <u>De plus, on peut choisir</u> Q <u>de façon que les champs</u> $t \longmapsto Q(t)$ <u>et</u> $t \longmapsto 1 - Q(t)$ <u>soient triviaux sur</u> X .

(ii) <u>Soient</u> $P_1, \dots, P_n$ <u>des champs de projecteurs appartenant à</u> $\Lambda^1(\Omega,A)$, <u>de rang</u> $k_1, \dots, k_n$ <u>respectivement, tels que</u> $P_iP_j = 0$ <u>pour</u> $i \neq j$. <u>Donnons-nous des projecteurs</u> $R_1, \dots, R_n$ <u>appartenant à</u> $\mathscr{L}(H)$, <u>deux à deux orthogonaux, tels que</u> $\operatorname{rg} R_i = k_i$ <u>pour</u> $i = 1,\dots,n$. <u>Il existe une fonction continue</u> v <u>de</u> βX <u>dans</u> $\mathscr{P}\mathscr{U}(H)$ <u>telle qu'on ait</u> $v(t)P_i(t) = R_i$ <u>pour tout</u> $t \in \Omega$ <u>et</u> $i = 1,\dots,n$.

Prouvons (ii). Soit $V \in \Theta$ tel que $V \cup \Omega$ soit paracompact. Remarquons que Ω est fermé dans $V \cup \Omega$. Considérons l'élément $\sum_{j=1}^{n} jP_j$ de $\Lambda^1(\Omega,A)$. D'après ([16], 10.1.12) il existe un champ d'opérateurs $l \in \Lambda^1(V \cup \Omega, A)$ tel que $l|\Omega = \sum_{j=1}^{n} jP_j$. Posons $\omega = \bigcup_{j=0}^{n}]j-1/3, j+1/3[$. Comme $t \longmapsto \operatorname{Sp}' l(t)$ est une fonction continue de $V \cup \Omega$ dans $\mathscr{F}(\mathbf{R})$ (voir I.1.6), il existe $W \in \Theta$, contenu dans V , tel que $\operatorname{Sp}' l(t) \subset \omega$ si $t \in W$. Pour $j = 1,\dots,n$ soit f_j une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $[0,1]$ qui vaut 1 sur $[j-1/3, j+1/3]$ et 0 hors de $]j-1/2, j+1/2[$; on a $f_j(l)|\Omega = P_j$. Posons $f_j(l)|W \cup \Omega = Q_j$. Ce raisonnement classique de Fell nous prouve l'existence de champs de projecteurs $Q_1, \dots, Q_n$ appartenant à $\Lambda^1(W \cup \Omega, A)$, deux à deux orthogonaux, tels que $Q_j|\Omega = P_j$ pour $j = 1, \dots, n$. On déduit de la proposition III.3.3 que la fonction qui vaut $\mathrm{Tr}\, Q_j(t)$ sur W et $T^1_t(P_j(t))$ sur Ω est continue sur $W \cup \Omega$. Donc on peut supposer que $\mathrm{rg}\, Q_j(t) = k_j$ pour tout $t \in W$ et $j = 1, \dots, n$, en restreignant au besoin W. Alors, grâce à l'hypothèse a), on peut supposer que les champs de projecteurs $Q_1, \dots, Q_n$ sont triviaux sur W ainsi que le champ Q_0 défini sur W par $Q_0(t) = 1 - \sum_{j=1}^{n} Q_j(t)$. Posons $R_0 = 1 - \sum_{j=1}^{n} R_j$. Pour $j = 0, \dots, n$ soit $(u_j(t))_{t \in W}$ un champ d'isométries $u_j(t) : Q_j(t)(H) \longrightarrow R_j(H)$, transformant l'ensemble des fonctions continues a de W dans H telles que $a(t) \in Q_j(t)(H)$ pour tout $t \in W$ en l'ensemble des fonctions continues de W dans $R_j(H)$. Alors $t \longmapsto u(t) = \sum_{j=0}^{n} u_j(t)$ est une fonction de W dans $\mathcal{U}(H)$; vérifions qu'elle est continue. Soit $z \in H$; les fonctions $t \longmapsto u_j(t)Q_j(t)(z)$ sont continues de W dans $R_j(H)$ par définition des champs $t \longmapsto u_j(t)$, d'où il résulte que $t \longmapsto u(t)(z)$ est continue. D'après l'hypothèse c), il existe $W_1 \in \Theta$, contenu dans W, et $v \in \mathcal{C}(X, \mathcal{PU}(H))$ tels que $v(t) = \tilde{u}(t)$ sur W_1. Comme $\mathcal{PU}(H)$ est compact, v se prolonge en une fonction continue (notée encore v) de βX dans $\mathcal{PU}(H)$. On a $v(t)Q_j(t) = R_j$ pour tout $t \in W_1$, d'où $v(t)P_j(t) = R_j$ sur Ω, et ceci pour $j = 1, \dots, n$..

L'assertion (i) se déduit immédiatement de (ii). Conservons les notations de la démonstration de (ii) avec $n = 1$, et posons $P = P_1$. Il suffit de prendre pour Q la fonction continue $t \longmapsto v(t)^{-1}R_1$ de X dans $\mathcal{L}(H)$.

V.2.4. LEMME. Soient H un espace hilbertien de dimension infinie, T un espace paracompact, S un fermé de T et O un voisinage ouvert de S.

(i) Soit u une fonction fortement continue de O dans $\mathcal{U}(H)$. Il existe une fonction fortement continue u' de T dans $\mathcal{U}(H)$ telle que $u'|S = u|S$.

(ii) Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions (normiquement) continues de O dans H telle que, pour tout $t \in O$, $(x_i(t))_{i \in I}$ forme une base orthonormale de H. Il existe une famille $(y_i)_{i \in I}$ de fonctions continues de T dans H telle que $(y_i(t))_{i \in I}$ soit une base orthonormale de H pour tout $t \in T$, et telle que $y_i|S = x_i|S$ pour tout $i \in I$.

(i) D'après ([16], 10.8.2), $\mathcal{U}(H)$ muni de la topologie forte est contractile. Alors (i) résulte de ([33], exposé 1, th. 1).

(ii) Choisissons une base orthonormale $(e_i)_{i \in I}$ de H et, pour tout $t \in O$, soit $u(t)$ l'opérateur unitaire qui à $x_i(t)$ fait correspondre e_i ($i \in I$). On définit ainsi une fonction fortement continue $t \longmapsto u(t)$ de O dans $\mathcal{U}(H)$. D'après (i), il existe une fonction fortement continue

u' de T dans $\mathcal{U}(H)$ telle que $u|S = u'|S$. Il suffit maintenant de poser $y_i(t) = u'(t)^* e_i$.

V.2.5. LEMME. Soient X un espace localement compact paracompact, Ω une partie de $\beta X - X$, et Θ la trace sur X du filtre des voisinages de Ω dans βX . Soient H un espace hilbertien de dimension infinie et $A = \mathcal{C}^\circ(X, \mathcal{LC}(H))$. On fait les hypothèses suivantes :

a) pour tout $W \in \Theta$ et tout champ de projecteurs appartenant à $\mathcal{C}(W, \mathcal{LC}(H))$, de rang constant, il existe $W_1 \in \Theta$, contenu dans W , sur lequel ce champ soit trivial;

b) il existe $V \in \Theta$ tel que $V \cup \Omega$ soit paracompact;

c) Θ a une base formée de parties fermées.

(i) Soit P un champ de projecteurs, de rang k , appartenant à $\Lambda^1(\Omega, A)$. Il existe un projecteur $Q \in L(A)$ tel que $\operatorname{rg} Q(t) = k$ si $t \in X$ et tel que $Q|\Omega = P$. De plus, on peut choisir Q de façon que les champs $t \longmapsto Q(t)$ et $t \longmapsto 1 - Q(t)$ soient triviaux sur X .

(ii) Soient $P_1, \dots, P_n$ des champs de projecteurs appartenant à $\Lambda^1(\Omega, A)$, de rang $k_1, \dots, k_n$ respectivement, tels que $P_i P_j = 0$ si $i \neq j$. Donnons-nous des projecteurs $R_1, \dots, R_n$ appartenant à $\mathcal{LC}(H)$, deux à deux orthogonaux, tels que $\operatorname{rg} R_i = k_i$ pour $i = 1, \dots, n$. Il existe une fonction fortement continue u de X dans $\mathcal{U}(H)$ telle qu'on ait $\bar{\alpha}_u(t) P_i(t) = R_i$ pour tout $t \in \Omega$ et $i = 1, \dots, n$.

L'assertion (i) résulte immédiatement de (ii). Prouvons (ii). Comme dans la démonstration du lemme V.2.3, on montre l'existence d'un ouvert $W \in \Theta$ et de champs de projecteurs $Q_1, \dots, Q_n$ appartenant à $\Lambda^1(W \cup \Omega, A)$, deux à deux orthogonaux, triviaux sur W , tels que $\operatorname{rg} Q_j(t) = k_j$ si $t \in W$ et tels que $Q_j|\Omega = P_j$ pour $j = 1, \dots, n$. D'après ([17], prop. 18), le champ de projecteurs $t \longmapsto 1 - \sum_{j=1}^{n} Q_j$ est trivial sur W . Comme dans la démonstration du lemme V.2.3, on construit une fonction fortement continue u de W dans $\mathcal{U}(H)$ telle que $u(t) Q_j(t) u(t)^* = R_j$ pour tout $t \in W$ et $j = 1, \dots, n$. Soit W_1 un fermé appartenant à Θ , contenu dans W . D'après le lemme V.2.4 (i), il existe une fonction fortement continue u' de X dans $\mathcal{U}(H)$ telle que $u'|W_1 = u|W_1$. On a alors $\bar{\alpha}_{u'}(t) P_j(t) = \bar{\alpha}_{u'}(t) Q_j(t) = R_j$ pour tout $t \in \Omega$ et $j = 1, \dots, n$.

V.2.6. LEMME. Soient A une C^*-algèbre à spectre séparé, P un projecteur de $L(A)$ et $A' = (1 - P)A(1 - P)$. Alors $L(A')$ est canoniquement isomorphe à $(1 - P)L(A)(1 - P)$, et l'injection canonique de $L(A')$ dans $L(A)$ donne, par passage au quotient, une bijection de $L(A')/A'$ sur la C^*-algèbre des $l \in L(A)/A$ tels que $l(t)P(t) = P(t)l(t) = 0$ pour tout $t \in \beta\hat{A} - \hat{A}$.

Ce lemme se démontre sans difficulté. Il permet d'identifier $L(A')$

(resp. $L(A')/A'$) à une sous-C^*-algèbre de $L(A)$ (resp. $L(A)/A$) .

V.2.7. LEMME. Soient X un espace localement compact dénombrable à l'infini, Ω une partie de $\beta X - X$, et Θ la trace sur X du filtre des voisinages de Ω dans βX . Soient H un espace hilbertien de dimension $\aleph_0$ et $A = \mathcal{C}^\circ(X, \mathcal{L}\mathcal{C}(H))$. On fait les hypothèses suivantes :

a) pour tout $W \in \Theta$ et tout champ de projecteurs appartenant à $\mathcal{C}(W, \mathcal{L}\mathcal{C}(H))$, de rang constant, il existe $W_1 \in \Theta$, contenu dans W , sur lequel ce champ soit trivial;

b) il existe $V \in \Theta$ tel que $V \cup \Omega$ soit paracompact;

c) Θ a une base formée de parties fermées.

Soit $(P_1, \dots, P_n, \dots)$ une suite infinie de champs de projecteurs non nuls appartenant à $\Lambda^1(\Omega, A)$, de rang $k_1, \dots, k_n, \dots$ respectivement, tels que $P_i P_j = 0$ si $i \neq j$. Donnons-nous une suite $(R_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de projecteurs deux à deux orthogonaux dans $\mathcal{L}\mathcal{C}(H)$, de somme 1 , tels que $\operatorname{rg} R_i = k_i$ pour $i \in \mathbb{N}^*$. Il existe une fonction fortement continue u de X dans $\mathcal{U}(H)$ telle qu'on ait $\overline{\alpha}_u(t) P_i(t) = R_i$ pour tous $t \in \Omega$ et $i \in \mathbb{N}^*$.

Choisissons deux suites croissantes de compacts : $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} L_n = X$ et $L_n \subset \operatorname{Int} K_n$. D'après le lemme V.2.5 (i), il existe un projecteur $Q_1 \in L(A)$ et une famille $(x_i^1)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions continues de X dans H tels que :

1) $Q_1 | \Omega = P_1$;

2) $(x_i^1(t))_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une base orthonormale de H pour tout $t \in X$;

3) $Q_1(t)$ est le projecteur sur le sous-espace engendré par les vecteurs $x_1^1(t), \dots, x_{k_1}^1$ pour tout $t \in X$.

On posera $Q_0 = 0$, $h_1 = 0$, et $h_i = \sum_{j=1}^{i-1} k_j$ pour tout $i \geq 2$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons démontrée, pour tout $j \leq n$, l'existence d'un projecteur $Q_j \in L(A)$ et d'une suite $(x_i^j)_{i > h_j}$ de fonctions continues de X dans H tels que :

(i) $Q_j | \Omega = P_j$;

(ii) $(x_i^j(t))_{i > h_j}$ est une base orthonormale de $(1 - \sum_{k=0}^{j-1} Q_k(t))(H)$ pour tout $t \in X$;

(iii) $Q_j(t)$ est le projecteur sur le sous-espace engendré par les vecteurs $x_{h_j+1}^j(t), \dots, x_{h_{j+1}}^j(t)$ pour tout $t \in X$;

(iv) $x_i^{j-1} | L_j = x_i^j | L_j$ si $i > h_j$;

Posons $S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} Q_k(t)$ pour tout $t \in X$; on a $S_n \in L(A)$. D'après

([17], prop. 18) , le champ de projecteurs $t \longmapsto 1 - S_n(t)$ est trivial sur X . Notons Λ l'ensemble des champs d'opérateurs $(1 - S_n)a(1 - S_n)$ avec $a \in \mathcal{C}(X, \mathcal{LC}(H))$. Alors $\mathcal{A}' = (((1 - S_n(t))\ \mathcal{LC}(H)(1 - S_n(t)))_{t\in X}\ ,\ \Lambda)$ est un champ continu trivial de C^*-algèbres. Notons A' la C^*-algèbre définie par $\mathcal{A}'$; on a évidemment $A' = (1 - S_n)A(1 - S_n)$. D'après le lemme V.2.6, $L(A')$ s'identifie canoniquement à $(1 - S_n)L(A)(1 - S_n)$ et $L(A')/A'$ s'identifie canoniquement à la C^*-algèbre des $l \in L(A)/A$ tels que $l(t)S_n(t) = S_n(t)l(t) = 0$ pour tout $t \in \beta X - X$. Il en résulte que P_{n+1} est un élément de $\Lambda^1(\Omega, A')$. Donc, d'après le lemme V.2.5 (i), il existe un projecteur $Q'_{n+1} \in L(A')$ tel que $Q'_{n+1}|\Omega = P_{n+1}$ et tel que les champs $t \longmapsto Q'_{n+1}(t)$ et $t \longmapsto (1 - S_n(t)) - Q'_{n+1}(t)$ soient triviaux sur X . On a $Q'_{n+1}Q_j = 0$ pour $j \leqslant n$. Soit un ouvert $W \in \Theta$, disjoint de K_{n+1} . Prenons une suite $(y_i^{n+1})_{i>h_{n+1}}$ de fonctions continues de W dans H telle que $(y^{n+1}_{h_{n+1}+i}(t))_{i=1,\dots,k_{n+1}}$ soit une base orthonormale de $Q'_{n+1}(t)(H)$ et $(y_i^{n+1}(t))_{i>h_{n+1}}$ soit une base orthonormale de $(1 - S_n(t))(H)$, pour tout $t \in W$. Soit un fermé $W' \in \Theta$, contenu dans W . D'après le lemme V.2.4 (ii), il existe une suite $(x_i^{n+1})_{i>h_{n+1}}$ de fonctions continues de X dans H telle que :

α) $(x_i^{n+1}(t))_{i>h_{n+1}}$ est une base orthonormale de $(1 - S_n(t))(H)$ pour tout $t \in X$;

β) $x_i^n|L_{n+1} = x_i^{n+1}|L_{n+1}$ si $i > h_{n+1}$;

γ) $x_i^{n+1}|W' = y_i^{n+1}|W'$ si $i > h_{n+1}$;

Pour tout $t \in X$, appelons $Q_{n+1}(t)$ le projecteur sur le sous-espace de H engendré par les vecteurs $x^{n+1}_{h_{n+1}+1}(t),\dots,x^{n+1}_{h_{n+2}}(t)$. Alors Q_{n+1} appartient à $L(A)$ et $Q'_{n+1}|W' = Q_{n+1}|W'$. On a donc $Q_{n+1}|\Omega = Q'_{n+1}|\Omega = P_{n+1}$. Ainsi, les éléments Q_{n+1} et $(x_i^{n+1})_{i>h_{n+1}}$ vérifient, avec $j = n+1$, les conditions (i), (ii), (iii), (iv) précédemment énoncées.

De cette façon, on construit par récurrence une suite $(Q_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de champs continus triviaux de projecteurs, appartenant à $L(A)$, tels que $Q_i|\Omega = P_i$ pour $i \in \mathbb{N}^*$ et $Q_iQ_j = 0$ si $i \neq j$. Montrons que $\sum_{i=1}^{\infty} Q_i(t) = 1$ pour tout $t \in X$. Supposons que $t \in L_n$. Par construction $(x_j^n(t))_{j>h_n}$ est une base orthonormale de l'espace $(1 - \sum_{j=0}^{n-1} Q_j(t))(H)$. De plus, on sait que $Q_r(t)$ est le projecteur sur le sous-espace engendré par les vecteurs $x^r_{h_r+1}(t),\dots,x^r_{h_{r+1}}(t)$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$. Comme $t \in L_n$, on a $x_j^r(t) = x_j^n(t)$ pour tout $j > h_r$ et tout $r \geqslant n$. Il en résulte que $\sum_{i=1}^{\infty} Q_i(t) = 1$.

Soit $(u_i(t))_{t\in X}$ un champ d'isométries $u_i(t) : Q_i(t)(H) \longrightarrow R_i(H)$ qui transforme l'ensemble des fonctions continues a de X dans H telles que $a(t) \in Q_i(t)(H)$ pour tout $t \in X$ en l'ensemble des fonctions continues de X dans $R_i(H)$. Pour tout $t \in X$, soit $u(t)$ l'opérateur unitaire de H dont la restriction à $Q_i(t)(H)$ vaut $u_i(t)$ si $i \in \mathbb{N}^*$. Alors $t \longmapsto u(t)$ est une fonction fortement continue de X dans $\mathcal{U}(H)$. On a $u(t)Q_i(t)u(t)^* = R_i$ sur X, d'où $\bar{\alpha}_u(t)P_i(t) = R_i$ sur Ω, et ceci pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.

V.2.8. LEMME. Soient Z un espace normal et S un fermé de Z. Toute fonction continue de S dans $\mathbb{T}$ se prolonge en une fonction continue définie sur un voisinage de S à valeurs dans $\mathbb{T}$.

Soit φ une fonction continue de S dans $\mathbb{T}$. Prenons un voisinage O de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que $\mathbb{T}$ soit un rétracte de O. Il existe un voisinage V de S dans Z tel que φ se prolonge en une fonction continue de V dans O, d'où on déduit un prolongement de φ en une fonction continue de V dans $\mathbb{T}$.

V.2.9. LEMME. Soient X un espace localement compact, Ω une partie de $\beta X - X$, et Θ la trace sur X du filtre des voisinages de Ω dans βX. Soient H un espace hilbertien de dimension finie r, et $A = \mathcal{C}^\circ(X, \mathcal{L}(H))$. On fait les hypothèses suivantes :

a) pour tout $W \in \Theta$ et tout champ de projecteurs appartenant à $\mathcal{C}(W, \mathcal{L}(H))$, de rang constant, il existe $W_1 \in \Theta$ contenu dans W sur lequel ce champ soit trivial;

b) il existe $V \in \Theta$ tel que $V \cup \Omega$ soit paracompact;

c) Θ possède la propriété de prolongement $\mathcal{P}_r$.

Toute fonction continue de Ω dans $\mathcal{PU}(H)$ se prolonge en une fonction continue de βX dans $\mathcal{PU}(H)$.

Soit $(e_i)_{i=1,\dots,r}$ une base orthonormale de H et, pour $i = 1,\dots,r$, appelons a_i le projecteur sur le sous-espace $\mathbb{C}e_i$. Le choix de cette base nous permettra d'écrire les éléments de $\mathcal{L}(H)$ comme des matrices à r lignes et à r colonnes.

Soit $t \mapsto g(t)$ une fonction continue de Ω dans $\mathcal{PU}(H)$. Les fonctions $t \longmapsto g(t)a_i$ sont continues de Ω dans $\mathcal{L}(H)$, et $g(t)a_i$ est un projecteur de rang 1 pour tout $t \in \Omega$ et $i = 1,\dots,r$. D'après le lemme V.2.3 (ii), il existe une fonction continue v de βX dans $\mathcal{PU}(H)$ telle qu'on ait $v(t)g(t)a_i = a_i$ pour tout $t \in \Omega$ et $i = 1,\dots,r$. Si $t \in \Omega$, soit $u(t)$ un élément de $\mathcal{U}(H)$ tel que $\tilde{u}(t) = v(t)g(t)$. D'après ce qui précède, $u(t)$ s'écrit $\begin{pmatrix} \lambda_1(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r(t) \end{pmatrix}$ avec $\lambda_i(t) \in \mathbb{T}$ pour $i = 1,\dots,r$.

Alors $u(t)$ est entièrement déterminé par les conditions $\tilde{u}(t) = v(t)g(t)$ et $\lambda_1(t) = 1$. Avec ce choix de $u(t)$, les fonctions $t \longmapsto \lambda_i(t)$ sont continues de Ω dans $\mathbb{T}$. En effet, $t \longmapsto \tilde{u}(t)$ est continue, et l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{U}(H)$ dont le premier coefficient vaut 1 est canoniquement homéomorphe à son image dans $\mathcal{PU}(H)$. On déduit du lemme V.2.8 l'existence de $W \in \Theta$ et d'une fonction continue de $W \cup \Omega$ dans $\mathcal{U}(H)$ prolongeant u . On notera encore u ce prolongement. Puisque Θ possède la propriété de prolongement $\mathcal{P}_r$, on peut supposer, en restreignant au besoin W , qu'il existe une fonction continue v' de X dans $\mathcal{PU}(H)$ telle que $v'|W = \tilde{u}|W$. Appelons w la fonction continue de βX dans $\mathcal{PU}(H)$ telle que, si $t \in X$, on ait $w(t) = v(t)^{-1}v'(t)$. Alors on a $w(t) = g(t)$ pour tout $t \in \Omega$.

V.2.10. LEMME. <u>Soient</u> X <u>un espace localement compact dénombrable à l'infini</u>, Ω <u>une partie de</u> $\beta X - X$, <u>et</u> Θ <u>la trace sur</u> X <u>du filtre des voisinages de</u> Ω <u>dans</u> βX . <u>Soient</u> H <u>un espace hilbertien de dimension</u> $\aleph_0$ <u>et</u> $A = \mathcal{C}^\circ(X, \mathcal{LC}(H))$. <u>On fait les hypothèses suivantes</u> :

a) <u>pour tout</u> $W \in \Theta$ <u>et tout champ de projecteurs appartenant à</u> $\mathcal{C}(W, \mathcal{LC}(H))$, <u>de rang constant, il existe</u> $W_1 \in \Theta$, <u>contenu dans</u> W , <u>sur lequel ce champ soit trivial</u>;

b) <u>il existe</u> $V \in \Theta$ <u>tel que</u> $V \cup \Omega$ <u>soit paracompact</u>;

c) Θ <u>possède une base formée de parties fermées</u>,

d) <u>il existe</u> $V' \in \Theta$ <u>tel que toute fonction continue de</u> Ω <u>dans</u> $\mathbb{T}$ <u>se prolonge en une fonction continue de</u> $V' \cup \Omega$ <u>dans</u> $\mathbb{T}$.

<u>Soit</u> g <u>une fonction continue de</u> Ω <u>dans</u> $\mathcal{PU}(H)$. <u>Il existe une fonction fortement continue</u> w <u>de</u> X <u>dans</u> $\mathcal{U}(H)$ <u>telle que</u> $\overline{\alpha}_w(t)|\mathcal{LC}(H) = g(t)$ <u>si</u> $t \in \Omega$.

Soit $(e_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une base orthonormale de H , et pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ appelons a_i le projecteur sur $\mathbb{C}e_i$. Comme dans la démonstration du lemme V.2.9, on prouve, en utilisant cette fois le lemme V.2.7, l'existence d'une fonction fortement continue u de X dans $\mathcal{U}(H)$ telle qu'on ait $\overline{\alpha}_u(t)g(t)a_i = a_i$ pour tout $t \in \Omega$ et tout $i \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\overline{\alpha}_u(t)(\mathcal{LC}(H)) = \mathcal{LC}(H)$ si $t \in \Omega$. Soit $d \in \mathcal{LC}(H)^+$ tel que $d \leqslant \sum_{i=1}^{n} g(t)a_i$. On a $\overline{\alpha}_u(t)d \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i$, d'où $\overline{\alpha}_u(t)d \in \mathcal{LC}(H)$ d'après III.4.3 (i). Les éléments d de $\mathcal{LC}(H)^+$ tels que $d \leqslant \sum_{i=1}^{n} g(t)a_i$ pour un certain n engendrent $\mathcal{LC}(H)$; on en déduit que $\overline{\alpha}_u(t)(\mathcal{LC}(H)) \subset \mathcal{LC}(H)$. D'autre part, le projecteur a_i appartient à $\overline{\alpha}_u(t)(\mathcal{LC}(H))$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ puisque $a_i = \overline{\alpha}_u(t)g(t)a_i$. Il en résulte que $\overline{\alpha}_u(t)(\mathcal{LC}(H)) = \mathcal{LC}(H)$. Pour tout $t \in \Omega$, soit $u(t)$ un unitaire de H tel que $\tilde{u}(t) = \overline{\alpha}_u(t)|\mathcal{LC}(H)$. Vérifions que la fonction $t \longmapsto \tilde{u}(t)$ est continue de $X \cup \Omega$ dans $\mathcal{PU}(H)$. Soit $a \in \mathcal{LC}(H)$. Sur X , la fonction $t \longmapsto \tilde{u}(t)a$ est normiquement continue. D'après ([1], chap. I, §8, th. 1), pour montrer la continuité normique de $t \longmapsto \tilde{u}(t)a$ sur $X \cup \Omega$, il suffit de montrer, pour tout $x \in \Omega$, que $\tilde{u}(x)a$ est la limite normique de $t \longmapsto \tilde{u}(t)a$ suivant Θ_x. Sur $X \cup \Omega$, on a $\tilde{u}(t)a = \bar{\alpha}_u(t)a$; c'est-à-dire que $t \longmapsto \tilde{u}(t)a$ est la restriction à $X \cup \Omega$ de $\bar{\alpha}_u(a) \in L(A)$. Comme on a $\tilde{u}(x)a \in \mathcal{LC}(H)$ pour tout $x \in \Omega$, il suffit d'utiliser III.4.2 a).

Si $t \in \Omega$, soit $u'(t)$ un élément de $\mathcal{U}(H)$ tel que $\tilde{u}'(t) = \tilde{u}(t)g(t)$; on a $\tilde{u}'(t)a_i = a_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. En prenant $(e_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ comme système orthonormal de référence, on écrira les éléments de $\mathcal{L}(H)$ comme des matrices infinies. D'après ce qui précède, $u'(t)$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(t) & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \lambda_n(t) & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_i(t) \in \mathbf{T}$ pour $i \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \Omega$. Alors $u'(t)$ est entièrement déterminé par les conditions $\tilde{u}'(t) = \tilde{u}(t)g(t)$ et $\lambda_1 = 1$. De plus, avec ce choix de $u'(t)$, les fonctions $t \longmapsto \lambda_i(t)$ sont continues sur Ω. Grâce à l'hypothèse d), on peut prolonger u' en une fonction fortement continue de $V' \cup \Omega$ dans $\mathcal{U}(H)$; on notera encore u' ce prolongement. Soit W un fermé appartenant à Θ et contenu dans $\operatorname{Int} V'$. D'après le lemme V.2.4 (i) il existe une fonction fortement continue u'' de X dans $\mathcal{U}(H)$ telle que $u''|W = u'|W$. Posons $w(t) = u(t)^* u''(t)$ si $t \in X$. Alors, pour tout $t \in \Omega$, on a

$$\bar{\alpha}_w(t)|\mathcal{LC}(H) = \bar{\alpha}_u(t)^{-1} \circ \bar{\alpha}_{u''}(t)|\mathcal{LC}(H) = \bar{\alpha}_u(t)^{-1} \circ \bar{\alpha}_u(t) \circ g(t) = g(t) .$$

CHAPITRE VI

Extensions encadrées d'une C^*-algèbre à trace continue

VI.1. Généralités.

VI.1.1. DEFINITION. Soient A une C^*-algèbre à spectre séparé et C une C^*-algèbre. On notera $\mathcal{E}(A,C)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{G}(A,C)$ qui sont encadrés suivant $\Theta^{\hat{A}}$.

VI.1.2. PROPOSITION. Soient A une C^*-algèbre uniformément liminaire à spectre séparé et C une C^*-algèbre uniformément liminaire. Alors $\mathcal{E}(A,C)$ est l'ensemble des C^*-algèbre uniformément liminaires qui appartiennent à $\mathcal{G}(A,C)$.

Soit $B \in \mathcal{E}(A,C)$. Pour tout $b = (m,c) \in B^+$, on a $\Pi(m) = \gamma(c) \in \overline{E}^1(A)/A$ (voir IV.2.1 (ii)), d'où $m \in \overline{E}^1(A)$. Il résulte de la proposition III.2.13 (iv) et de I.2.11 que $g_\varepsilon(m)$ est encadré sur $\hat{A}$ pour tout $\varepsilon > 0$. Par ailleurs $g_\varepsilon(c)$, qui appartient à $\mathcal{K}(C)$, est encadré sur $\hat{C}$. On en déduit que $g_\varepsilon(b)$ est encadré sur $\hat{B}$ pour tout $b \in B^+$ et tout $\varepsilon > 0$, et donc que B est uniformément liminaire. Réciproquement, tout élément uniformément liminaire de $\mathcal{G}(A,C)$ appartient évidemment à $\mathcal{E}(A,C)$.

VI.1.3. Soient X un espace localement compact, H un espace hilbertien de dimension finie, et $A = \mathcal{C}^\circ(X, \mathcal{L}(H))$. Comme on a $M(A) = L(A) = \overline{E}^1(A)$ (voir III.4.8), il résulte de la proposition IV.2.1 (ii) que $\mathrm{Ext}(A,C) = \mathcal{G}(A,C) = \mathcal{E}(A,C)$ pour toute C^*-algèbre C .

VI.1.4. PROPOSITION. Soient A une C^*-algèbre à trace continue et C une C^*-algèbre unifère. On suppose que $\hat{A}$ a un nombre fini de bouts. Alors $\mathcal{G}(A,C) = \mathcal{E}(A,C)$.

Notons 1 l'unité de C . Soient γ un homomorphisme de C dans $L(A)/A$ et B l'extension associée. L'élément $\gamma(1)$ est un projecteur de $L(A)/A$. Par un raisonnement classique de calcul fonctionnel, on montre l'existence d'un élément l de $L(A)$ tel que $\Pi(l) = \gamma(1)$ et tel que $l(t)$ soit un projecteur pour tout t appartenant à un voisinage de l'infini dans $\hat{A}$. On peut supposer que $V = \bigcup_1^n V_i$ où $V_1 , \dots , V_n$ sont des parties connexes de $\hat{A}$. D'après ([19] , lemme 4.1), la fonction $t \longmapsto \mathrm{rg}\, l(t)$ est continue sur V et donc constante sur chaque V_i , d'où

$\sup_{t \in V} \operatorname{rg} 1(t) < +\infty$. Ainsi $\gamma(1)$ appartient à $\bar{E}^1(A)/A$. Soit $c \in C$; on a $\gamma(c) = \gamma(c)\gamma(1) \in \bar{E}^1(A)/A$. Il en résulte que $\gamma(C) \subset \bar{E}^1(A)/A$ d'où $B \in \mathcal{E}(A,C)$ d'après la proposition IV.2.1 (ii).

VI.1.5. Soient A une C^*-algèbre à spectre séparé et C une C^*-algèbre. Lorsque $B \in \mathcal{E}(A,C)$ la fonction continue f de $\beta\hat{A} - \hat{A}$ dans $\mathcal{F}(\hat{C})$ associée à $\hat{B} \in \mathcal{S}(\hat{A},\hat{C})$ prend ses valeurs dans $\mathcal{F}_d(\hat{C})$, d'après les propositions II.8 b) et I.2.24. Nous allons donner un cas où la réciproque est vraie.

PROPOSITION. <u>Soient</u> X <u>un espace localement compact,</u> X_1 <u>une compactification de</u> X , <u>et</u> Y <u>un espace localement quasi-compact. Soient</u> f <u>une fonction continue de</u> $X_1 - X$ <u>dans</u> $\mathcal{F}_d(Y)$, <u>et</u> $O = \{x \in X_1 - X \mid f(x) \neq \emptyset\}$. <u>On suppose que, pour tout</u> $x \in O$, <u>la trace</u> Θ_x <u>sur</u> X <u>du filtre des voisinages de</u> x <u>dans</u> X_1 <u>se divise en un nombre fini de bouts. Notons</u> Z <u>l'extension de</u> X <u>par</u> Y <u>associée à</u> f . <u>Soient</u> A <u>une</u> C^*<u>-algèbre à trace continue de spectre</u> X , <u>et</u> C <u>une</u> C^*<u>-algèbre liminaire de spectre</u> Y . <u>Toute extension</u> B <u>de</u> A <u>par</u> C <u>telle</u> $\hat{B} = Z$ <u>appartient à</u> $\mathcal{E}(A,C)$. <u>En outre, si</u> $x \in O$ <u>et si</u> Θ_x^i <u>est un bout de</u> Θ_x , <u>il existe un fonction</u> m_x^i <u>unique de</u> $f(x)$ <u>dans</u> $\mathbb{N}^*$ <u>telle que</u>

$$\lim_{t,\Theta_x^i} \operatorname{Tr} b(t) = \sum_{y \in f(x)} m_x^i(y).\operatorname{Tr} b(y)$$

<u>pour tout</u> $b \in B$ <u>encadré suivant</u> Θ_x^i .

On pose $h = h_{X,X_1}$. Soit B une extension de A par C telle que $\hat{B} = Z$, et soit γ l'homomorphisme de C dans $L(A)/A$ associé à B . D'après la proposition IV.2.1 (ii), pour prouver que B appartient à $\mathcal{E}(A,C)$ il suffit de prouver que $\gamma(C)(x)$ est contenu dans $\bar{E}^1(A)(x)$ pour tout $x \in \beta X - X$. Soit $x \in \beta X - X - h^{-1}(O)$; on a $\gamma(C)(x)^\wedge = f \circ h(x) = \emptyset$ (voir IV.1.4 et II.18), d'où $\gamma(C)(x) = 0$. Soit $x \in h^{-1}(O)$ et posons $x_1 = h(x)$. D'après la proposition II.8 b), Θ_{x_1} converge vers chacune de ses valeurs d'adhérence dans Z et $f(x_1)$ est l'ensemble des limites de Θ_{x_1} . Il en est de même pour chaque filtre plus fin que Θ_{x_1} et en particulier pour chaque bout de Θ_{x_1} . D'après la proposition IV.1.2, on a $A \subset J(B)$. Il résulte alors de la proposition I.3.6 que B est encadrée suivant chaque bout de Θ_{x_1} et donc suivant Θ_{x_1} . Le filtre Θ_{x_1} est aussi la trace sur X du filtre des voisinages de $h^{-1}(x_1)$ dans βX (voir V.1.3) et donc Θ_x est plus fin que Θ_{x_1} . Ainsi B est encadrée suivant Θ_x et, d'après la proposition IV.2.1, on a $\gamma(C)(x) \subset \bar{E}^1(A)(x)$.

La deuxième assertion de la proposition résulte des propositions I.3.6 et I.2.26 b).

VI.1.6. Soit C une C^*-algèbre. On notera $\mathcal{T}_d(C)$ l'ensemble des traces s.c.i. Γ sur C^+, densément définies, à support discret F, telles qu'il existe une fonction m de F dans $\mathbb{N}^*$ pour laquelle $\Gamma(c) = \sum_{t\in F} m(t).\mathrm{Tr}\, c(t)$ si $c \in C^+$. On dira que $m(t)$ est la multiplicité de Γ en $t \in \hat{C}$. Si C est une C^*-algèbre commutative de spectre Y, cet ensemble $\mathcal{T}_d(C)$ sera aussi noté $\mathcal{M}_d(Y)$. Nous munissons $\mathcal{T}_d(C)$ de la topologie induite par celle de $\mathcal{T}(C)$.

VI.1.7. Soient A une C^*-algèbre à trace continue et C une C^*-algèbre. Soit $\gamma \in \mathrm{Hom}(C,\overline{E}^1(A)/A$. Rappelons que, si $x \in \beta\hat{A} - \hat{A}$, Γ^1_x désigne la trace $c \longmapsto T^1_x(\gamma(c)(x))$ définie sur C^+ (voir IV.2.2). D'après le lemme IV.2.2 (ii), $x \longmapsto \Gamma^1_x$ est une fonction continue de $\beta\hat{A} - \hat{A}$ dans $\mathcal{T}(C)$ et, d'après le corollaire IV.2.5, on a $\gamma(C)(x)^\wedge = \mathrm{Supp}\,\Gamma^1_x$ pour tout $x \in \beta\hat{A} - \hat{A}$. On vérifie immédiatement (comme dans la démonstration du lemme III.4.4 (ii)), en utilisant la proposition I.2.26, que, pour tout $x \in \beta\hat{A} - \hat{A}$, il existe une fonction m_x de $\overline{E}^1(A)(x)^\wedge$ dans $\mathbb{N}^*$ satisfaisant à $T^1_x(b) = \sum_{t\in\overline{E}^1(A)(x)^\wedge} m_x(t).\mathrm{Tr}\, b(t)$ si $b \in \overline{E}^1(A)(x)^+$. Il en résulte facilement que $\Gamma^1_x \in \mathcal{T}_d(C)$ pour tout $x \in \beta\hat{A} - \hat{A}$.

VI.1.8. PROPOSITION. <u>Soient</u> T <u>un espace topologique,</u> C <u>une</u> C^*-<u>algèbre, et</u> $\Gamma \in \mathcal{C}(T,\mathcal{T}_d(C))$. <u>La fonction</u> $t \longmapsto \mathrm{Supp}\,\Gamma_t$ <u>est continue de</u> T <u>dans</u> $\mathcal{F}_d(\hat{C})$.

Soit $t_o \in T$ et soit un ouvert ω de $\hat{C}$ tel que $\omega \cap \mathrm{Supp}\,\Gamma_{t_o} \neq \emptyset$. Il existe $c \in \mathcal{K}(C)^+$, porté par ω, pour lequel $\Gamma_{t_o}(c) \neq 0$. On a $\Gamma_t(c) \neq 0$ au voisinage de t_o et, d'après le lemme I.2.4, on a $\mathrm{Supp}\,\Gamma_t \cap \omega \neq \emptyset$ sur ce voisinage. Soit maintenant une partie quasi-compacte K de $\hat{C}$ telle que $K \cap \mathrm{Supp}\,\Gamma_{t_o} = \emptyset$. Supposons l'existence d'une famille filtrante $(t_j)_{j\in J}$ de points de T qui converge vers t_o et telle que $K \cap \mathrm{Supp}\,\Gamma_{t_j} \neq \emptyset$ pour tout $j \in J$. Prenons $x_j \in K \cap \mathrm{Supp}\,\Gamma_{t_j}$. On peut supposer que la famille $(x_j)_{j\in J}$ converge vers $x_o \in K$. Soit $c \in \mathcal{K}(C)^+$ tel que $c(x_o) \neq 0$ et $c(x) = 0$ si $x \in \mathrm{Supp}\,\Gamma_{t_o}$. On a $\mathrm{Tr}\, c(x_o) \neq 0$, d'où $\mathrm{Tr}\, c(x) \geqslant \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, c(x_o)$ au voisinage de x_o. D'autre part on a

$$\Gamma_{t_j}(c) = \sum_{y\in \mathrm{Supp}\,\Gamma_{t_j}} m_j(y).\mathrm{Tr}\, c(y) \geqslant m_j(x_j).\mathrm{Tr}\, c(x_j) \geqslant \mathrm{Tr}\, c(x_j).$$

Il existe donc j_o tel que, si $j \geqslant j_o$, on ait $\Gamma_{t_j}(c) \geqslant \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\, c(x_o) > 0$. Ceci est absurde car $\lim_j \Gamma_{t_j}(c) = \Gamma_{t_o}(c) = 0$.

VI.1.9. Soient Y un espace localement compact, H' un espace hilbertien, et $C = \mathcal{C}^\circ(Y,\mathcal{LC}(H'))$. L'espace $\mathcal{T}(C)$ (resp. $\mathcal{T}_d(C)$) est canoniquement homéomorphe à $\mathcal{M}(Y)$ (resp. $\mathcal{M}_d(Y)$) (voir 0.12). Dans la suite un élément de $\mathcal{T}(C)$ sera considéré indifféremment comme une trace sur C^+ ou comme une mesure sur Y.

LEMME. <u>Soient</u> X <u>et</u> Y <u>deux espaces localement compacts</u>, H <u>et</u> H' <u>deux espaces hilbertiens de dimension finie</u>, $A = \mathcal{C}^\circ(X, \mathcal{L}(H))$, <u>et</u> $C = \mathcal{C}^\circ(Y, \mathcal{L}(H'))$. <u>Soit</u> $\gamma \in \mathrm{Hom}(C, L(A)/A)$; <u>pour tout</u> $x \in \beta X - X$, <u>on a</u> $\Gamma_x^1(Y).\dim H' \leqslant \dim H$.

Ici, on a $L(A)/A = \mathcal{C}(\beta X - X, \mathcal{L}(H))$. Soit $x \in \beta X - X$. Comme $\gamma(C)(x)$ est une sous-C^*-algèbre de $\mathcal{L}(H)$, il existe, dans $\mathcal{L}(H)$, des projecteurs deux à deux orthogonaux $P_1, \dots, P_n$ qui commutent avec $\gamma(C)(x)$, tels que $\gamma(C)(x)P_i = \mathcal{L}(P_i(H))$ pour $i = 1, \dots, n$ et

$$(\gamma(c)(x))(\sum_{i=1}^{n} P_i) = \gamma(c)(x)$$

pour tout $c \in C$. On a évidemment $\dim P_i(H) = \dim H'$, et il existe $y_i \in Y$ tel que la représentation $c \longmapsto c(y_i)$ soit équivalente à $c \longmapsto \gamma(c)(x)|P_i(H)$ $(i = 1, \dots, n)$. On a $\mathrm{Supp}\,\Gamma_x^1 = \{y_1, \dots, y_n\}$ et, si $y \in Y$, l'entier $\Gamma_x^1(\{y\})$ est égal au nombre d'indices i tels que $y_i = y$. On en déduit que $n = \Gamma_x^1(Y)$. Comme d'autre part on a évidemment $n.\dim H' \leqslant \dim H$, l'inégalité $\Gamma_x^1(Y).\dim H' \leqslant \dim H$ est démontrée.

VI.1.10. Soient X un espace localement compact, H un espace hilbertien, $A = \mathcal{C}^\circ(X, \mathcal{LC}(H))$, et C est une C^*-algèbre. On notera $\mathcal{E}(A,C)^\sim$ l'ensemble des $\tilde{B}$ avec $B \in \mathcal{E}(A,C)$; et ι la surjection canonique de $\mathcal{E}(A,C)$ sur $\mathcal{E}(A,C)^\sim$.

Soit Y un espace localement compact. Si $p \in \mathbb{N}$, on notera $\mathcal{M}_d^p(Y)$ l'ensemble des $\Gamma \in \mathcal{M}_d(Y)$ tels que $\Gamma(Y) \leqslant p$, et $\mathcal{F}_d^p(Y)$ l'ensemble des fermés de Y ayant au plus p points. Si p est un cardinal infini, on posera $\mathcal{M}_d^p(Y) = \mathcal{M}_d(Y)$ et $\mathcal{F}_d^p(Y) = \mathcal{F}_d(Y)$.

Pour tout cardinal p , l'application de $\mathcal{C}(\beta X - X, \mathcal{M}_d^p(Y))$ dans $\mathcal{C}(\beta X - X, \mathcal{F}_d^p(Y))$ qui associe $x \longmapsto \mathrm{Supp}\,\Gamma_x$ à $\Gamma \in \mathcal{C}(\beta X - X, \mathcal{M}_d^p(Y))$, sera notée ζ^p ou plus simplement ζ (voir VI.1.8).

Supposons toujours que $A = \mathcal{C}^\circ(X, \mathcal{LC}(H))$ et prenons maintenant $C = \mathcal{C}^\circ(Y, \mathcal{LC}(H'))$ où H' est un espace hilbertien tel que $\dim H' \leqslant \dim H$; posons $p = [\dim H : \dim H']$. Soient $\gamma \in \mathrm{Hom}(C, \overline{E}^1(A)/A)$ et B l'extension de A par C associée à γ . D'après VI.1.7 et le lemme VI.1.9 la fonction $x \longmapsto \Gamma_x^1$ appartient à $\mathcal{C}(\beta X - X, \mathcal{M}_d^p(Y))$; l'application de $\mathrm{Hom}(C, \overline{E}^1(A)/A)$ dans $\mathcal{C}(\beta X - X, \mathcal{M}_d^p(Y))$ ainsi définie sera notée μ . Par ailleurs, d'après le lemme IV.3.5 (iii), cette fonction $x \longmapsto \Gamma_x^1$ ne dépend que de $\tilde{B}$; on notera ξ l'application de $\mathcal{E}(A,C)^\sim$ dans $\mathcal{C}(\beta X - X, \mathcal{M}_d^p(Y))$ qui à $\tilde{B}$ associe $x \longmapsto \Gamma_x^1$.

Grâce au corollaire IV.2.5, à la proposition IV.2.1 (ii), et à ce qui précède, le diagramme commutatif de IV.1.5 se précise comme suit lorsqu'on se restreint à $\mathcal{E}(A,C)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E}(A,C) \arrow[r, leftrightarrow, "\tau|\mathscr{E}(A,C)"] \arrow[d, "\iota"'] & \mathrm{Hom}(C,\overline{E}^1(A)/A) \arrow[d, "\mu"] \arrow[ddr, "\chi|\mathrm{Hom}(C,\overline{E}^1(A)/A)"] & \\
\mathscr{E}(A,C)^\sim \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\tilde{\lambda}|\mathscr{E}(A,C)^\sim"'] & \mathscr{C}(\beta X - X, \mathscr{M}_d^p(Y)) \arrow[dr, "\zeta"] & \\
\mathscr{S}(X,Y) \arrow[r, leftrightarrow, "\rho"] & \mathscr{C}(\beta X - X, \mathscr{F}(Y)) \arrow[r, leftrightarrow] & \mathscr{C}(\beta X - X, \mathscr{F}_d^p(Y))
\end{tikzcd}$$

(rappelons que la définition de $\tilde{\lambda}$ est donnée en IV.3.6).

Lorsqu'on a $\dim H < \dim H'$ et $\dim H < +\infty$, l'ensemble $\mathrm{Ext}(A,C)$ ne contient que l'extension $A \times C$.

VI.2. *Surjectivité de* ξ *et* ζ.

VI.2.1. LEMME. *Soient* X *un espace localement compact,* H *un espace hilbertien,* $A = \mathscr{C}^\circ(X, \mathscr{L}\mathscr{C}(H))$, *et* C *une* C^**-algèbre. Soient* X_1 *une compactification de* X *et* γ *un homomorphisme de* C *dans* $\mathscr{C}(X_1 - X, \mathscr{L}\mathscr{C}(H))$. *Notons* γ' *l'homomorphisme de* C *dans* $\mathscr{C}(\beta X - X, \mathscr{L}\mathscr{C}(H))$ *tel que* $\gamma'(c)(x) = \gamma(c)(h_{X,X_1}(x))$ *pour tout* $x \in \beta X - X$ *et tout* $c \in C$. *Si* $x \in X_1 - X$, *désignons par* Θ_x *la trace sur* X *du filtre des voisinages de* x *dans* X_1. *Soit*

$$B = \{(m,c) \in \mathscr{C}^b(X, \mathscr{L}\mathscr{C}(H)) \times C \mid \lim_{t,\Theta_x} m(t) = \gamma(c)(x), \forall x \in X_1 - X\}$$

(les limites étant les limites normiques dans $\mathscr{L}\mathscr{C}(H)$ *).*

(i) B *est l'extension de* A *par* C *associée à l'homomorphisme* γ' *de* C *dans* $\mathscr{C}(\beta X - X, \mathscr{L}\mathscr{C}(H)) \subset \overline{E}^1(A)/A$, *et on a donc* $B \in \mathscr{E}(A,C)$.

(ii) $\hat{B}$ *est l'extension de* X *par* $\hat{C}$ *associée à la fonction continue* $x \mapsto \gamma(C)(x)^\wedge$ *de* $X_1 - X$ *dans* $\mathscr{F}(\hat{C})$.

(iii) *Pour tout* $x \in \beta X - X$ *et tout* $c \in C^+$, *on a*

$$\Gamma_x^1(c) = \mathrm{Tr}\, \gamma(c)(h_{X,X_1}(x))$$

L'assertion (i) résulte immédiatement de la définition de l'extension de A par C associée à γ'.

(ii) D'après la proposition IV.1.4, $\hat{B}$ est l'extension de X par $\hat{C}$ associée à la fonction continue $x \mapsto \gamma'(C)(x)^\wedge = \gamma(C)(h_{X,X_1}(x))^\wedge$ de $\beta X - X$ dans $\mathscr{F}(\hat{C})$. Il suffit alors d'utiliser la remarque II.18.

(iii) Pour tout $x \in \beta X - X$ et tout $c \in C^+$, on a par définition

$$\Gamma_x^1(c) = T_x^1(\gamma'(c)(x)) = \mathrm{Tr}\, \gamma'(c)(x) = \mathrm{Tr}\, \gamma(c)(h_{X,X_1}(x)) .$$

VI.2.2. DEFINITION. *Soient* T *un espace topologique,* Y *un espace localement compact et* p *un cardinal. On appellera* $\mathscr{D}^p(T,Y)$ *le sous-ensemble des éléments* Γ *de* $\mathscr{C}(T, \mathscr{M}_d(Y))$ *qui possédent la propriété suivante : il existe une famille* $(f_i)_{i\in I}$ *de fonctions continues de* T *dans* $\ddot{Y}$

avec card $I \leqslant p$ *telle que, pour tout* $t \in T$ *et tout* $y \in Y$ *, l'entier* $\Gamma_t(\{y\})$ *soit égal au nombre d'indices* i *pour lesquels* $f_i(t) = y$.

On dira que Γ *est déterminé par la famille* $(f_i)_{i\in I}$. Un élément de $\mathcal{D}^p(T,Y)$ peut évidemment être déterminé par des familles distinctes de fonctions continues de T dans $\ddot{Y}$. On a $\mathcal{D}^p(T,Y) \subset \mathcal{C}(T,\mathcal{M}_d^p(Y))$ mais l'inclusion peut être stricte comme le prouve l'exemple VI.2.12.

VI.2.3. LEMME. *Soient* T *un espace topologique,* Y *un espace localement compact, et* p *un cardinal.*

(i) *Soit* $\Gamma \in \mathcal{D}^p(T,Y)$, *déterminé par une famille* $(f_i)_{i\in I}$ *de fonctions continues de* T *dans* $\ddot{Y}$ *avec* card $I \leqslant p$. *Alors* $(f_i)_{i\in I}$ *satisfait aux conditions suivantes* :

a) *pour tout* $t \in T$ *et tout compact* K *de* Y *, l'ensemble* $\{i \in I \mid f_i(t) \in K\}$ *est fini;*

b) *pour tout compact* K *de* Y *et toute partie* J *de* I *, l'ensemble* $\bigcap_{j\in J} \{t \in T \mid f_j(t) \notin K\}$ *est ouvert.*

(ii) *Soit* $(f_i)_{i\in I}$ *une famille de fonctions continues de* T *dans* $\ddot{Y}$ *avec* card $I \leqslant p$, *satisfaisant aux conditions* a) *et* b) *ci-dessus. Alors* $(f_i)_{i\in I}$ *détermine un élément de* $\mathcal{D}^p(T,Y)$.

(i) Puisque $\Gamma_t \in \mathcal{M}_d(Y)$ pour $t \in T$, la condition a) est évidemment satisfaite. Montrons que Γ satisfait aussi à la condition b). Soient K un compact de Y et $J \subset I$. Soit $t_o \in T$. Notons $i_1, \dots, i_q$ les indices i tels que $f_i(t_o) \in K$ et supposons que $\{i_1, \dots, i_q\} \cap J = \emptyset$. Posons $K \cap \operatorname{Supp} \Gamma_{t_o} = \{a_1, \dots, a_n\}$, où les points $a_1, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts. Pour $i = 1,\dots,n$, choisissons des voisinages compacts V_i et W_i de a_i dans Y tels que $W_i \subset \operatorname{Int} V_i$, $V_i \cap \operatorname{Supp} \Gamma_{t_o} = \{a_i\}$, et $V_i \cap V_j = \emptyset$ si $i \neq j$. On a $(K - \bigcup_{i=1}^n \operatorname{Int} W_i) \cap \operatorname{Supp} \Gamma_{t_o} = \emptyset$, et donc il existe un voisinage ω de t_o sur lequel

$$(K - \bigcup_{i=1}^n \operatorname{Int} W_i) \cap \operatorname{Supp} \Gamma_t = \emptyset$$

(voir VI.1.8). Pour $i = 1,\dots,n$, prenons une fonction continue réelle φ_i sur Y , valant 1 sur W_i et 0 hors de V_i . Comme les fonctions $t \longmapsto \Gamma_t(\varphi_i)$ sont continues, on peut supposer, en diminuant au besoin ω , que $\Gamma_t(\varphi_i) < \Gamma_{t_o}(\{a_i\}) + 1/2$ pour tout $t \in \omega$ et $i = 1,\dots,n$. De plus, grâce à la continuité des fonctions f_k , on peut supposer que, si $f_{i_j}(t_o) \in W_{r_j}$, on a encore $f_{i_j}(t) \in W_{r_j}$ sur ω , et ceci pour $j = 1,\dots,q$. Ce qui précède interdit l'existence d'un point $t \in \omega$ et d'un indice $i \notin \{i_1, \dots, i_q\}$ tels que $f_i(t) \in \bigcup_{i=1}^n W_j$. En effet, sinon on aurait $\Gamma_t(\varphi_j) \geqslant \Gamma_{t_o}(\{a_j\}) + 1$ pour au moins un indice $j \in \{1,\dots,n\}$.

Il en résulte que $\omega \subset \bigcap_{j\in J} \{t \in T \mid f_j(t) \notin K\}$.

(ii) Pour tout $t \in T$ et tout $y \in Y$, posons

$$\Gamma_t(\{y\}) = \mathrm{card}\,\{i \mid f_i(t) = y\} .$$

Grâce à la condition a) on définit ainsi, pour tout $t \in T$, un élémént Γ_t de $\mathcal{M}^p_d(Y)$. Il reste à démontrer que $t \longmapsto \Gamma_t(\varphi)$ est continue pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(Y)$. Posons $K = \mathrm{Supp}\,\varphi$. Soit $t_o \in T$, et notons $i_1 , \ldots , i_q$ les indices i tels que $f_i(t_o) \in K$. D'après la condition b), il existe un voisinage ω de t_o tel que, si $t \in \omega$ et $i \notin \{i_1 , \ldots , i_q\}$, l'ensemble K ne contienne pas $f_i(t)$. D'autre part, d'après la continuité des fonctions f_i , on peut supposer, étant donné $\varepsilon > 0$, que

$$\sup_{j=1,\ldots,q} |\varphi(f_{i_j}(t)) - (f_{i_j}(t_o))| \leqslant \varepsilon/q$$

si $t \in \omega$. Il en résulte que

$$|\Gamma_t(\varphi) - \Gamma_{t_o}(\varphi)| = |\sum_{j=1}^{q} \varphi(f_{i_j}(t)) - \varphi(f_{i_j}(t_o))| \leqslant \varepsilon$$

sur ω .

VI.2.4. LEMME. <u>Soient</u> T <u>un espace topologique,</u> H <u>et</u> H' <u>deux espaces hilbertiens,</u> Y <u>un espace localement compact, et</u> $C = \mathcal{C}^\circ(Y, \mathcal{LC}(H'))$. <u>Posons</u> $p = [\dim H : \dim H']$. <u>Soit</u> $\Gamma \in \mathcal{D}^p(T,Y)$, <u>déterminé par une famille</u> $(f_i)_{i\in N(q)}$ <u>de fonctions continues de</u> T <u>dans</u> $\ddot{Y}$ <u>avec</u> $q \leqslant p$. <u>Identifions</u> H <u>à</u> $H' \otimes l^2_q \oplus R$ <u>où</u> R <u>est un espace hilbertien. Appelons</u> $(e_i)_{i\in N(q)}$ <u>la base orthonormale canonique de</u> l^2_q .

(i) <u>Pour tout</u> $c \in C$, <u>la fonction</u> $t \longmapsto \sum_{i\in N(q)} c(f_i(t)) \otimes Pe_i$ <u>est normiquement continue de</u> T <u>dans</u> $\mathcal{LC}(H)$ <u>(on pose</u> $c(y) = 0$ <u>si</u> y <u>est le point à l'infini de</u> Y) .

(ii) <u>La fonction</u> γ <u>qui à</u> $c \in C$ <u>associe</u> $t \longmapsto \sum_{i\in N(q)} c(f_i(t)) \otimes Pe_i$ <u>est un homomorphisme de</u> C dans $\mathcal{C}^b(T, \mathcal{LC}(H))$.

(i) Soit $c \in C$ et montrons que la fonction

$$t \longmapsto \sum_{i\in N(q)} c(f_i(t)) \otimes Pe_i$$

est normiquement continue de T dans $\mathcal{LC}(H)$. Soient $t_o \in T$ et $\varepsilon > 0$. Posons $K = \{y \in Y \mid \|c(y)\| \geqslant \varepsilon/2\}$; c'est une partie compacte de Y . Notons $i_1 , \ldots , i_n$ les indices i tels que $f_i(t_o) \in K$. D'après le lemme VI.2.3 (i), il existe un voisinage ω de t_o tel que, si $t \in \omega$ et $i \notin \{i_1 , \ldots , i_n\}$, le point $f_i(t)$ n'appartienne pas à K . On a donc $\sup_{i\notin\{i_1,\ldots i_n\}} \|c(f_i(t))\| \leqslant \varepsilon/2$ pour $t \in \omega$. D'autre part, d'après la continuité des fonctions f_i , on peut supposer, en diminuant au besoin ω , que $\sup_{j=1,\ldots,n} \|c(f_{i_j}(t)) - c(f_{i_j}(t_o))\| \leqslant \varepsilon$ si $t \in \omega$. Il en résulte que $\sup_{i\in N(q)} \|c(f_i(t)) - c(f_i(t_o))\| \leqslant \varepsilon$ sur ω . Ceci démontre la continuité de $t \longmapsto \sum_{i\in N(q)} c(f_i(t)) \otimes Pe_i$ en t_o .

(ii) Evident.

VI.2.5. Conservons les notations de VI.2.4. On dira que γ est associé à la famille $(f_i)_{i\in N(q)}$.

VI.2.6. Soient X et Y deux espaces localement compacts, X_1 une compactification de X , et p un cardinal. Alors $\mathcal{D}^p(X_1 - X,Y)$ s'envoie injectivement dans $\mathcal{D}^p(\beta X - X,Y)$ par l'application h^*_{X,X_1} qui à $\Gamma \in \mathcal{D}^p(X_1 - X,Y)$ associe $\Gamma\circ h_{X,X_1}$.

PROPOSITION. Soient X et Y deux espaces localement compacts, X_1 une compactification de X , H et H' deux espaces hilbertiens, $A = \mathcal{C}^\circ(X, \mathcal{LC}(H))$, et $C = \mathcal{C}^\circ(Y, \mathcal{LC}(H'))$. Posons $p = [\dim H : \dim H']$. Alors $h^*_{X,X_1}(\mathcal{D}^p(X_1 - X,Y))$ est contenu dans $\xi(\mathcal{E}(A,C)^\sim)$. Plus précisément soit $\Gamma\in\mathcal{D}^p(X_1 - X,Y)$, déterminé par une famille $(f_i)_{i\in N(q)}$ de fonctions continues de $X_1 - X$ dans $\ddot{Y}$ avec $q \leqslant p$. Identifions H à $H' \otimes l^2_q \oplus R$ où R est un espace hilbertien. Appelons $(e_i)_{i\in N(q)}$ la base orthonormale canonique de l^2_q . Alors on a $h^*_{X,X_1}(\Gamma) = \xi(\tilde{B})$ où B est la C^*-algèbre des couples (m,c) appartenant à $\mathcal{C}^b(X, \mathcal{LC}(H)) \times C$ et tels que $\lim_{t,\Theta_x} m(t) = \sum_{i\in N(q)} c(f_i(x)) \otimes Pe_i$ pour tout $x\in X_1 - X$ (Θ_x désignant la trace sur X du filtre des voisinages de x dans X_1 si $x\in X_1 - X$, et les limites étant les limites normiques dans $\mathcal{LC}(H)$).

En particulier, pour tout $x\in X_1 - X$ et tout $b\in B$ encadré suivant Θ_x , on a $\lim_{t,\Theta_x} \operatorname{Tr} b(t) = \sum_{i\in N(q)} \operatorname{Tr} b(f_i(x))$.

Posons $h = h_{X,X_1}$. Soit γ l'homomorphisme de C dans $\mathcal{C}(X_1 - X, \mathcal{LC}(H))$ associé à $(f_i)_{i\in N(q)}$ lorsqu'on identifie H à $H' \otimes l^2_q \oplus R$. D'après le lemme VI.2.1, on a $B\in\mathcal{E}(A,C)$. De plus, pour tout $x \in\beta X - X$ et tout $c\in C^+$ on a

$$\Gamma^1_x(c) = \operatorname{Tr}\gamma(c)(h(x)) = \sum_{i\in N(q)} \operatorname{Tr} c(f_i\circ h(x)) = \Gamma_{h(x)}(c) ,$$

d'où $\xi(\tilde{B}) = \Gamma^1 = h^*(\Gamma)$.

VI.2.7. La proposition VI.2.6 permet de construire simplement des éléments de $\mathcal{E}(A,C)$. Conservons toujours les notations de VI.2.6 et supposons que $\dim H' \leqslant \dim H$. On a

$$\mathcal{D}^p(\beta X - X,Y) \subset \xi(\mathcal{E}(A,C)^\sim) \subset \mathcal{C}(\beta X - X,\mathcal{M}^p_d(Y)) .$$

Ainsi le problème de la surjectivité de ξ serait résolu si on avait $\mathcal{D}^p(\beta X - X,Y) = \mathcal{C}(\beta X - X,\mathcal{M}^p_d(Y))$. Nous étudierons des cas où il en est ainsi (voir VI.2.11), mais nous donnerons aussi un exemple où on a une inclusion stricte $\mathcal{D}^p(\beta X - X,Y) \subset \xi(\mathcal{E}(A,C)^\sim)$ (voir VI.2.13).

VI.2.8. LEMME. Soient T un espace topologique, Y un espace localement compact, et p un cardinal. Soit $\Gamma \in \mathcal{C}(T, \mathcal{M}_d^p(Y))$ et soit une fonction continue f_1 de T dans $\ddot{Y}$ telle que $f_1(t) \in \operatorname{Supp} \Gamma_t$ en tout point t où $f_1(t)$ est distinct du point à l'infini de Y. Pour tout $t \in T$, appelons Γ'_t l'élément de $\mathcal{M}_d^p(Y)$ défini par $\Gamma'_t(\{y\}) = \Gamma_t(\{y\})$ si $f_1(t) \neq y$ et $\Gamma'_t(\{y\}) = \Gamma_t(\{y\}) - 1$ si $f_1(t) = y$. Alors Γ' appartient à $\mathcal{C}(T, \mathcal{M}_d^p(Y))$.

On vérifie immédiatement que, pour tout $\varphi \in \mathcal{K}(Y)$, la fonction $t \longmapsto \Gamma'_t(\varphi)$ est continue.

VI.2.9. PROPOSITION. Soient T un espace topologique et $Y =]0,1]$ (ou $[0,1]$). Pour tout cardinal p, on a $\mathcal{D}^p(T,Y) = \mathcal{C}(T, \mathcal{M}_d^p(Y))$.

Nous identifions $\ddot{Y}$ à $[0,1]$. Soient $\Gamma \in \mathcal{C}(T, \mathcal{M}_d^p(Y))$ et f_1 la fonction $t \longmapsto \sup\{y \mid y \in \operatorname{Supp} \Gamma_t\}$ (si $\Gamma_t = 0$, c'est-à-dire si $\operatorname{Supp} \Gamma_t = \emptyset$, on pose $f_1(t) = 0$). La continuité de $t \longmapsto \operatorname{Supp} \Gamma_t$ entraîne la continuité de f_1. On construit f_2 de la même façon, à partir de la fonction Γ' introduite dans le lemme VI.2.8. On obtient ainsi une suite décroissante de fonctions continues de T dans $[0,1]$. Si p est fini, on s'arrête au rang p, sinon on construit cette suite par récurrence. Posons $q = \inf(\aleph_0, p)$ et notons $(f_i)_{i \in N(q)}$ cette suite. Soient $t_0 \in T$ et $y_0 \in \operatorname{Supp} \Gamma_{t_0}$, et posons $l = \sum_{y > y_0} \Gamma_{t_0}(\{y\})$. Alors, par construction, on a $f_i(t_0) = y_0$ pour $i = l+1, \dots, l+\Gamma_{t_0}(\{y_0\})$. Ceci prouve que Γ est déterminé par la suite $(f_i)_{i \in N(q)}$.

Remarquons que la démonstration précédente fournit un procédé canonique pour construire une suite $(f_i)_{i \in N(q)}$ qui détermine Γ.

VI.2.10. Indiquons rapidement un autre cas où on a $\mathcal{D}^p(T,Y) = \mathcal{C}(T, \mathcal{M}_d^p(Y))$. Soient T un espace compact totalement discontinu et Y un espace localement compact à base dénombrable. Alors, pour tout cardinal p, on a $\mathcal{D}^p(T,Y) = \mathcal{C}(T, \mathcal{M}_d^p(Y))$. Prenons $\Gamma \in \mathcal{C}(T, \mathcal{M}_d^p(Y))$. Appelons y_∞ le point à l'infini de Y et, pour tout $t \in T$, posons $f(t) = \operatorname{Supp} \Gamma_t \cup \{y_\infty\}$. On vérifie facilement que f est continue de T dans $\mathcal{F}(\ddot{Y})$. Grâce au théorème 1.2 de [28], on prouve que, pour tout $t \in T$ et tout $y \in f(t)$, il existe une fonction continue g de T dans $\ddot{Y}$ telle que $g(t) = y$ et $g(t') \in f(t')$ si $t' \in T$. En utilisant ce résultat et la compacité de T, on construit une suite $(f_i)_{i \in N(q)}$ de fonctions continues de T dans $\ddot{Y}$, avec $q = \inf(\aleph_0, p)$, qui détermine Γ. Nous n'entrerons pas dans les détails de cette démonstration.

VI.2.11. PROPOSITION. Soient X et Y deux espaces localement compacts, H et H' deux espaces hilbertiens, $A = \mathcal{C}^\circ(X, \mathcal{LC}(H))$, et $C = \mathcal{C}^\circ(Y, \mathcal{LC}(H'))$. Posons $p = [\dim H : \dim H']$ et supposons $p > 1$. On a $\xi(\mathcal{E}(A,C)^\vee) = \mathcal{C}(\beta X - X, \mathcal{M}_d^p(Y))$ dans les deux cas suivants :

(i) X <u>quelconque et</u> $Y =]0,1]$ (<u>ou</u> $[0,1]$);

(ii) $X = \mathbb{N}$ <u>et</u> Y <u>à base dénombrable</u>.

La première assertion résulte de la proposition VI.2.9 et de VI.2.7. Par ailleurs, d'après ([22], 6.M), l'ensemble $\beta\mathbb{N}$ est extrêmement discontinu et donc $\beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$ est totalement discontinu. La deuxième assertion résulte alors de VI.2.10 et de VI.2.7.

VI.2.12. Donnons maintenant deux exemples où $\mathcal{D}^p(T,Y)$ est strictement contenu dans $\mathcal{C}(T,\mathcal{M}_d^p(Y))$. Prenons $T = Y = \mathbb{T}$ et $p = 2$. Considérons la fonction continue Γ de $\mathbb{T}$ dans $\mathcal{M}_d^2(\mathbb{T})$ définie par $\Gamma_{e^{i\theta}}(\{y\}) = 1$ si $y = e^{i\theta/2}$ ou $y = -e^{i\theta/2}$ et par $\Gamma_{e^{i\theta}}(\{y\}) = 0$ si $y \notin \{e^{i\theta/2}, -e^{i\theta/2}\}$. Supposons l'existence de deux fonctions continues f_1 et f_2 de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{T}$ telles que $\operatorname{Supp}\Gamma_x = \{f_1(x), f_2(x)\}$ pour tout $x \in \mathbb{T}$. Supposons par exemple que $f_1(1) = 1$ et $f_2(1) = -1$. Par raison de continuité, on doit avoir $f_1(e^{i\theta}) = e^{i\theta/2}$ et $f_2(e^{i\theta}) = -e^{i\theta/2}$ si $\theta \in]0,t[$, pour tout $t < 2\pi$. Mais ceci est en contradiction avec la continuité de f_1 et f_2 au point 1 . Ainsi Γ n'appartient pas à $\mathcal{D}^2(\mathbb{T},\mathbb{T})$.

Considérons maintenant le disque unité ouvert X de $\mathbb{R}^2$ et son adhérence X_1 . Alors $h = h_{X,X_1}$ est une fonction continue de $\beta X - X$ sur $X_1 - X = \mathbb{T}$. Posons $\Gamma' = h^*(\Gamma) \in \mathcal{C}(\beta X - X, \mathcal{M}_d^2(\mathbb{T}))$, et vérifions que $\Gamma' \notin \mathcal{D}^2(\beta X - X, \mathbb{T})$. Supposons l'existence de deux fonctions continues f_1' et f_2' de $\beta X - X$ dans $\mathbb{T}$ telles que $\operatorname{Supp}\Gamma_t' = \{f_1'(t), f_2'(t)\}$ pour tout $t \in \beta X - X$. Tout d'abord, si $x \in X_1 - X$, l'ensemble $h^{-1}(x)$ est connexe car c'est l'ensemble des valeurs d'adhérence du filtre Θ_x (trace sur X du filtre des voisinages de x dans X_1) (voir V.1.3), lequel a une base formée de parties connexes. Il en résulte que les fonctions f_1' et f_2' sont constantes sur $h^{-1}(x)$. On en déduit l'existence de deux fonctions f_1'' et f_2'' de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{T}$ telles que $f_1'' \circ h = f_1'$ et $f_2'' \circ h = f_2'$. Comme X_1 est l'espace topologique quotient de βX par la relation $x \mathcal{R} x'$ si $\bar{h}(x) = \bar{h}(x')$ (voir II.15), les fonctions f_1'' et f_2'' sont continues. Mais ceci est en contradiction avec la première partie de VI.2.12, car on a $\operatorname{Supp}\Gamma_x = \{f_1''(x), f_2''(x)\}$ pour tout $x \in \mathbb{T}$.

VI.2.13. Conservons les notations de VI.2.12. Soient $A = \mathcal{C}^\circ(X, M_2(\mathbb{C}))$ et $C = \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Montrons que Γ' appartient à $\xi(\mathcal{C}(A,C)^\sim)$. Notons (e_1, e_2) la base orthonormale canonique de l_2^2 et, pour tout $c \in C$, appelons $\gamma(c)$ la fonction continue de $\mathbb{T}$ dans $M_2(\mathbb{C})$ telle que, si $\theta \in [0,2\pi[$,

$$\gamma(c)(e^{i\theta}) = c(e^{i\theta/2})P((\cos\theta/4)e_1 + (\sin\theta/4)e_2)$$

$$+ c(-e^{i\theta/2})P((-\sin\theta/4)e_1 + (\cos\theta/4)e_2) \quad .$$

Alors $c \longmapsto \gamma(c)$ est un homomorphisme de C dans $\mathcal{C}(\mathbf{T}, M_2(\mathbb{C}))$. Soit B la C^*-algèbre des couples $(m,c) \in \mathcal{C}^b(X, M_2(\mathbb{C})) \times C$ tels que $\lim_{t,\Theta_x} m(t) = \gamma(c)(x)$ pour tout $x \in X_1 - X = \mathbf{T}$. D'après le lemme VI.2.1, B appartient à $\mathcal{E}(A,C)$ et on a $\xi(\tilde{B}) = h^*(\Gamma) = \Gamma'$.

Dans cet exemple, on obtient donc les inclusions suivantes :

$$\mathcal{D}^2(\beta X - X, Y) \subsetneq \xi(\mathcal{E}(A,C)^{\sim}) \subset \mathcal{C}(\beta X - X, \mathcal{M}^2_d(Y)) .$$

Le problème de la surjectivité de ξ en général reste posé.

VI.2.14. Donnons un exemple montrant que l'application ζ de $\mathcal{C}(\beta X - X, \mathcal{M}^p_d(Y))$ dans $\mathcal{C}(\beta X - X, \mathcal{F}^p_d(Y))$ (voir VI.1.10) n'est pas toujours surjective. Prenons $Y = [0,1]$ et appelons f la fonction continue de $\mathbf{T}$ dans $\mathcal{F}^3_d(Y)$ définie par

$$f(x) = \{1, \theta/\pi, 0\} \quad \text{si} \quad x \in e^{i\theta} \quad \text{et} \quad \theta \in [0,\pi]$$
$$f(x) = \{1, 0\} \quad \text{si} \quad x = e^{i\theta} \quad \text{et} \quad \theta \in [\pi, 2\pi] .$$

Supposons l'existence de $\Gamma \in \mathcal{C}(\mathbf{T}, \mathcal{M}^3_d(Y))$ tel que $f(x) = \operatorname{Supp} \Gamma_x$ pour tout $x \in \mathbf{T}$. D'après la proposition VI.2.9, il existe des fonctions continues f_1 , f_2 , f_3 de $\mathbf{T}$ dans $[0,1]$ telles que $f(x) = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$ pour tout $x \in \mathbf{T}$. Soient $\theta_0 \in]0,\pi[$ et $i_0 \in \{1,2,3\}$ tels que $f_{i_0}(e^{i\theta_0}) = \theta_0/\pi$. Alors, pour tout $\theta \in [0,\pi]$, on a nécessairement $f_{i_0}(e^{i\theta}) = \theta/\pi$, d'où $f_{i_0}(-1) = 1$ et $f_{i_0}(e^{i\theta}) = 1$ si $\theta \in [\pi, 2\pi]$. Ceci contredit la continuité de f_{i_0} en 1 .

Soient X le disque unité ouvert de $\mathbb{R}^2$ et X_1 son adhérence dans $\mathbb{R}^2$. On déduit facilement de ce qui précède que la fonction $x \longmapsto f \circ h(x)$ de $\beta X - X$ dans $\mathcal{F}^3_d(Y)$ n'appartient pas à l'image par ζ de $\mathcal{C}(\beta X - X, \mathcal{M}^3_d(Y))$.

VI.2.15. Conservons les notations de VI.2.14. Soient $A = \mathcal{C}^\circ(X, M_3(\mathbb{C}))$ et $C = \mathcal{C}([0,1])$. On a $\xi(\mathcal{E}(A,C)^{\sim}) = \mathcal{C}(\beta X - X, \mathcal{M}^3_d([0,1]))$ d'après la proposition VI.2.9. Par contre, d'après VI.2.14 et la commutativité du diagramme de VI.1.10, on a $\rho \circ \tilde{\lambda}(\mathcal{E}(A,C)^{\sim}) \subsetneq \mathcal{C}(\beta X - X, \mathcal{F}^3_d([0,1]))$.

Comme $\operatorname{Ext}(A,C) = \mathcal{E}(A,C)$ (voir VI.1.3), l'extension de X par $[0,1]$ associée à f n'est le spectre d'aucune extension de A par C .

VI.3. <u>Injectivité de</u> ξ .

VI.3.1. DEFINITIONS. <u>Soient</u> T <u>un espace topologique,</u> Y <u>un espace localement compact, et</u> $\Gamma \in \mathcal{C}(T, \mathcal{M}_d(Y))$. <u>Soit</u> Ω <u>une partie de</u> T . <u>On dira que</u> Γ <u>est simple sur</u> Ω <u>s'il existe une famille</u> $(f_i)_{i \in I}$ <u>de fonctions continues de</u> Ω <u>dans</u> Y <u>telle que</u> :

(i) <u>pour tout</u> $t \in \Omega$ <u>et tout</u> $y \in Y$, <u>on a</u>

$$\Gamma_t(\{y\}) = \text{card}\,\{i \mid f_i(t) = y\} \quad ;$$

(ii) si f_i et f_j sont deux fonctions qui prennent la même valeur en un point de Ω, alors $f_i = f_j$.

Appelons $(g_j)_{j\in K}$ la famille des fonctions distinctes qui se trouvent dans $(f_i)_{i\in I}$ et, pour $j \in K$, posons $k(j) = \text{card}\,\{i \in I \mid f_i = g_j\}$; ainsi k est une fonction de K dans $\mathbb{N}^*$. On dira que Γ est déterminé par $((g_j)_{j\in K}, k)$ (ou par $(f_i)_{i\in I}$) sur Ω..

On dira que Γ est simple si Γ est simple sur $\{t\in T \mid \Gamma_t \neq 0\}$. On notera $\mathcal{D}^p_s(T,Y)$ l'ensemble des éléments simples de $\mathcal{C}(T, \mathcal{M}_d(Y))$ qui sont déterminés sur $\{t \in T \mid \Gamma_t \neq 0\}$ par une famille $(f_i)_{i\in I}$ telle que $\text{card}\, I \leqslant p$.

VI.3.2. Conservons les notations de VI.3.1. On a $\mathcal{D}^p_s(T,Y) \subset \mathcal{D}^p(T,Y)$. En effet, soit $\Gamma \in \mathcal{D}^p_s(T,Y)$, déterminé par une famille $(f_i)_{i\in N(q)}$ (avec $q \leqslant p$) de fonctions continues de $\Omega = \{t \in T \mid \Gamma_t \neq 0\}$ dans Y qui vérifie les conditions (i) et (ii) de VI.3.1. Soit E un compact de Y. Pour $i \in N(q)$ on a $f_i^{-1}(E) \subset \{t \in T \mid E \cap \text{Supp}\,\Gamma_t \neq \emptyset\} \subset \Omega$. Comme $t \longmapsto \text{Supp}\,\Gamma_t$ est continue de T dans $\mathcal{F}(Y)$ (voir VI.1.8), l'ensemble $\{t \in T \mid E \cap \text{Supp}\,\Gamma_t \neq \emptyset\}$ est fermé dans T. Il en résulte que $f_i^{-1}(E)$ est fermé dans T. On peut donc prolonger f_i en une fonction continue $\overline{f}_i$ de T dans $\ddot{Y}$, en posant $\overline{f}_i(t) = y_\infty$ pour $t \in T - \Omega$ (y_∞ désignant le point à l'infini de Y). On en déduit que $\mathcal{D}^p_s(T,Y) \subset \mathcal{D}^p(T,Y)$.

Soit maintenant $\Gamma \in \mathcal{C}(T, \mathcal{M}_d(Y))$. Supposons l'existence d'une partition finie de $\Omega = \{t \in T \mid \Gamma_t \neq 0\}$ en ouverts sur lesquels Γ est simple et déterminé par une famille dénombrable de fonctions. Alors, on montre de même que $\Gamma \in \mathcal{D}^{\aleph_0}(T,Y)$.

VI.3.3. PROPOSITION. Soient H et H' deux espaces hilbertiens de dimension finie avec $\dim H = r$ et $[\dim H : \dim H'] = p$. Soient X et Y deux espaces localement compacts, $A = \mathcal{C}^\circ(X, \mathcal{L}(H))$ et $C = \mathcal{C}^\circ(Y, \mathcal{L}(H'))$. Soit $\Gamma \in \mathcal{D}^p_s(\beta X - X, Y)$, et posons $\Omega = \{x \in \beta X - X \mid \Gamma_x \neq 0\}$. Appelons Θ la trace sur X du filtre des voisinages de Ω dans βX. On fait les hypothèses suivantes (voir VI.3.6) :

a) pour tout $W \in \Theta$ et tout champ de projecteurs appartenant à $\mathcal{C}(W, \mathcal{L}(H))$, de rang constant, il existe $W_1 \in \Theta$ contenu dans W sur lequel ce champ soit trivial.

b) il existe $V \in \Theta$ tel que $V \cup \Omega$ soit paracompact;

c) Θ possède la propriété de prolongement $\mathcal{P}_r$.

Soient B et B' deux éléments de $\mathcal{E}(A,C)$ tels que $\xi(\tilde{B}) = \xi(\tilde{B}') = \Gamma$. Alors $\tilde{B} = \tilde{B}'$.

VI.3.4. PROPOSITION. Soient X un espace localement compact dénombrable à l'infini, Y un espace localement compact, H un espace hilbertien de dimension $\aleph_0$, et H' un espace hilbertien séparable. Soient $A = \mathcal{C}^\circ(X, \mathcal{LC}(H))$ et $C = \mathcal{C}^\circ(Y, \mathcal{LC}(H'))$. Soit $\Gamma \in \mathcal{D}_s^{\aleph_0}(\beta X - X, Y)$, et posons $\Omega = \{x \in \beta X - X \mid \Gamma_x \neq 0\}$. Appelons Θ la trace sur X du filtre des voisinages de Ω dans βX. On fait les hypothèses suivantes (voir VI.3.6) :

a) pour tout $W \in \Theta$ et tout champ de projecteurs appartenant à $\mathcal{C}(W, \mathcal{LC}(H))$, de rang constant, il existe $W_1 \in \Theta$, contenu dans W, sur lequel ce champ soit trivial;

b) il existe $V \in \Theta$ tel que $V \cup \Omega$ soit paracompact;

c) Θ possède une base formée de parties fermées;

d) il existe $V' \in \Theta$ tel que toute fonction continue de Ω dans $\mathbf{T}$ se prolonge en une fonction continue de $V' \cup \Omega$ dans $\mathbf{T}$.

Soient B et B' deux éléments de $\mathcal{E}(A,C)$ tels que $\xi(\tilde{B}) = \xi(\tilde{B}') = \Gamma$. Alors $\tilde{B} = \tilde{B}'$.

Les méthodes de démonstration des propositions VI.3.3 et VI.3.4 sont les mêmes à quelques détails techniques près. Nous démontrerons seulement la proposition VI.3.4. Cette proposition résulte évidemment du lemme suivant.

VI.3.5. LEMME. Conservons les notations et hypothèses de la proposition VI.3.4. Soit $B \in \mathcal{E}(A,C)$ tel que $\xi(\tilde{B}) = \Gamma$, et soit γ l'homomorphisme de C dans $\bar{E}^1(A)/A$ associé à B. Supposons que Γ est déterminé par $((g_i)_{i \in N(q)}, k)$ sur Ω avec $q \leq \aleph_0$. Posons $h(0) = 0$ et, pour $j \in N(q)$, posons $h(j) = \sum_{i=1}^{j} k(i)$. Identifions H à $H' \otimes l^2_{\aleph_0}$, et appelons $(e_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ la base orthonormale canonique de $l^2_{\aleph_0}$. Il existe une fonction fortement continue u de X dans $\mathcal{U}(H)$ telle qu'on ait

$$\bar{\alpha}_u(t)\gamma(c)(t) = \sum_{i \in N(q)} \Big(\sum_{j = h(i-1)+1}^{h(i)} c(g_i(t)) \otimes Pe_j \Big)$$

pour tous $c \in C$ et $t \in \Omega$.

$\bar{\alpha}_u(t)\gamma(c)(t) = 0$ pour tous $c \in C$ et $t \in (\beta X - X) - \Omega$.

Démontrons ce lemme. Nous supposerons pour fixer les idées que $q = \aleph_0$ et $\dim H' = \aleph_0$, et nous identifierons H' à $l^2_{\aleph_0}$. Grâce à la base $(e_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ nous écrirons les éléments de $\mathcal{L}(l^2_{\aleph_0})$ comme des matrices infinies. Nous noterons $(a_{i,j})$ le système d'unités matricielles de $\mathcal{L}(l^2_{\aleph_0})$ où $a_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui se trouvant à la i-ième ligne et j-ième colonne qui vaut 1. Rappelons qu'on a $a_{k,l}a_{i,j} = \delta_i^l a_{k,j}$ et $a_{i,j} = a_{j,i}^*$ (avec $\delta_i^l = 1$ si $i = l$ et 0 sinon).

Nous noterons f la fonction $t \longmapsto \operatorname{Supp} \Gamma_t$ définie sur $\beta X - X$.

(1) Fixons deux indices i et j . Soit $x \in \Omega$. Prenons $\varphi_j^x \in \mathcal{K}(Y)^+$ telle que $\varphi_j^x(g_j(x)) = 1$ et $\varphi_j^x(g_r(x)) = 0$ si $r \neq j$. Considérons l'élément $c_{i,j}^x$ de C tel que $c_{i,j}^x(y) = \varphi_j^x(y)a_{i,i}$ pour $y \in Y$. Posons $P_{i,j}(x) = \gamma(c_{i,j}^x)(x)$. On vérifie immédiatement que $P_{i,j}(x)$ est un projecteur de $\overline{E}^1(A)(x)$, indépendant du choix de φ_j^x . Par définition, on a $\Gamma_x(c_{i,j}^x) = T_x^1(\gamma(c_{i,j}^x)(x)) = T_x^1(P_{i,j}(x))$. Par ailleurs, on a

$$\Gamma_x(c_{i,j}^x) = \sum_{r \in \mathbb{N}^*} k(r).\mathrm{Tr}\ c_{i,j}^x(g_r(x)) = k(j).\mathrm{Tr}\ c_{i,j}^x(g_j(x)) = k(j)$$

d'où $T_x^1(P_{i,j}(x)) = k(j)$.

Appelons $P_{i,j}$ le champ de projecteurs ainsi construit sur Ω , et montrons que $P_{i,j} \in \Lambda^1(\Omega,A)$. Soit $x \in \Omega$. Prenons deux voisinages compacts W et W' de $g_j(x)$ dans Y tels que $f(x) \cap W = \{g_j(x)\}$ et $W' \subset \mathrm{Int}\ W$. Il existe un voisinage ω de x dans Ω tel que, si $t \in \omega$, on ait $f(t) \cap W = \{g_j(t)\}$ et $g_j(t) \in W'$ (voir VI.2.3 (i)). Soit ψ_j une fonction continue de Y dans $[0,1]$, égale à 1 sur W' et à 0 hors de W , et considérons l'élément $b_{i,j}$ de C tel que $b_{i,j}(y) = \psi_j(y)a_{i,i}$ pour $y \in Y$. Alors on a $P_{i,j}(t) = \gamma(b_{i,j})(t)$ sur ω . Ainsi $P_{i,j}$ coïncide avec un élément de $\overline{E}^1(A)/A$ au voisinage de chaque point de Ω , d'où $P_{i,j} \in \Lambda^1(\Omega,A)$.

(2) Pour tous i et $j \in \mathbb{N}^*$, on construit de cette façon un champ de projecteurs $P_{i,j} \in \Lambda^1(\Omega,A)$, de rang $k(j)$. De plus, les champs de projecteurs ainsi construits sont deux à deux orthogonaux . Donnons-nous dans $\mathcal{LC}(H)$ une suite $(R_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ de projecteurs deux à deux orthogonaux de somme 1 , tels que $\mathrm{rg}\ R_{i,j} = k(j)$ pour tous $i,j \in \mathbb{N}^*$. D'après le lemme V.2.7 , il existe une fonction fortement continue w de X dans $\mathcal{U}(H)$ telle qu'on ait $\overline{\alpha}_w(t)P_{i,j}(t) = R_{i,j}$ pour tout $t \in \Omega$ et tous $i,j \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, en remplaçant B par l'extension semi-équivalente associée à $\overline{\alpha}_w \circ \gamma$, on peut supposer que les champs de projecteurs $P_{i,j}$ sont constants sur Ω , de valeur $R_{i,j}$, ce que nous ferons à partir de maintenant.

Vérifions que dans ces conditions γ est un homomorphisme de C dans $\mathcal{C}(\beta X - X, \mathcal{LC}(H)) \subset \overline{E}^1(A)/A$. Soit $\varphi \in \mathcal{K}(Y)^+$ et, si $i \in \mathbb{N}^*$, soit c_i l'élément de C tel que $c_i(y) = \varphi(y)a_{i,i}$ pour $y \in Y$. Montrons que $\gamma(c_i) \in \mathcal{C}(\beta X - X, \mathcal{LC}(H))$. D'après III.4.2 b) , il suffit de montrer que, pour tout $x \in \beta X - X$, on a $\gamma(c_i)(x) \in \mathcal{LC}(H)$. Comme $\gamma(c_i)(x) = 0$ si $x \in (\beta X - X) - \Omega$, on peut supposer que $x \in \Omega$. Soient $j_1, \dots, j_q$ les indices tels que $f(x) \cap \mathrm{Supp}\ \varphi = \{g_{j_1}(x), \dots, g_{j_q}(x)\}$. En conservant pour φ_j^x la notation de (1) , on a

$$\gamma(c_i)(x) = \gamma(\sum_{r=1}^{q} \varphi_{j_r}^x \varphi a_{i,i})(x) = \sum_{r=1}^{q} \varphi(g_{j_r}(x))R_{i,j_r} \in \mathcal{LC}(H) .$$

Soit maintenant $c \in C$ tel que $0 \leq c \leq \sum_{i=1}^{n} c_i$. Comme $\mathcal{C}(\beta X - X, \mathcal{LC}(H))$ est une sous-C*-algèbre faciale de $\overline{E}^1(A)/A$ (voir III.4.3 (ii)), on a $\gamma(c) \in \mathcal{C}(\beta X - X, \mathcal{LC}(H))$. Ceci entraîne $\gamma(C) \subset \mathcal{C}(\beta X - X, \mathcal{LC}(H))$ car les éléments de C^+ majorés par un élément de la forme $y \longmapsto \varphi(y) \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$, avec $\varphi \in \mathcal{K}(Y)^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, engendrent C .

(3) Posons $R_j = \sum_{i=1}^{\infty} R_{i,j}$. Vérifions que, pour tout $x \in \beta X - X$ et tout $c \in C^+$, on a $\gamma(c)(x)R_j = R_j\gamma(c)(x)$. Il suffit de le démontrer pour les éléments $c \in \mathcal{K}(C)^+$ tels que $c(y) \leq \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$ sur Y . Comme $\gamma(c)(x) = 0$ si $x \in (\beta X - X) - \Omega$, on peut supposer que $x \in \Omega$. Soient $j_1, \dots, j_q$ les indices tels que $f(x) \cap \operatorname{Supp} c = \{g_{j_1}(x), \dots, g_{j_q}(x)\}$. On a

$$\gamma(c)(x) = \gamma(c)(x)\Big(\sum_{\substack{i=1,\dots,n\\ r=1,\dots,q}} R_{i,j_r}\Big) = \Big(\sum_{\substack{i=1,\dots,n\\ r=1,\dots,q}} R_{i,j_r}\Big)\gamma(c)(x) .$$

On en déduit que $\gamma(c)(x)R_j = R_j\gamma(c)(x)$.

Appelons γ_j l'homomorphisme $c \longmapsto \gamma(c)R_j$ de C dans $\mathcal{C}(\beta X - X, \mathcal{LC}(H))$.

(4) Nous allons maintenant nous intéresser à γ_1 . Posons $H_1 = R_1(H)$. Soient $i,j \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \Omega$. Prenons $\psi^x \in \mathcal{K}(Y)$ tel que $\psi^x(g_1(x)) = 1$. Appelons $d^x_{i,j}$ l'élément $y \longmapsto \psi^x(y)a_{i,j}$, et posons $\delta_{i,j}(x) = \gamma_1(d^x_{i,j})(x)$. Alors $\delta_{i,j}(x)$ appartient à $\mathcal{LC}(H_1)$, et cet élément est indépendant de la fonction ψ^x pourvu qu'elle vaille 1 en $g_1(x)$.

On construit de cette façon, pour tous $i,j \in \mathbb{N}^*$, une fonction $\delta_{i,j} : x \longmapsto \delta_{i,j}(x)$ de Ω dans $\mathcal{LC}(H_1)$. On vérifie facilement qu'elle est normiquement continue. En chaque $x \in \Omega$, la suite $(\delta_{i,j}(x))_{i,j\in\mathbb{N}^*}$ forme un système d'unités matricielles de $\mathcal{L}(H_1)$. Enfin, on a évidemment $\delta_{i,i}(x) = R_{i,1}$ pour $i \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \Omega$.

Puisque $(R_{i,1})_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de projecteurs deux à deux orthogonaux dans $\mathcal{L}(H_1)$, de rang $k(1)$ et de somme 1 , on peut identifier H_1 à $l^2_{\aleph_0} \otimes l^2_{k(1)}$, les projecteurs $R_{i,1}$ devenant les projecteurs $Pe_i \otimes 1$ dans l'identification. Pour le moment les éléments de $\mathcal{L}(H_1)$ seront considérés comme des matrices infinies dont les coefficients appartiennent à $M_{k(1)}(\mathbb{C})$. En particulier, pour $x \in \Omega$ et $i \in \mathbb{N}^*$, $\delta_{i,i+1}(x)$ est une matrice dont les coefficients sont nuls sauf celui à la i-ième ligne et i+1-ième colonne, qui appartient à $\mathcal{U}(l^2_{k(1)})$; on note $\delta_i(x)$ ce coefficient. La fonction $x \longmapsto \delta_i(x)$ est évidemment continue de Ω dans $\mathcal{U}(l^2_{k(1)})$.

Pour $x \in \Omega$, soit $v_1(x)$ la matrice diagonale dont le i-ième coefficient sur la diagonale vaut 1 si $i = 1$, et $\delta_1(x)\ldots\delta_{i-1}(x)$ si $i \geqslant 2$. Pour chaque $i \in \mathbb{N}^*$, $\tilde{v}_1(x)\delta_{i,i+1}(x)$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à la i-ième ligne et i+1-ième colonne qui vaut 1. On déduit alors des relations qui lient les $\delta_{i,j}(x)$ que, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, l'élément $\tilde{v}_1(x)\delta_{i,j}(x)$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à la i-ième ligne et la j-ième colonne qui vaut 1. D'autre part $t \longmapsto v_1(t)$ est une fonction fortement continue de Ω dans $\mathcal{U}(H_1)$; donc, d'après le lemme V.2.10, il existe une fonction fortement continue u_1 de X dans $\mathcal{U}(H_1)$ telle que

$$\tilde{v}_1(x) = \bar{\alpha}_{u_1}(x) \,|\, \mathcal{LC}(H_1)$$

pour tout $x \in \Omega$.

Soit $c \in C$. On a $c(y) = \sum_{i,j} \psi_{i,j}(y) a_{i,j}$ pour tout $y \in Y$ avec $\psi_{i,j} \in \mathcal{C}^\circ(Y)$. Pour tout $x \in \Omega$ on vérifie facilement que

$$\gamma_1(c)(x) = \sum_{i,j} \psi_{i,j}(g_1(x))\delta_{i,j}(x) ,$$

d'où

$$\tilde{v}_1(x)\gamma_1(c)(x) = \sum_{i,j} \psi_{i,j}(g_1(x))\tilde{v}_1(x)\delta_{i,j}(x) .$$

Cet élément est une matrice infinie dont le terme à la i-ième ligne et j-ième colonne est l'opérateur $\psi_{i,j}(g_1(x))I_1 \in M_{k(1)}(\mathbb{C})$ (si l'on désigne exceptionnellement ici par I_1 l'unité de $M_{k(1)}(\mathbb{C})$ habituellement notée 1). On obtient donc

$$\bar{\alpha}_{u_1}(x)\gamma_1(c)(x) = c(g_1(x)) \otimes I_1$$

pour tout $x \in \Omega$.

(5) Soit $j \in \mathbb{N}^*$. De la même façon, posons $H_j = R_j(H)$ et identifions H_j à $l^2_{\aleph_0} \otimes l^2_{k(j)}$. Notons ici I_j l'unité de $M_{k(j)}(\mathbb{C})$. On démontre l'existence d'une fonction fortement continue u_j de X dans $\mathcal{U}(H_j)$ telle que

$$\bar{\alpha}_{u_j}(x)\gamma_j(c)(x) = c(g_j(x)) \otimes I_j$$

pour tous $c \in C$ et $x \in \Omega$.

Si $t \in X$, appelons $u(t)$ l'opérateur unitaire de H dont la restriction à chaque H_j vaut u_j. Alors $t \longmapsto u(t)$ est une fonction fortement continue de X dans $\mathcal{U}(H)$ et on a

$$\bar{\alpha}_u(x)\gamma(c)(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}^*} c(g_j(x)) \otimes I_j$$

pour tous $c \in C$ et $x \in \Omega$, ce qui achève la démonstration du lemme.

VI.3.8. Conservons les notations des propositions VI.3.3 et VI.3.4. Dans la pratique, Γ sera obtenu à partir d'une compactification X_1 de X. Soient $\Gamma' \in \mathfrak{D}^p(X_1 - X, Y)$ avec $p \leqslant \aleph_0$, et

$$\Omega' = \{x \in X_1 - X \mid \Gamma'_x \neq 0\} .$$

Supposons que $\Gamma = h^*_{X,X_1}(\Gamma')$. On a

$$\Omega = \{t \in \beta X - X \mid \Gamma_t \neq 0\} = h^{-1}_{X,X_1}(\Omega') .$$

Indiquons des situations où les conditions des propositions VI.3.3 et VI.3.4 sont réalisées.

a) La condition a) de VI.3.3 et VI.3.4 est réalisée lorsque Θ possède une base formée de parties paracompactes contractiles (voir [17], remarque p. 250).

b) La condition b) de VI.3.3 et VI.3.4 est réalisée lorsque Ω' est dénombrable à l'infini (voir lemme V.1.5).

c) La condition c) de VI.3.3 est réalisée lorsque Θ possède une base formée de rétractes de X . Par ailleurs, lorsque $X \cup \Omega'$ est normal Θ possède une base formée de parties fermées (remarquer que Ω' est fermé dans $X \cup \Omega'$).

d) La condition d) de VI.3.4 est vérifiée lorsqu'il existe $V' \in \Theta$ tel que Θ possède une base formée de rétractes de V' .

VI.3.7. Les propositions VI.3.3 et VI.3.4 admettent diverses généralisations et applications. Nous nous bornerons à donner en VI.3.8 une application de VI.3.4. Nous avons besoin pour cela de la généralisation utile suivante de VI.3.4. On s'assurera facilement que VI.3.3 se géneralise de la même façon.

PROPOSITION. <u>Soient</u> X <u>un espace localement compact dénombrable à l'infini,</u> Y <u>un espace localement compact,</u> H <u>un espace hilbertien de dimension</u> $\aleph_0$, <u>et</u> H' <u>un espace hilbertien séparable. Soient</u> $A = \mathcal{C}°(X, \mathcal{LC}(H))$ <u>et</u> $C = \mathcal{C}°(Y, \mathcal{LC}(H'))$. <u>Soit</u> $\Gamma \in \mathcal{D}^{\aleph_0}(\beta X - X, Y)$, <u>et posons</u> $\Omega = \{x \in \beta X - X \mid \Gamma_x \neq 0\}$. <u>Appelons</u> Θ <u>la trace sur</u> X <u>du filtre des voisinages de</u> Ω <u>dans</u> βX . <u>On suppose l'existence d'une partition finie de</u> Ω <u>en des ouverts</u> $\Omega^1, \dots, \Omega^n$ <u>sur lesquels</u> Γ <u>est simple. De plus on suppose que les conditions</u> a), b) , c), d) <u>de la proposition</u> VI.3.4 <u>sont réalisées. Soient</u> B <u>et</u> B' <u>deux éléments de</u> $\mathcal{E}(A,C)$ <u>tels que</u> $\xi(\tilde{B}) = \xi(\tilde{B}') = \Gamma$. <u>Alors</u> $\tilde{B} = \tilde{B}'$.

Pour $i = 1,\dots,n$, notons Θ^i la trace sur X du filtre des voisinages de Ω^i dans βX . Montrons que, si $i \neq j$, il existe $V^i \in \Theta^i$ et $V^j \in \Theta^j$ tels que $V^i \cap V^j = \emptyset$. Soit $V \in \Theta$ tel que $V \cup \Omega$ soit paracompact. Appelons f la fonction continue de Ω dans $\mathbb{R}$ qui vaut k sur Ω^k pour $k = 1,\dots,n$. Cette fonction se prolonge en une fonction continue $\overline{f}$ de $V \cup \Omega$ dans $\mathbb{R}$. Il suffit alors de poser

$$V^i = \{x \in V \mid i-1/2 < \bar{f}(x) < i+1/2\}$$

et

$$V^j = \{x \in V \mid j-1/2 < \bar{f}(x) < i+1/2\} .$$

Pour $i = 1,\dots,n$, prenons un fermé $S^i \in \Theta^i$ de sorte que $S^i \cap S^j = \emptyset$ si $i \neq j$. Puisque X est normal, $\overline{S^i}^{\beta X}$ est le compactifié de Stone-Čech de S^i et on a $\overline{S^i}^{\beta X} \cap \overline{S^j}^{\beta X} = \emptyset$ pour i et j distincts. De plus, on a évidemment $\Omega^i \subset (\beta X - X) \cap \overline{S^i}^{\beta X}$. Posons $A^i = \mathcal{C}^\circ(S^i, \mathcal{LC}(H))$ pour $i = 1,\dots,n$; d'après le lemme III.4.14, la C^*-algèbre $L(A^i)/A^i$ s'identifie canoniquement à la C^*-algèbre des $1|(\beta X - X) \cap \overline{S^i}^{\beta X}$ avec $1 \in L(A)$. Posons $\Gamma^i = \Gamma|(\beta X - X) \cap \overline{S^i}^{\beta X}$; on a

$$\Omega^i = \{x \in (\beta X - X) \cap \overline{S^i}^{\beta X} \mid \Gamma^i_x \neq 0\} \quad \text{et} \quad \Gamma^i \in \mathcal{D}_s^{\aleph_0}((\beta X - X) \cap \overline{S^i}^{\beta X}, Y) .$$

On vérifie facilement que, si l'on remplace X par S^i et Γ par Γ^i (et donc A par A^i , Ω par Ω^i , Θ par Θ^i), les conditions a), b), c), d) de la proposition VI.3.4 sont réalisées. Appelons γ l'homomorphisme de C dans $\bar{E}^1(A)/A$ associé à B , et B^i l'extension de A^i par C associée à l'homomorphisme $c \longmapsto \gamma(c)|(\beta X - X) \cap \overline{S^i}^{\beta X}$ de C dans $\bar{E}^1(A^i)/A^i$ on a évidemment $\xi(\tilde{B}^i) = \Gamma^i$. Soit $(f^i_j)_{j\in N(q_i)}$ (avec $q_i \leq \aleph_0$) une suite de fonctions continues de Ω^i dans Y qui détermine Γ sur Ω^i . D'après le lemme VI.3.5, il existe une fonction fortement continue u^i de S^i dans $\mathcal{U}(H)$ telle qu'on ait

$$\bar{\alpha}_{u^i}(x)\gamma(c)(x) = \sum_{j\in N(q_i)} c(f^i_j(x)) \otimes Pe_j \quad \text{pour tout } c \in C \text{ et tout}$$

$x \in \Omega^i$.

$$\bar{\alpha}_{u^i}(x)\ (c)(x) = 0 \quad \text{pour tout } c \in C \text{ et tout } x \in (\beta X - X) \cap \overline{S^i}^{\beta X} - \Omega^i .$$

Appelons u la fonction fortement continue de $\bigcup_{i=1}^n S^i$ dans $\mathcal{U}(H)$ dont la restriction à chaque S^i est u^i . En restreignant au besoin $\bigcup_{i=1}^n S^i \in \Theta$, on peut supposer, grâce au lemme V.2.4 (i), que u se prolonge en une fonction fortement continue de X dans $\mathcal{U}(H)$; ce prolongement sera encore noté u . On a

$$\bar{\alpha}_u(x)\gamma(c)(x) = \sum_{j\in N(q_i)} c(f^i_j(x)) \otimes Pe_j \quad \text{pour tous } c \in C ,\ x \in \Omega^i$$

et $i = 1,\dots,n$;

$$\bar{\alpha}_u\ (x)\gamma(c)(x) = 0 \quad \text{pour tout } c \in C \text{ et tout } x \in (\beta X - X) - \Omega .$$

Ainsi, B est semi-équivalente à l'extension associée à $\bar{\bar{\alpha}}_u \circ \gamma$, laquelle ne dépend que de Γ . Ceci achève la démonstration de la proposition.

VI.3.8. Soient Θ et Θ' deux filtres sur un espace T, tels que $V \cap V' \neq \emptyset$ pour tous $V \in \Theta$ et $V' \in \Theta'$. On notera $\Theta \wedge \Theta'$ le filtre des parties $V \cap V'$ avec $V \in \Theta$ et $V' \in \Theta'$.

PROPOSITION. Soient X et Y deux espaces localement compacts dénombrables à l'infini et X_1 une compactification de X. Soient H un espace hilbertien de dimension $\aleph_0$ et H' un espace hilbertien séparable. Posons $A = \mathscr{C}^\circ(X, \mathscr{L}\mathscr{C}(H))$ et $C = \mathscr{C}^\circ(Y, \mathscr{L}\mathscr{C}(H'))$.

(i) Soit Ω un ouvert de $X_1 - X$ possédant n composantes connexes $\Omega^1, \dots, \Omega^n$. Pour $i = 1, \dots, n$ donnons-nous une famille $(g^i_j)_{j \in N(q_i)}$ (avec $q_i \leqslant \aleph_0$) de fonctions continues de Ω^i dans Y telle que :

1) pour tout $t \in \Omega^i$, on a $g^i_j(t) \neq g^i_k(t)$ si $j \neq k$;

2) pour tout $t \in \Omega^i$ et tout compact K de Y, on a $\mathrm{card}\,\{j \in N(q_i) \mid g^i_j(t) \in K\} < +\infty$;

3) pour tout compact K de Y et toute partie $J \subset N(q_i)$, l'ensemble $\{t \in \Omega^i \mid (\bigcup_{j \in J} \{g^i_j(t)\}) \cap K \neq \emptyset\}$ est compact.

Notons f la fonction de $X_1 - X$ dans $\mathscr{F}(Y)$ telle que $f(t) = \emptyset$ si $t \in (X_1 - X) - \Omega$ et $f(t) = \{g^i_j(t) \mid j \in N(q_i)\}$ si $t \in \Omega^i$ et $i = 1, \dots, n$; alors f est continue.

Appelons Z l'extension de X par Y associée à f.

(ii) Pour $i = 1, \dots, n$ (resp. $x \in X_1 - X$), notons Θ^i (resp. Θ_x) la trace sur X du filtre des voisinages de Ω^i (resp. x) dans X_1. On suppose que les filtres Θ^i, pour $i = 1, \dots, n$, et Θ_x, pour $x \in \Omega$, se divisent en un nombre fini de bouts (et on notera $\Theta^i_1, \dots, \Theta^i_{s_i}$ les bouts de Θ^i) de la façon suivante :

4) pour $x \in \Theta^i$, les bouts de Θ_x sont $\Theta_x \wedge \Theta^i_1, \dots, \Theta_x \wedge \Theta^i_{s_i}$ $(i = 1, \dots, n)$.

Soit B une extension de A par C telle que $\hat{B} = Z$; alors $B \in \mathscr{E}(A, C)$. De plus, pour $i = 1, \dots, n$, il existe s_i fonctions $k^i_1, \dots, k^i_{s_i}$ de $N(q_i)$ dans $\mathbb{N}^*$, déterminées de façon unique par la condition suivante :

$$\lim_{t, \Theta_x \wedge \Theta^i_r} \mathrm{Tr}\, b(t) = \sum_{j \in N(q_i)} k^i_r(j) . \mathrm{Tr}\, b(g^i_j(x))$$

pour tout $b \in B$ encadré suivant $\Theta_x \wedge \Theta^i_r$, pour tout $x \in \Omega^i$, et pour $r = 1, \dots, s_i$.

(iii) Notons Θ la trace sur X du filtre des voisinages de Ω dans X_1. Supposons, outre les conditions précédentes, que :

5) la condition a) de la proposition VI.3.4 est satisfaite;

6) il existe $V' \in \Theta$ tel que Θ possède une base formée de rétractes de V'.

Soit ψ l'application : $B \longmapsto (k^i_r)_{r = 1, \dots, s_i \,;\, i = 1, \dots, n}$ définie, grâce à (ii), sur l'ensemble des $B \in \mathrm{Ext}(A,C)$ tels que $\hat{B} = Z$. Alors, si B et B' sont deux éléments semi-équivalents de $\mathrm{Ext}(A,C)$ tels que $\hat{B} = \hat{B}' = Z$, on a $\psi(B) = \psi(B')$, et ψ définit, par passage au quotient, une bijection $\tilde{\psi}$ entre les deux ensembles suivants :

l'ensemble des classes de semi-équivalence des $B \in \mathrm{Ext}(A,C)$ tels que $\hat{B} = Z$;

l'ensemble des suites $(k_r^i)_{r=1,\dots,s_i}$; $i=1,\dots,n$, où k_r^i est une fonction de $N(q_i)$ dans $\mathbb{N}^*$.

Plus précisément, posons $h_r^i(0) = 0$ et $h_r^i(j) = \sum_{p=1}^{j} k_r^i(p)$ pour $j \in N(q_i)$, $r = 1,\dots,s_i$, et $i = 1,\dots,n$. Identifions H à $H' \otimes l^2_{\aleph_0}$ et appelons $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ la base orthonormale canonique de $l^2_{\aleph_0}$. Alors $(k_r^i)_{r=1,\dots,s_i}$; $i=1,\dots,n$ est l'image par $\tilde{\psi}$ de $\tilde{B}$, où B est la C^*-algèbre des couples $(m,c) \in \mathcal{C}^b(X, \mathcal{LC}(H)) \times C$ tels que

$$\lim_{t,\Theta_x \wedge \Theta_r^i} m(t) = \sum_{j\in N(q_i)} \sum_{p=h_r^i(j-1)+1}^{h_r^i(j)} c(g_j^i(x)) \otimes Pe_p$$

pour tous $x \in \Omega^i$, $r = 1,\dots,s_i$ et $i = 1,\dots,n$;

$$\lim_{t,\Theta_x} m(t) = 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in (X_1 - X) - \Omega .$$

(les limites étant les limites normiques dans $\mathcal{LC}(H)$).

(i) Soit K un compact de Y . Alors $\{x \in X_1 - X \mid f(x) \cap K \neq \emptyset\}$ est égal à $\bigcup_{i=1}^{n} \{x \in \Omega^i \mid (\bigcup_{j\in N(q_i)} \{g_j^i(x)\}) \cap K \neq \emptyset\}$, et est donc compact. Cela prouve que f est s.c.s. La semi-continuité inférieure de f se vérifie immédiatement.

(ii) D'après la proposition VI.1.5, on a $B \in \mathcal{E}(A,C)$. De plus, si $x \in \Omega^i$ et si $\Theta_x \wedge \Theta_r^i$ est un bout de Θ_x , il existe une fonction unique $m_{r,x}^i$ de $N(q_i)$ dans $\mathbb{N}^*$ telle que

$$\lim_{t,\Theta_x \wedge \Theta_r^i} \mathrm{Tr}\, b(t) = \sum_{j\in N(q_i)} m_{r,x}^i(j).\mathrm{Tr}\, b(g_j^i(x))$$

pour tout $b \in B$,encadré suivant $\Theta_x \wedge \Theta_r^i$. Montrons que $m_{r,x}^i$ ne dépend pas de $x \in \Omega^i$. Appelons Γ_r^i la fonction de Ω^i dans $\mathcal{T}_d(C)$ telle que

$$\Gamma_{r,x}^i(c) = \sum_{j\in N(q_i)} m_{r,x}^i(j).\mathrm{Tr}\, c(g_j^i(x))$$

pour tout $c \in C^+$ et tout $x \in \Omega^i$. Soit $V \in \Theta_r^i$. Pour tout $x \in \Omega^i$ et tout $W \in \Theta_x$, on a $V \cap W \neq \emptyset$ d'après la condition 4). Il en résulte que Ω^i est contenu dans l'adhérence de V dans X_1 . Appelons P la surjection canonique de B sur C . Pour tout $b \in \mathcal{K}(B)$, la fonction $t \longmapsto \mathrm{Tr}\, b(t)$ est continue sur V (voir III.3.2); d'autre part, on a

$$\lim_{t,\Theta_x \wedge \Theta_r^i} \mathrm{Tr}\ b(t) = \Gamma_{r,x}^i(P(b))$$

pour tout $x \in \Omega^i$. Il résulte de ([1], chap. 1, §8, th. 1) que $x \longmapsto \Gamma_{r,x}^i(P(b))$ est continue sur Ω^i, et donc que $x \longmapsto \Gamma_{r,x}^i$ est continue sur Ω^i. Soient $x_\circ \in \Omega^i$, $j \in N(q_i)$ et K, K' deux voisinages compacts de $g_j^i(x_\circ)$ dans Y tels que $K \subset \mathrm{Int}\, K'$ et $g_l^i(x_\circ) \notin K'$ si $l \neq j$; il existe un voisinage ω de $x_\circ$ dans Ω^i tel que $g_j^i(x) \in K$ et $g_l^i(x) \notin K'$ pour $x \in \omega$ et $l \neq j$. Soit φ une fonction continue de Y dans $[0,1]$ valant 1 sur K et 0 hors de K', et prenons un projecteur $e \in \mathcal{L}(H')$, de rang 1 ; appelons c l'élément $y \longmapsto \varphi(y)e$. Alors on a $\Gamma_{r,x}^i(c) = m_{r,x}^i(j)$ pour tout $x \in \omega$. On en déduit que $x \longmapsto m_{r,x}^i(j)$ est continue sur Ω^i, et donc constante puisque Ω^i est connexe. Posons $k_r^i(j) = m_{r,x}^i(j)$ avec $x \in \Omega^i$. On définit ainsi une suite $(k_r^i)_{r=1,\dots,s_i\ ;\ i=1,\dots,n}$ de fonctions k_r^i de $N(q_i)$ dans $\mathbb{N}^*$, qui vérifie la propriété énoncée dans (ii).

(iii) Par hypothèse, Y est réunion d'une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de compacts. Soient $i \in \{1,\dots,n\}$ et $j \in N(q_i)$. On a $\Omega^i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (g_j^i)^{-1}(K_n)$. D'après la condition 3), les ensembles $(g_j^i)^{-1}(K_n)$ sont compacts, et donc Ω^i est dénombrable à l'infini. Il en résulte que Ω est dénombrable à l'infini; il existe donc $V \in \Theta$ tel que $V \cup h_{X,X_1}^{-1}(\Omega)$ soit paracompact (voir V.1.5). On posera $h = h_{X,X_1}$. Pour $i = 1,\dots,n$, d'après le lemme V.1.4, Θ^i est la trace sur X du filtre des voisinages de $h^{-1}(\Omega^i)$ dans βX. Comme dans la démonstration de la proposition VI.3.7, on vérifie que, si i et i' sont distincts dans $\{1,\dots,n\}$, il existe $V^i \in \Theta^i$ et $V^{i'} \in \Theta^{i'}$ tels que $V^i \cap V^{i'} = \emptyset$. Remarquons que les filtres Θ^i possèdent, comme chacun de leurs bouts, une base formée de parties fermées et qu'il en est donc de même pour Θ.

Pour $r = 1,\dots,s_i$ et $i = 1,\dots,n$, notons K_r^i l'ensemble des valeurs d'adhérence de Θ_r^i dans βX. D'après ce qui précède et le lemme V.1.10, les ensembles K_r^i sont deux à deux disjoints dans $\beta X - X$. On a $h^{-1}(\Omega^i) \subset \bigcup_{r=1}^{s_i} K_r^i$ d'après les lemmes V.1.4 et V.1.10 (ii). En particulier, si $x \in \Omega^i$, on a $h^{-1}(x) = \bigcup_{r=1}^{s_i} (h^{-1}(x) \cap K_r^i)$. D'après le lemme V.1.3, $h^{-1}(x)$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de Θ_x dans βX. On vérifie immédiatement que $h^{-1}(x) \cap K_r^i$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de $\Theta_x \wedge \Theta_r^i$ dans βX. Il en résulte que, pour tout $x' \in h^{-1}(x) \cap K_r^i$, le filtre $\Theta_{x'}$ est plus fin que $\Theta_x \wedge \Theta_r^i$.

Soit $B \in \mathrm{Ext}(A,C)$ tel que $\hat{B} = Z$. Soit $(k_r^i)_{r=1,\dots,s_i\ ;\ i=1,\dots,n}$

l'image de B par ψ. Montrons comment $\xi(\tilde{B})$ se construit à partir de $\psi(B)$. Définissons une fonction Γ de $\beta X - X$ dans $\mathcal{E}_d(C)$ de la façon suivante :

si $x \in \Omega^i$ et $x' \in h^{-1}(x) \cap K_r^i$, posons

$$\Gamma_{x'}(c) = \sum_{j \in N(q_i)} k_r^i(j) \, .\mathrm{Tr}\; c(g_j^i(x))$$

pour tout $c \in C^+$.

si $x' \in (\beta X - X) - h^{-1}(\Omega)$, posons $\Gamma_{x'} = 0$.

Soit $b \in B$, encadré suivant $\Theta_x \wedge \Theta_r^i$. Pour tout $x' \in h^{-1}(x) \cap K_r^i$, on a, d'après ce qui précède,

$$\lim_{t,\Theta_{x'}} \mathrm{Tr}\; b(t) = \lim_{t,\Theta_x \wedge \Theta_r^i} \mathrm{Tr}\; b(t)$$

$$= \sum_{j \in N(q_i)} k_r^i(j) . \mathrm{Tr}\; P(b)(g_j^i(x)) = \Gamma_{x'}(P(b))$$

(P étant toujours la surjection canonique de B sur C). Il en résulte que $\Gamma = \xi(\tilde{B})$. Remarquons que $h^{-1}(\Omega) = \{t \in \beta X - X \mid \Gamma_t \neq 0\}$, et que $(h^{-1}(\Omega^i) \cap K_r^i)_{r=1,\dots,s_i\,;\; i=1,\dots,n}$ est une partition de $h^{-1}(\Omega)$ en sous-ensembles ouverts sur lesquels Γ est simple. Les considérations précédentes et les conditions 5) et 6) entraînent que Γ satisfait aux conditions énoncées dans la proposition VI.3.7.

Soient B et B' deux éléments de $\mathrm{Ext}(A,C)$ tels que $\hat{B} = \hat{B}' = Z$. Etant donné la façon dont $\xi(\tilde{B})$ se déduit de $\psi(B)$, on vérifie facilement que $\psi(B) = \psi(B')$ si et seulement si $\xi(\tilde{B}) = \xi(\tilde{B}')$. Ainsi, lorsque $\tilde{B} = \tilde{B}'$, on a $\psi(B) = \psi(B')$. D'autre part, d'après ce qui précède et la proposition VI.3.7, l'application $\tilde{\psi}$ est injective.

Donnons-nous maintenant une suite $(k_r^i)_{r=1,\dots,s_i\,;\; i=1,\dots,n}$ de fonctions k_r^i de $N(q_i)$ dans $\mathbb{N}^*$. Définissons une fonction Γ de $\beta X - X$ dans $\mathcal{M}_d(Y)$ de la façon suivante :

si $x \in \Omega^i$, $x' \in h^{-1}(x) \cap K_r^i$ et $y \in Y$, posons $\Gamma_{x'}(\{y\}) = k_r^i(j)$ s'il existe $j \in N(q_i)$ tel que $g_j^i(x) = y$, et posons $\Gamma_{x'}(\{y\}) = 0$ sinon;

si $x' \in (\beta X - X) - h^{-1}(\Omega)$, posons $\Gamma_{x'} = 0$

En utilisant les conditions 2) et 3) et le lemme VI.2.3 (ii), on montre que $\Gamma \in \mathcal{D}^{\aleph_0}(\beta X - X, Y)$. D'après la proposition VI.2.6, il existe $B \in \mathcal{E}(A,C)$ tel que $\xi(\tilde{B}) = \Gamma$. Le spectre de B est associé à la fonction $x \mapsto \mathrm{Supp}\; \Gamma_x$ (voir IV.2.5), c'est-à-dire à la fonction $x \mapsto f \circ h(x)$. On a donc $\hat{B} = Z$; de plus, on a évidemment $\psi(B) = (k_r^i)_{r=1,\dots,s_i\,;\; i=1,\dots,n}$. Ceci prouve que $\tilde{\psi}$ est surjective.

Enfin, la dernière assertion de la proposition se vérifie sans difficulté.

VI.3.9. Nous donnerons des applications de la proposition VI.3.8 à la classification d'extensions ayant un spectre donné (VIII.4, **5 et 6**).

Signalons enfin que les propositions précédentes se généralisent facilement au cas où C est la C^*-algèbre suivante. Pour $n \in \mathbb{N}$, soient H'_n un espace hilbertien séparable (éventuellement nul), et Y_n un espace localement compact. Posons $C_n = \mathcal{C}^\circ(Y_n, \mathcal{LC}(H'_n))$, et prenons pour C le produit restreint (voir [16], 1.9.4) des C^*-algèbres C_n. Le spectre Y de C est la somme topologique des Y_n.

Indiquons par exemple comment se généralise VI.3.4. Soient X un espace localement compact dénombrable à l'infini, H un espace hilbertien de dimension $\aleph_0$, $A = \mathcal{C}^\circ(X, \mathcal{LC}(H))$, et C la C^*-algèbre précédemment décrite. Soit $\Gamma \in \mathfrak{D}_s^{\aleph_0}(\beta X - X, Y)$, déterminé par $((g_j)_{j \in N(q)}, k)$ sur $\Omega = \{x \in \beta X - X \mid \Gamma_x \neq 0\}$. Appelons Θ la trace sur X du filtre des voisinages de Ω dans βX. On suppose que les conditions a), b), c), d) de la proposition VI.3.4 sont réaliseés et, en outre, on fait l'hypothèse suivante :

e) pour tout $j \in N(q)$, il existe n tel que $g_j(\Omega) \subset Y_n$.

Soient B et B' deux éléments de $\mathcal{E}(A,C)$ tels que $\xi(\tilde{B}) = \xi(\tilde{B}') = \Gamma$. Alors $\tilde{B} = \tilde{B}'$.

La démonstration est analogue à celle de la proposition VI.3.4. Indiquons rapidement comment. On démontre un lemme analogue au lemme VI.3.5 qui prouve que B et B' sont semi-équivalentes à une extension ne dépendant que de Γ. Soit γ l'homomorphisme de C dans $\overline{E}^1(A)/A$ associé à B. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $\gamma^n = \gamma|C_n$; on définit, grâce à γ^n, un suite $(P^n_{i,j})_{i,j}$ de champs de projecteurs appartenant à $\Lambda^1(\Omega,A)$, analogue à celle définie dans VI.3.5 (1) grâce à γ. On obtient ainsi une suite $(P^n_{i,j})_{i,j,n}$ de champs de projecteurs, deux à deux orthogonaux, appartenant à $\Lambda^1(\Omega,A)$ et de rang constant. On peut ensuite supposer que les champs $P^n_{i,j}$ sont constants sur Ω, de valeur $R^n_{i,j}$, avec $R^n_{i,j} \in \mathcal{LC}(H)$. Posons $R^n = \sum_{i,j} R^n_{i,j}$ et $H^n = R^n(H)$. On peut alors considérer γ^n comme un homomorphisme de C_n dans $\mathcal{C}(\beta X - X, \mathcal{LC}(H^n))$. On travaille avec γ^n comme on le fait avec γ dans la démonstration du lemme VI.3.5. Enfin, on rassemble les résultats obtenus pour chaque γ^n, comme dans la partie (5) de la démonstration de VI.3.5.

Remarquons que l'hypothèse e) précédente est vérifiée si Ω est connexe. On en déduit que la proposition VI.3.8 est valable avec cette nouvelle C^*-algèbre C, sans modification d'hypothèse (en prenant $Y = \hat{C}$ et en modifiant convenablement la dernière partie de l'énoncé VI.3.8 (iii)).

CHAPITRE VII

D'autres extensions de C^*-algèbres

VII.1. Généralités.

VII.1.1. Dans le chapitre VII, on se donne un espace localement compact W, un point w non isolé dans W, et on prend $X = W - \{w\}$. On note Θ la trace sur X du filtre des voisinages de w dans W, et Φ l'ensemble des germes suivant Θ des fonctions continues bornées de X dans $]0,+\infty[$. Remarquons que chaque élément de Φ possède un représentant défini sur tout X, et c'est toujours un tel représentant que l'on choisira. On note Φ_o l'ensemble des $\varphi \in \Phi$ tels que $\lim_\Theta \varphi = 0$. On pose $X_1 = \dot{W}$; si W est compact, $X_1 - X$ est constitué du seul point w, et si W n'est pas compact, $X_1 - X$ contient w et le point à l'infini w_∞ de W. Dans ce dernier cas, les ensembles $h^{-1}_{X,X_1}(w)$ et $h^{-1}_{X,X_1}(w_\infty)$ forment une partition de $\beta X - X$ en deux compacts qu'on notera respectivement K et K_∞. Si W est compact, on posera $K_\infty = \emptyset$.

Soient A une C^*-algèbre de spectre X, et C une C^*-algèbre. Appelons f la fonction de $X_1 - X$ dans $\mathcal{F}(\hat{C})$ telle que $f(w) = \hat{C}$ et, si W n'est pas compact, $f(w_\infty) = \emptyset$. Notons Z l'extension de X par $\hat{C}$ associée à f ; les fermés de Z sont les ensembles $F_1 \cup F_2$, où F_1 est un fermé de X et F_2 un fermé de $\hat{C}$, tels que $F_2 = \hat{C}$ si w est adhérent à F_1 dans W (voir II.9). Le filtre Θ converge vers chacune de ses valeurs d'adhérence dans Z, et $\hat{C}$ est l'ensemble de ses limites. Dans le chapitre VII, nous nous intéressons aux extensions B de A par C telles que $\hat{B} = Z$. Nous notons $\mathcal{G}_W(A,C)$ leur ensemble. On a évidemment $\mathcal{G}_W(A,C) \subset \mathcal{G}(A,C)$. Soit $B \in \mathcal{G}(A,C)$; remarquons que $B \in \mathcal{G}_W(A,C)$ si et seulement si $\lim_{t,\Theta} \|b(t)\| = \sup_{t\in\hat{C}} \|b(t)\|$ pour tout $b \in B$, d'après le corollaire I.1.8.b).

VII.1.2. Nous allons voir qu'étudier les éléments de $\mathcal{G}_W(A,C)$ revient à étudier certains champs continus de C^*-algèbres sur W.

LEMME. <u>Soit $\mathcal{A}$ le champ continu de C^*-algèbres défini par A sur X. Soit Σ l'ensemble des champs continus $\mathcal{E}$ de C^*-algèbres sur W tels que $\mathcal{E}|X = \mathcal{A}$, et de fibre C en w. Si $\mathcal{E} \in \Sigma$, la C^*-algèbre B définie par $\mathcal{E}$ appartient à $\mathcal{G}_W(A,C)$. L'application $\mathcal{E} \longmapsto B$ est une bijection de Σ sur $\mathcal{G}_W(A,C)$.</u>

On a $A = \{b \in B \mid b(w) = 0\}$, et C s'identifie canoniquement au quotient de B par A. D'autre part, pour tout $b \in B$, on a $b|X \in L(A)$ et

$$\lim_{t,\Theta}\|b(t)\| = \|b(w)\| = \sup_{t\in\hat{C}}\|b(t)\| .$$

Il en résulte que $B \in \mathcal{S}_W(A,C)$. La deuxième assertion du lemme se vérifie aussi facilement.

VII.1.3. Soient Y un espace localement compact, H' un espace hilbertien, $C = \mathcal{C}^\circ(Y, \mathcal{LC}(H'))$ et $C_1 = \mathcal{C}^\circ(Y)$. Remarquons que si $\mathcal{S}_W(A,C) \neq \emptyset$ on a $\mathcal{S}_W(A,C_1) \neq \emptyset$. En effet, soit p une fonction constante sur Y dont la valeur est un projecteur de rang 1 appartenant à $\mathcal{LC}(H')$. Alors C_1 s'indentifie canoniquement à la sous-C^*-algèbre pCp de C . Soit $B \in \mathcal{S}_W(A,C)$, associée à un homomorphisme γ de C dans $L(A)/A$. L'extension B_1 de A par C_1 associée à $\gamma|C_1$ appartient à $\mathcal{S}_W(A,C_1)$.

VII.1.4. PROPOSITION. <u>Soient</u> W <u>un espace localement compact,</u> w <u>un point non isolé de</u> W , <u>et</u> $X = W - \{w\}$. <u>Soient</u> Y <u>un espace localement compact à base dénombrable,</u> H' <u>un espace hilbertien,</u> $C = \mathcal{C}^\circ(Y, \mathcal{LC}(H'))$, <u>et</u> A <u>une</u> C^*<u>-algèbre à trace continue telle que</u> $\hat{A} = X$. <u>On suppose qu'il existe un filtre</u> Θ' <u>plus fin que</u> Θ <u>dont une base est formée de parties connexes. Appelons</u> I <u>l'ensemble des points isolés de</u> Y <u>et posons</u> $F = Y - I$. <u>Pour que</u> $\mathcal{S}_W(A,C)$ <u>ne soit pas vide, il est nécéssaire que</u> $\ddot{F}$ <u>soit connexe, c'est à dire que</u> F <u>ne contienne pas de partie compacte, ouverte dans</u> F , <u>non vide</u> .

D'après VII.1.3, on peut supposer que $\dim H' = 1$. Soit $B \in \mathcal{S}_W(A,C)$, associée à un homomorphisme γ de C dans $L(A)/A$. Supposons que F contienne une partie compacte non vide E , ouverte dans F . On en déduit facilement l'existence, dans Y , d'une partie compacte ouverte non vide ayant un point non isolé. En utilisant la métrisabilité de Y , on peut alors construire une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\circ(Y)$ telle que $\varphi(Y)$ soit une partie non discrète de $\{0\} \cup [1/2,1]$. Soit $m \in L(A)^+$ tel que $\Pi(m) = \gamma(\varphi)$, et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite décroissante des fonctions propres de $t \longmapsto m(t)$ sur X . D'après le corollaire I.1.6, on a $\lim_{t,\Theta'} Sp'm(t) = Sp'\varphi$ dans $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$ muni de la topologie fellienne. Alors, d'après le lemme I.3.5, $\lim_{t,\Theta'} f_n(t)$ existe pout tout $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $a_n = \lim_{t,\Theta'} f_n(t)$ et $\alpha = \inf_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$; on a $Sp'\varphi = [0,\alpha] \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{a_n\})$, toujours d'après le lemme I.3.5. Ceci est en contradiction avec le choix de φ .

VII.1.5. PROPOSITION. <u>Conservons les notations de la proposition VII.1.4.</u> <u>Supposons que</u> Θ <u>a une base formée de parties connexes et que</u> $F \neq \emptyset$. <u>Pour que</u> $\mathcal{S}_W(A,C)$ <u>ne soit pas vide il est nécessaire que</u> Θ <u>ait une base dénombrable</u>.

Soit $B \in \mathcal{S}_W(A,C)$, associée à un homomorphisme γ de C dans $L(A)/A$. En utilisant la métrisabilité de Y , on peut facilement construire une fonction continue φ de Y dans $[0,1]$, nulle à l'infini, telle que 1 soit un point non isolé de $\varphi(Y)$. Considérons, comme dans la démonstration de la proposition VII.1.4, un élément m de $L(A)^+$ tel que $\Pi(m) = \gamma(\varphi)$, la suite décroissante $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de ses fonctions propres sur X, les réels $a_n = \lim_{t,\Theta} f_n(t)$, et $\alpha = \inf_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$. On a

$$Sp'\varphi = [0,\alpha] \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{a_n\}) ,$$

d'où $\alpha = 1$ puisque 1 est un point non isolé de $Sp'\varphi$. Il en résulte que $\lim_{t,\Theta} f_n(t) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Posons

$$V_{n,p} = \{x \in X \mid f_n(t) \geqslant 1 - 1/p\} ;$$

on a $\bigcap_{(n,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} V_{n,p} = \emptyset$, car en un point de l'intersection on devrait avoir $f_n(t) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui est absurde. Donc, tout voisinage compact de w contient au moins un $V_{n,p}$, ce qui achève la démonstration puisqu'on a évidemment $V_{n,p} \in \Theta$.

VII.1.6. Soient W un espace localement compact, w un point non isolé de W, et $X = W - \{w\}$. Soient A une C^*-algèbre telle que $\hat{A} = X$, et C une C^*-algèbre. Dans la suite, nous nous intéressons uniquement aux éléments B de $\mathcal{G}_W(A,C)$ qui possèdent la propriété suivante. Il existe $\varphi \in \Phi$ tel que :

(i) B soit bien φ-encadrée suivant Θ ;

(ii) $\lim_{t,\Theta}\varphi(t).\mathrm{Tr}\ b(t)$ existe pour tout $b \in \mathcal{K}(B)^+$.

Nous noterons $\mathcal{B}_W(A,C)$ l'ensemble de ces extensions. En général on a $\mathcal{B}_W(A,C) \subsetneq \mathcal{G}_W(A,C)$ (voir par exemple VIII.1).

VII.1.7. LEMME. <u>Soient</u> W <u>un espace localement compact,</u> w <u>un point non isolé de</u> W, <u>et</u> $X = W - \{w\}$. <u>Soient</u> A <u>une</u> C^*-<u>algèbre de spectre</u> X, C <u>une</u> C^*-<u>algèbre, et</u> $B \in \mathcal{B}_W(A,C)$. <u>Notons</u> P <u>la surjection canonique de</u> B <u>sur</u> C.

(i) <u>Soit</u> $\varphi \in \Phi$ <u>tel que les conditions</u> (i) <u>et</u> (ii) <u>de VII.1.6 soient réalisées. Il existe une seule trace</u> $T \in \mathcal{T}(C)$ <u>telle que</u>

$$\lim_{t,\Theta}\varphi(t).\mathrm{Tr}\ b(t) = T(P(b))$$

<u>pour tout</u> $b \in \mathcal{K}(B)$, <u>et on a</u> $\mathrm{Supp}\ T = \hat{C}$. <u>On dira que</u> (φ,T) <u>est associé à</u> B.

(ii) <u>Soit</u> $(\varphi',T') \in \Phi \times \mathcal{T}(C)$ <u>un autre couple associé à</u> B. <u>Il existe</u> $r \in]0,+\infty[$ <u>tel que</u> $\lim_{t,\Theta}\varphi'(t)/\varphi(t) = r$ <u>et</u> $T' = rT$.

L'assertion (i) résulte des propositions I.2.5 et I.2.13.

(ii) Soit $b \in \mathcal{K}(B)^+$ tel que $P(b) \neq 0$. On a

$$\lim_{t,\Theta}\varphi'(t).\mathrm{Tr}\ b(t) = \lim_{t,\Theta}(\varphi'(t)/\varphi(t))\varphi(t).\mathrm{Tr}\ b(t) ;$$

comme $\lim_{t,\Theta}\varphi(t).\mathrm{Tr}\ b(t)$ et $\lim_{t,\Theta}\varphi'(t).\mathrm{Tr}\ b(t)$ existent et appartiennent à $]0,+\infty[$, on en déduit l'existence de $\lim_{t,\Theta}\varphi'(t)/\varphi(t)$ dans $]0,+\infty[$ La deuxième assertion en résulte immédiatement.

VII.1.8. Soit C une C^*-algèbre; on notera $\mathscr{E}^{\hat{C}}(C)$ l'ensemble des $T \in \mathscr{E}(C)$ tels que $\mathrm{Supp}\, T = \hat{C}$ (De même, si Y est un espace localement compact, on notera $\mathscr{M}^Y(Y)$ l'ensemble des $T \in \mathscr{M}(Y)$ tels que $\mathrm{Supp}\, T = Y$)

Sur $\Phi \times \mathscr{E}^{\hat{C}}(C)$, définissons la relation d'équivalence $(\varphi,T)\mathscr{R}(\varphi',T')$ s'il existe $r \in]0,+\infty[$ tel que $\lim_\Theta \varphi'/\varphi = r$ et $T' = rT$. On notera $\Phi \tilde{\times} \mathscr{E}^{\hat{C}}(C)$ (resp. $\Phi_0 \tilde{\times} \mathscr{E}^{\hat{C}}(C)$) l'ensemble des classes des éléments de $\Phi \times \mathscr{E}^{\hat{C}}(C)$ (resp. $\Phi_0 \times \mathscr{E}^{\hat{C}}(C)$) . On adoptera les conventions correspondantes pour $\Phi \tilde{\times} \mathscr{M}^Y(Y)$ et $\Phi_0 \tilde{\times} \mathscr{M}^Y(Y)$.

LEMME. <u>Soient</u> W <u>un espace localement compact</u>, w <u>un point non isolé de</u> W , <u>et</u> $X = W - \{w\}$. <u>Soient</u> H <u>un espace hilbertien</u>, $A = \mathscr{C}^\circ(X, \mathscr{L}\mathscr{C}(H))$, <u>et</u> C <u>une</u> C^*-<u>algèbre. Soient</u> B <u>et</u> B' <u>deux éléments semi-équivalents de</u> $\mathscr{B}_W(A,C)$. <u>Soient</u> (φ,T) <u>et</u> (φ',T') <u>deux éléments de</u> $\Phi \times \mathscr{E}^{\hat{C}}(C)$ <u>associés à</u> B <u>et</u> B' <u>respectivement. Alors</u> (φ,T) <u>et</u> (φ',T') <u>sont équivalents dans</u> $\Phi \times \mathscr{E}^{\hat{C}}(C)$.

La démonstration se fait sans difficulté.

VII.1.9. Conservons les notations du lemme VII.1.8. On notera $\mathscr{B}_W(A,C)^\sim$ l'ensemble des $\tilde{B}$ avec $B \in \mathscr{B}_W(A,C)$, et σ l'application de $\mathscr{B}_W(A,C)^\sim$ dans $\Phi \tilde{\times} \mathscr{E}^{\hat{C}}(C)$ qui résulte du lemme VII.1.8.

VII.1.10. EXEMPLE. Soit H un espace hilbertien de dimension $\aleph_0$. Soient $A = \mathscr{C}^\circ(\mathbb{R} - \{0\}, \mathscr{L}\mathscr{C}(H))$ et $C = \mathscr{C}^\circ(\mathbb{R}^2)$. Appelons Γ_3 le groupe de Lie nilpotent réel simplement connexe non commutatif de dimension 3; notons $\mathscr{C}^*(\Gamma_3)$ sa C^*-algèbre. Posons $W = \mathbb{R}$ et $w = 0 \in \mathbb{R}$. Alors $\mathscr{C}^*(\Gamma_3)$ est canoniquement isomorphe à un élément B de $\mathscr{B}_W(A,C)$; l'image de $\tilde{B}$ par σ est la classe de (φ,T) , où φ est la fonction $t \mapsto |t|$ de $\mathbb{R} - \{0\}$ dans $]0,+\infty[$ et $2\pi T$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ (voir [32],6.3.1 et 6.3.2).

VII.2. <u>Extensions scindées suivant</u> Θ .

VII.2.1. DEFINITION. <u>Soient</u> W <u>un espace localement compact</u>, w <u>un point non isolé de</u> W , <u>et</u> $X = W - \{w\}$. <u>Soient</u> A <u>une</u> C^*-<u>algèbre de spectre</u> X , <u>et</u> C <u>une</u> C^*-<u>algèbre. Soit</u> γ <u>un homomorphisme de</u> C <u>dans</u> $L(A)/A$ <u>tel que</u> $\gamma(c)|K_\infty = 0$ <u>pour tout</u> $c \in C$. <u>On dira que l'extension</u> B <u>de</u> A <u>par</u> C <u>associée à</u> γ <u>est scindée suivant</u> Θ <u>s'il existe un homomorphisme</u> γ' <u>de</u> C <u>dans</u> $L(A)$ <u>tel que</u> $\gamma'(c)|K = \gamma(c)|K$ <u>pour tout</u> $c \in C$ <u>On dira que</u> B <u>est associée à</u> γ' .

Remarquons que si W est compact (d'où $K_\infty = \emptyset$), les extensions scindées suivant Θ sont scindées au sens de ([3], déf. 5.2).

VII.2.2. LEMME. Soient W un espace localement compact, w un point non isolé de W, et $X = W - \{w\}$. Soient A une C^*-algèbre de spectre X, C une C^*-algèbre et $B \in \mathcal{G}(A,C)$ une extension scindée suivant Θ associée à un homomorphisme γ' de C dans $L(A)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $B \in \mathcal{G}_W(A,C)$;

(ii) $\lim_{t,\Theta} \|\gamma'(c)(t)\| = \|c\|$ pour tout $c \in C$;

(iii) $\lim_{t,\Theta} \gamma'(C)^{\wedge} = \hat{C}$ dans $\mathcal{F}(\hat{C})$ muni de la topologie fellienne.

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) : résulte du corollaire I.1.4.

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) : soit $b = (m,c) \in B$. On a $m(x) = \gamma(c)(x) = \gamma'(c)(x)$ pour tout $x \in K$. Il en résulte que :

$$\begin{aligned} & \lim_{t,\Theta} \|\gamma'(c)(t)\| = \|c\| \quad \text{pour tout } c \in C \\ \Longleftrightarrow\ & \lim_{t,\Theta} \|b(t)\| = \sup_{t \in \hat{C}} \|b(t)\| \quad \text{pour tout } b \in B, \\ \Longleftrightarrow\ & B \in \mathcal{G}_W(A,C). \end{aligned}$$

VII.2.3. PROPOSITION. Soient W un espace localement compact, w un point non isolé de W, et $X = W - \{w\}$. Soient Y un espace localement compact à base dénombrable, H et H' deux espaces hilbertiens, $A = \mathcal{C}^\circ(X, \mathcal{LC}(H))$ et $C = \mathcal{C}^\circ(Y, \mathcal{LC}(H'))$. Notons I l'ensemble des points isolés de Y et posons $F = Y - I$. On fait les hypothèses suivantes : Θ a une base dénombrable, $\ddot{F}$ est connexe par arcs, $[\dim H : \dim H'] \geq \aleph_0$. Alors, $\mathcal{G}_W(A,C)$ contient une extension scindée suivant Θ.

Nous allons d'abord montrer qu'il existe $\Gamma \in \mathcal{D}^{\aleph_0}([0,+\infty[,Y)$ tel que $\lim_{t \to +\infty} \mathrm{Supp}\,\Gamma_t = Y$ dans $\mathcal{F}(Y)$ muni de la topologie fellienne. Notons y_∞ le point à l'infini de Y. Remarquons que F est fermé dans Y, et donc que $\ddot{F}$ s'identifie canoniquement au sous-espace $F \cup \{y_\infty\}$ de $\ddot{Y}$. Nous supposerons que $F \neq \emptyset$, d'où $\dot{F} = \ddot{F}$. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dense dans F. Pour tout n, prenons une fonction continue f_n de $[0,+\infty[$ dans $\dot{F}$ telle que $f_n(t) = y_\infty$ si $t \leq n$ et $f_n(t) = a_n$ si $t \geq n+1$. Soit $(y_n)_{n \in N(q)}$ (avec $q \leq \aleph_0$) la suite des points de I. Si $n \in N(q)$, appelons f'_n la fonction constante sur $[0,+\infty[$ de valeur y_n. Réunissons les éléments des suites $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f'_n)_{n \in N(q)}$ en une même suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Cette suite vérifie les conditions a) et b) du lemme VI.2.3 (avec $p = \aleph_0$) et elle détermine donc un élément Γ de $\mathcal{D}^{\aleph_0}([0,+\infty[,Y)$. On a évidemment $\lim_{t \to \infty} \mathrm{Supp}\,\Gamma_t = Y$.

Puisque w a une base dénombrable de voisinages compacts, on construit sans difficulté une fonction continue f de X dans $[0,+\infty[$ telle que $\lim_\Theta f = +\infty$. Posons $\Gamma' = \Gamma \circ f$. On a évidemment $\Gamma' \in \mathcal{D}^{\aleph_0}(X,Y)$ et $\lim_{t,\Theta} \mathrm{Supp}\,\Gamma'_t = Y$. Soit γ' un homomorphisme de C dans $L(A) = \mathcal{C}^b(X, \mathcal{LC}(H))$ construit à partir de Γ' comme dans le lemme VI.2.4. Notons B l'extension scindée suivant Θ associée à γ'. Comme

$\gamma'(C)(t)^{\wedge} = \mathrm{Supp}\ \Gamma_t$ pour tout $t \in X$, on a $\lim_{t,\Theta} \gamma'(C)(t)^{\wedge} = Y$, d'où $B \in \mathcal{S}_W(A,C)$ d'après le lemme VII.2.2.

VII.2.4. Conservons les notations de VII.2.1. On notera $\mathcal{BS}c_W(A,C)$ l'ensemble des extensions scindées suivant Θ qui appartiennent à $\mathcal{B}_W(A,C)$. Si de plus $A = \mathcal{C}^\circ(X, \mathcal{LC}(H))$, on notera $\mathcal{BS}c_W(A,C)^\sim$ l'ensemble des $\tilde{B}$ avec $B \in \mathcal{BS}c_W(A,C)$.

VII.2.5. LEMME. Soient W un espace localement compact, w un point non isolé de W, et $X = W - \{w\}$. Soient A une C^*-algèbre de spectre X et C une C^*-algèbre. Soient γ' un homomorphisme de C dans $L(A)$, et $B \in \mathcal{S}(A,C)$ l'extension scindée suivant Θ associée à γ'. Pour que B appartienne à $\mathcal{BS}c_W(A,C)$ il faut et il suffit qu'il existe $(\varphi,T) \in \Phi \times \mathcal{T}^{\hat{C}}(C)$ tel que $\lim_{t,\Theta} \varphi(t).\mathrm{Tr}\ \gamma'(c)(t) = T(c)$ pour tout $c \in \mathcal{K}(C)^+$. De plus (φ,T) est associé à B.

La démonstration ne présente pas de difficulté et nous l'omettrons.

VII.3. Surjectivité de σ.

VII.3.1. LEMME. Soient W un espace localement compact, w un point non isolé de W, et $X = W - \{w\}$. Soient A une C^*-algèbre telle que $\hat{A} = X$, et C une C^*-algèbre. Soit $B \in \mathcal{B}_W(A,C)$, et prenons dans $\Phi \times \mathcal{T}^{\hat{C}}(C)$ un élément (φ,T) associé à B. Supposons que $\lim\sup_\Theta \varphi > 0$; alors $\hat{C}$ est discret.

Soit $x \in K$ tel que $\lim_{\Theta_x} \varphi > 0$. Alors B est encadrée suivant Θ_x et d'après la proposition I.2.24, l'ensemble $\hat{C}$ des limites de Θ_x dans $\hat{B}$ est discret.

VII.3.2. PROPOSITION. Soient W un espace localement compact, w un point non isolé de W, et $X = W - \{w\}$. Soient Y un espace localement compact à base dénombrable, H' un espace hilbertien, $C = \mathcal{C}^\circ(Y, \mathcal{LC}(H'))$, et A une C^*-algèbre à trace continue de spectre X. Soient $B \in \mathcal{B}_W(A,C)$, et prenons dans $\Phi \times \mathcal{M}^Y(Y)$ un élément (φ,ν) associé à B. On suppose que Θ a une base formée de parties connexes. Alors on a nécessairement l'une ou l'autre des deux situations suivantes :

Y est discret et $\lim_\Theta \varphi$ existe dans $]0,+\infty[$;
$\ddot{Y}$ est connexe et $\lim_\Theta \varphi = 0$.

Supposons que $\lim\sup_\Theta \varphi > 0$. D'après le lemme VII.3.1, l'espace Y est discret. Il résulte alors de la proposition I.3.6 que B est encadré suivant Θ, et que $\lim_{t,\Theta} \mathrm{Tr}\ b(t)$ existe pour tout $b \in B$ encadré suivant Θ. On déduit alors du lemme VII.1.7.(ii) que $\lim_\Theta \varphi$ existe et appartient à $]0,+\infty[$.

Supposons que $\lim_\Theta \varphi = 0$. D'après la proposition VII.1.4, il suffit de prouver que Y n'a pas de point isolé. Supposons au contraire que Y contienne un point isolé; alors C possède un projecteur c non nul. Prenons $b \in B^+$ tel que c soit l'image canonique de b dans C. Appelons $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite décroissante des fonctions propres de $t \longmapsto b(t)$ sur X. D'après le corollaire I.1.6 et le lemme I.3.5, $\lim_\Theta f_n$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De plus, si $a_n = \lim_\Theta f_n$ et $\alpha = \inf_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$, on a

$$\mathrm{Sp}'c = [0,\alpha] \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{a_n\}) .$$

Or $\mathrm{Sp}'c = \{0\} \cup \{1\}$; on en déduit l'existence de j_0 tel que, si $j > j_0$, on ait $\lim_\Theta f_j = 0$. Il en résulte que $g_\varepsilon(b)$ est encadré suivant Θ pour tout $\varepsilon > 0$. Ainsi on a $\lim_{t,\Theta} \varphi(t).\mathrm{rg}\, g_\varepsilon(b) = 0$ et

$$\sup_{y\in Y} \|g_\varepsilon(b)(y)\| = \sup_{y\in Y} \|g_\varepsilon(c)(y)\| \neq 0$$

pour tout $\varepsilon \in]0,1/2]$, ce qui est absurde puisque B est bien φ-encadrée suivant Θ.

VII.3.3. LEMME. <u>Soient</u> W <u>un espace localement compact</u>, w <u>un point non isolé de</u> W, <u>et</u> $X = W - \{w\}$. <u>Soient</u> Y <u>un espace localement compact</u>, H <u>et</u> H' <u>deux espaces hilbertiens</u>, $A = \mathcal{C}°(X, \mathcal{L}\mathcal{C}(H))$ <u>et</u> $C = \mathcal{C}°(Y, \mathcal{L}\mathcal{C}(H'))$. <u>Posons</u> $p = [\dim H : \dim H']$. <u>Supposons l'existence de</u> $\Gamma \in \mathcal{D}^p(X,Y)$, <u>de</u> $\varphi \in \Phi$, <u>et de</u> $\nu \in \mathcal{M}^Y(Y)$ <u>tels que</u> $\lim_{t,\Theta} \varphi(t)\Gamma_t = \nu$ <u>dans</u> $\mathcal{M}(Y)$. <u>Il existe</u> $B \in \mathcal{B}\mathcal{S}c_W(A,C)$ <u>tel que</u> $\sigma(\tilde{B})$ <u>soit la classe de</u> (φ,ν).

Soit $(f_i)_{i\in N(q)}$ une famille de fonctions continues de X dans $\ddot{Y}$, avec $q \leq p$, qui détermine Γ. Soient γ' l'homomorphisme de C dans $L(A) = \mathcal{C}^b(X, \mathcal{L}\mathcal{C}(H))$ associé à $(f_i)_{i\in N(q)}$ (voir VI.2.5), et B l'extension scindée suivant Θ associée à γ' (voir VII.2.1). Pour tout $c \in \mathcal{K}(C)^+$, notons h_c la fonction $y \longmapsto \mathrm{Tr}\, c(y)$ définie sur Y. On a $h_c \in \mathcal{K}(Y)^+$, et $\mathrm{Tr}\, \gamma'(c)(t) = \Gamma_t(h_c)$ pour tout $t \in X$. Il en résulte que

$$\lim_{t,\Theta} \varphi(t).\mathrm{Tr}\, \gamma'(c)(t) = \int_Y \mathrm{Tr}\, c(y).d\nu(y)$$

pour tout $c \in \mathcal{K}(C)^+$. Il suffit maintenant d'appliquer le lemme VII.2.5.

VII.3.4. PROPOSITION. <u>Soient</u> W <u>un espace localement compact</u>, w <u>un point non isolé de</u> W, <u>et</u> $X = W - \{w\}$. <u>Soit</u> Y <u>un espace localement compact tel que</u> $\ddot{Y}$ <u>soit métrisable, connexe et localement connexe. Soient</u> H <u>et</u> H' <u>deux espaces hilbertiens tels que</u> $[\dim H : \dim H'] \geq \aleph_0$. <u>Soient</u> $A = \mathcal{C}°(X, \mathcal{L}\mathcal{C}(H))$ <u>et</u> $C = \mathcal{C}°(Y, \mathcal{L}\mathcal{C}(H'))$. <u>On a</u>

$$\sigma(\mathcal{B}\mathcal{S}c_W(A,C)^\sim) = \sigma(\mathcal{B}_W(A,C)^\sim) = \Phi_0 \tilde{\times} \mathcal{M}^Y(Y) .$$

D'après le théorème de Mazurkiewicz-Moore (voir [25], th. 1, p. 184), $\ddot{Y}$ est localement connexe par arcs et connexe par arcs. On supposera $Y \neq \emptyset$ d'où $\dot{Y} = \ddot{Y}$.

Comme Y n'est pas discret, on a $\sigma(\mathcal{B}_W(A,C)^\sim) \subset \Phi_0 \tilde{\times} \mathcal{M}^Y(Y)$ d'après le lemme VII.3.1.

Donnons-nous $(\varphi,\nu) \in \Phi_\circ \times \mathcal{M}^Y(Y)$; grâce au lemme VII.3.3, il suffit de prouver qu'il existe $x \mapsto \nu_x$ appartenant à $\mathcal{D}^{\mathcal{K}_\circ}(X,Y)$ tel que $\lim_{x,\Theta} \varphi(x)\nu_x = \nu$. Remarquons que si $\Phi_\circ$ n'est pas vide, Θ a nécessairement une base dénombrable.

Donnons-nous une distance d sur $\dot{Y}$ compatible avec sa topologie; choisissons une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'ouverts relativement compacts dans Y, et un système fondamental $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de voisinages connexes par arcs du point à l'infini y_∞ de Y, tels que $\dot{Y} - W_n \subset K_n \subset K_{n+1}$ et $W_{n+1} \subset W_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Nous allons d'abord construire une suite $(\mu_n'')_{n\in\mathbb{N}^*}$ de mesures à support fini qui appartiennent à $\mathcal{M}_d(Y)$ et sont telles que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\mu_n'' = \nu \ .$$

Notons que l'existence d'une telle suite reste vraie pour tout espace Y à base dénombrable et tout $\nu \in \mathcal{M}(Y)$. En effet, on observera qu'on peut faire une construction analogue à celle qui suit en utilisant seulement le fait que Y est à base dénombrable. Nous nous imposons ici des conditions techniques (voir en particulier (β), (γ'), (δ) ci-dessous) qui n'interviendront que dans les étapes suivantes de la démonstration de VII.3.4.

Il existe dans K_1 des boréliens deux à deux disjoints $V_1^1, \dots, V_{k_1}^1$ qui possèdent les propriétés suivantes :

$\nu(K_1 - \bigcup_{j=1}^{k_1} V_j^1) = 0$;

$\nu(V_j^1) > 0$ pour $j = 1,\dots,k_1$;

pour $j = 1,\dots,k_1$, l'ensemble $\overline{V_j^1}$ est contenu dans un ouvert Ω_j^1, lui-même contenu dans un ensemble connexe par arcs E_j^1 de diamètre $\leqslant 1$.

Indiquons rapidement comment on construit une telle suite. En utilisant la compacité de $\overline{K_1}$ et le fait que Y est localement connexe par arcs, on recouvre K_1 par des ouverts $O_1, \dots, O_n$ tels que chaque $\overline{O_i}$ soit contenu dans un ouvert lui-même contenu dans un ensemble connexe par arcs de diamètre $\leqslant 1$. On considère alors les boréliens

$$P_i = (O_i \cap K_1) - \bigcup_{j>i} (O_j \cap K_1),$$

et on élimine ceux tels que $\nu(P_i) = 0$.

On construit de même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, des boréliens deux à deux disjoints $V_1^n, \dots, V_{k_n}^n$ contenus dans K_n et des ouverts $\Omega_1^n, \dots, \Omega_{k_n}^n$ tels que :

(α) $\nu(K_n - \bigcup_{j=1}^{k_n} V_j^n) = 0$;

(β) $\nu(V_j^n) > 0$ pour $j = 1,\dots,k_n$;

(γ) pour $j = 1,\dots,k_n$, l'ouvert Ω_j^n a un diamètre $\leq 1/n$, et on a $\overline{V_j^n} \subset \Omega_j^n$;

(γ') pour $j = 1,\dots,k_n$, Ω_j^n est contenu dans un ensemble connexe par arcs E_j^n de diamètre $\leq 1/n$;

(δ) pour tous i et j, on a soit $V_i^{n-1} \cap V_j^n = \emptyset$, soit $V_i^{n-1} \supset V_j^n$, et $\nu(V_i^{n-1})$ est égal à la somme des mesures des boréliens V_j^n contenus dans V_i^{n-1}.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $j = 1,\dots,k_n$, posons $\lambda_j^n = \nu(V_j^n)$ et choisissons $y_j^n \in V_j^n$. Appelons μ_n la mesure sur Y, de support $\{y_1^n, \dots, y_{k_n}^n\}$, et telle que $\mu_n(\{y_j^n\}) = \lambda_j^n$ pour $j = 1,\dots,k_n$. On procède de même pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifions que $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \nu$ dans $\mathcal{M}(Y)$. Soient $f \in \mathcal{K}(Y)$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $\operatorname{Supp} f \subset K_p$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue, il existe $n_0 \geq p$ tel que, pour tout $n \geq n_0$ et tous $x, y \in Y$, satisfaisant à $d(x,y) \leq 1/n$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Si $n \geq n_0$, on a donc $|\nu(f) - \mu_n(f)| \leq \varepsilon.\nu(K_p)$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, notons $h(n)$ le plus grand entier tel que $k_{h(n)} \leq \sqrt{n}$, et posons $\mu'_n = \mu_{h(n)}$; on a encore $\lim_{n\to\infty} \mu'_n = \nu$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $j = 1,\dots,k_{h(n)}$, appelons p_j^n l'entier tel que

$$\frac{p_j^n - 1}{n} < \lambda_j^{h(n)} \leq \frac{p_j^n}{n} .$$

Remarquons que, grâce à (β), on a $p_j^n > 0$. Appelons μ''_n le mesure de support $\{y_1^{h(n)}, \dots, y_{k_{h(n)}}^{h(n)}\}$ telle que $\mu''_n(\{y_j^{h(n)}\}) = p_j^n$ pour $j = 1,\dots,k_{h(n)}$ et vérifions que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mu''_n = \nu$. Prenons $f \in \mathcal{K}(Y)$; on a

$$\left|\frac{1}{n}\mu''_n(f) - \mu'_n(f)\right| \leq \|f\| k_{h(n)}/n \leq \|f\|/\sqrt{n} .$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mu''_n(f) = \lim_{n\to\infty} \mu'_n(f) = \nu(f) .$$

(2) Montrons qu'on a $\mu''_n(V_j^{h(n)}) \leq \mu''_{n+1}(V_j^{h(n)})$ pour $j = 1,\dots,k_{h(n)}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

<u>Premier cas</u> : supposons que $h(n+1) = h(n)$. Par définition, on a

$$\mu''_n(V_j^{h(n)}) = \mu''_n(\{y_j^{h(n)}\}) = p_j^n \quad \text{et} \quad \mu''_{n+1}(V_j^{h(n)}) = \mu''_{n+1}(\{y_j^{h(n)}\}) = p_j^{n+1} ,$$

ainsi que

$$\frac{p_j^n - 1}{n} < \lambda_j^{h(n)} \leq \frac{p_j^n}{n} \quad \text{et} \quad \frac{p_j^{n+1} - 1}{n+1} < \lambda_j^{h(n)} \leq \frac{p_j^{n+1}}{n+1}$$

d'où $p_j^n \leq p_j^{n+1}$.

<u>Deuxième cas</u> : supposons que $h(n+1) = h(n) + 1$. Par construction, on a $\nu(V_j^{h(n)}) = \sum_{s\in S} \nu(V_s^{h(n+1)})$, où S est l'ensemble des indices s tels

que $V_s^{h(n+1)} \subset V_j^{h(n)}$. On obtient ainsi l'égalité $\lambda_j^{h(n)} = \sum_{s\in S} \lambda_s^{h(n+1)}$.
Par ailleurs, on a

$$\frac{p_j^n - 1}{n} < \lambda_j^{h(n)} \leqslant \frac{p_j^n}{n}$$

et

$$\frac{p_s^{n+1} - 1}{n+1} < \lambda_s^{h(n+1)} \leqslant \frac{p_s^{n+1}}{n+1} \quad \text{pour tout} \quad s \in S ,$$

d'où

$$\sum_{s\in S} \frac{p_s^{n+1} - 1}{n+1} < \sum_{s\in S} \lambda_s^{h(n+1)} \leqslant \sum_{s\in S} \frac{p_s^{n+1}}{n+1} .$$

On en déduit que

$$\mu_n''(V_j^{h(n)}) = p_j^n \leqslant \sum_{s\in S} p_s^{n+1} = \mu_{n+1}''(V_j^{h(n)}) .$$

(3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous allons intercaler entre μ_n'' et μ_{n+1}'' un certain nombre de mesures de façon que deux mesures consécutives "diffèrent peu". Posons $\mu_{n+1}''(K_{h(n)}) - \mu_n''(K_{h(n)}) = l_n$, et choisissons, dans $\mathcal{M}_d(Y)$, des mesures $\mu_n^o, \mu_n^1, \dots, \mu_n^{l_n} = \mu_{n+1}''$ telles que :

(a) $\mu_n^{i+1}(K_{h(n)}) = \mu_n^i(K_{h(n)}) + 1$ pour $i = 0,\dots,l_n - 1$;

(b) $\mu_n^o(V_j^{h(n)}) = \mu_n''(V_j^{h(n)})$ pour $j = 1,\dots,k_{h(n)}$;

(c) $\mathrm{Supp}\ \mu_n^i \subset \mathrm{Supp}\ \mu_n^{i+1}$ pour $i = 0,\dots,l_n - 1$;

(d) $\mathrm{Supp}\ \mu_n^i \subset K_{h(n)}$ pour $i = 0,\dots,l_n - 1$.

Posons $q_1 = 1$ et $q_p = p + \sum_{j=1}^{p-1} l_j$ si $p \geqslant 2$. Pour $n \geqslant 2$, on appellera ν_n' la mesure μ_p^i, où i et p sont déterminés par

$$q_p < n \leqslant q_{p+1} \quad \text{et} \quad \mu_p^i(K_{h(p)}) - \mu_p''(K_{h(p)}) = n - (q_p + 1) ;$$

on posera $\nu_1' = \mu_1''$. Cela signifie qu'on choisit pour $(\nu_1', \dots, \nu_n', \dots)$ la suite

$$(\mu_1'', \mu_1^o, \dots, \mu_1^{l_1 - 1}, \mu_2'', \dots, \mu_p'', \mu_p^o, \dots, \mu_p^{l_p - 1}, \mu_{p+1}'', \dots) .$$

En particulier, pour $n = q_p$, on a $\nu_n' = \mu_p''$; pour $n = q_p + 1$, on a $\nu_n' = \mu_p^o$, etc...

Posons $r_n = 1/p$ si $q_p \leqslant n < q_{p+1}$, et vérifions que $\lim_{n\to\infty} r_n \nu_n' = \nu$.
Tout d'abord, on a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mu_n^o = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mu_n'' = \nu$ car

$$\mu_n^o(V_j^{h(n)}) = \mu_n''(V_j^{h(n)}) \quad \text{pour} \quad j = 1,\dots,k_{h(n)} \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}^* .$$

Prenons $f \in \mathcal{K}(Y)^+$. Soit un entier n tel que $q_p < n < q_{p+1}$. On a

$$0 \leqslant \frac{1}{p}\, \nu'_n(f) - \frac{1}{p}\, \mu^o_p(f) \leqslant \frac{1}{p}(\mu''_{p+1}(f) - \mu^o_p(f))$$

$$\leqslant (\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1})\mu''_{p+1}(f) + \frac{1}{p+1}\, \mu''_{p+1}(f) - \frac{1}{p}\, \mu^o_p(f)$$

$$\leqslant \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p+1}\, \mu''_{p+1}(f) + \frac{1}{p+1}\, \mu''_{p+1}(f) - \frac{1}{p}\, \mu^o_p(f) .$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} r_n \nu'_n(f) = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\, \mu''_p(f) = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\, \mu^o_p(f) = \nu(f) .$$

(4) Appelons v la fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ qui à $n \in \mathbb{N}^*$ associe l'entier $h(p)$, où p est déterminé par $q_p \leqslant n < q_{p+1}$. Nous noterons $a^n_1, \ldots, a^n_{s_n}$ les points du support de ν'_n, multiplicités comprises. De plus, si n est de la forme q_p, on suppose que $a^n_1, \ldots, a^n_{s'_n}$ sont les points de $K_{v(n-1)} \cap \operatorname{Supp} \nu'_n$, multiplicités comprises.

<u>Premier cas</u> : supposons que $n = q_p$. On a $\nu'_n = \mu''_p$ et $\nu'_{n+1} = \mu^o_p$. Il résulte de (b) que $\nu'_n(V^{v(n)}_j) = \nu'_{n+1}(V^{v(n)}_j)$ pour $j = 1,\ldots,k_{v(n)}$ et, grâce à (d), on a $s_n = s_{n+1}$. Il existe donc une permutation ω_n de $\{1,\ldots,s_n\}$ telle que, pour $i = 1,\ldots,s_n$, celui des ensembles $V^{v(n)}_1, \ldots, V^{v(n)}_{k_{v(n)}}$ qui contient a^n_i contienne aussi $a^{n+1}_{\omega_n(i)}$. Nous poserons $\nu''_n = \nu'_n$ et $t_n = s_n$.

<u>Deuxième cas</u> : supposons que $q_p < n < q_{p+1} - 1$. D'après (a) et (c), on a $\nu'_n(V^{v(n)}_j) = \nu'_{n+1}(V^{v(n)}_j)$ pour tout $j = 1,\ldots,k_{v(n)}$ sauf pour un indice j_o, où $\nu'_n(V^{v(n)}_{j_o}) + 1 = \nu'_{n+1}(V^{v(n)}_{j_o})$. De plus, grâce à (d), on a $s_n + 1 = s_{n+1}$. Soit $a^{n+1}_{i_o} \in \{a^{n+1}_1, \ldots, a^{n+1}_{s_{n+1}}\} \cap V^{v(n)}_{j_o}$. Puisque $\dot{Y}$ est connexe par arcs, on construit facilement un point $a^n_{s_{n+1}}$ appartenant à la frontière de $K_{v(n)}$, et un arc Γ tel que

$$\Gamma(0) = a^n_{s_{n+1}} ,\quad \Gamma(1) = a^{n+1}_{i_o} ,\ \text{et}\ \ \Gamma(t) \in K_{v(n)} \ \text{si}\ \ t \in]0,1] .$$

Comme $\operatorname{Supp} \nu = Y$ par hypothèse, l'égalité $\nu(K_{v(n)} - \bigcup_{j=1}^{k_{v(n)}} V^{v(n)}_j) = 0$ (voir (α) dans (1)) entraîne que

$$K_{v(n)} \subset \overline{\bigcup_{j=1}^{k_{v(n)}} V^{v(n)}_j} \subset \bigcup_{j=1}^{k_{v(n)}} \Omega^{v(n)}_j \subset \bigcup_{j=1}^{k_{v(n)}} E^{v(n)}_j .$$

On a donc $\Gamma([0,1]) \subset \bigcup_{j=1}^{k_{v(n)}} \Omega^{v(n)}_j$. En utilisant l'arc Γ on peut choisir une suite $(\Omega^{v(n)}_{j_o}, \ldots, \Omega^{v(n)}_{j_m})$ d'éléments de $(\Omega^{v(n)}_j)_{j=1,\ldots,k_{v(n)}}$ telle que :

$$a^n_{s_{n+1}} \in \Omega^{v(n)}_{j_m} \subset E^{v(n)}_{j_m} \quad \text{et} \quad a^{n+1}_{i_o} \in \Omega^{v(n)}_{j_o} \subset E^{v(n)}_{j_o} ,$$

$$\Omega_{j_r}^{v(n)} \cap \Omega_{j_{r+1}}^{v(n)} \neq \emptyset \quad \text{pour} \quad r = 0,\dots,m-1 \ .$$

L'entier n étant fixé, il existe donc une bijection δ de

$$\{a_i^n \mid a_i^n \in \bigcup_{r=0}^{m} V_{j_r}^{v(n)}\} \cup \{a_{s_{n+1}}^n\} \quad \text{sur} \quad \{a_i^{n+1} \mid a_i^{n+1} \in \bigcup_{r=0}^{m} V_{j_r}^{v(n)}\}$$

telle que a_i^n et $\delta(a_i^n)$ appartiennent à des ensembles $E_{j_k}^{v(n)}$ et $E_{j_r}^{v(n)}$ avec $E_{j_k}^{v(n)} \cap E_{j_r}^{v(n)} \neq \emptyset$. Finalement, il existe une permutation ω_n de $\{1,\dots,s_{n+1}\}$ telle que, pour $i = 1,\dots,s_{n+1}$, les points a_i^n et $a_{\omega_n(i)}^{n+1}$ appartiennent à un même ensemble connexe par arcs de diamètre $\leqslant 2/v(n)$.

Pour un tel entier n, nous appellerons ν_n'' la mesure de support $\{a_1^n,\dots,a_{s_{n+1}}^n\}$ telle que $\nu_n''(\{a_i^n\}) = \nu_n'(\{a_i^n\})$ si $i = 1,\dots,s_n$ et $\nu_n''(\{a_{s_{n+1}}^n\}) = 1$. De plus, on posera $t_n = s_{n+1}$.

<u>Troisième cas</u> : supposons que $n = q_{p+1} - 1$. On a $\nu_n' = \mu_p^{l_p - 1}$ et $\nu_{n+1}' = \mu_{p+1}''$, et $v(n) = h(p)$. De plus, grâce aux conditions (a) et (d), on a $s_n + 1 = s'_{n+1}$. Comme dans le deuxième cas, on montre l'existence d'un point $a_{s'_{n+1}}^n$ appartenant à la frontière de $K_{v(n)}$ et d'une permutation ω_n de $\{1,\dots,s'_{n+1}\}$ tels que, pour $i = 1,\dots,s'_{n+1}$, les points a_i^n et $a_{\omega_n(i)}^{n+1}$ appartiennent à un même ensemble connexe par arcs de diamètre $\leqslant 2/v(n)$. On définit de même $t_n = s_n + 1 = s'_{n+1}$ et ν_n''.

On a $\lim_{n\to\infty} r_n\nu_n'' = \lim_{n\to\infty} r_n\nu_n' = \nu$, car $\nu_n''(f) = \nu_n'(f)$ pour toute fonction continue f à support dans $K_{v(n)}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous appelons maintenant $b_1^n,\dots,b_{t_n}^n$ les points du support de ν_n'', multiplicités comprises, et nous les supposons rangés de telle sorte que les points b_i^n et b_i^{n+1} appartiennent à un même ensemble connexe par arcs C_i^n de diamètre $\leqslant 2/v(n)$ pour $i = 1,\dots,t_n$, et $b_i^n \notin \overset{\circ}{K}_{v(n-1)}$ pour $i > t_{n-1}$.

(5) Nous allons maintenant construire une fonction $t \mapsto \nu_t''$ appartenant à $\mathcal{D}^{\aleph_0}([1,+\infty[,Y)$ et une fonction continue décroissante ψ de $[1,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ telles que $\lim_{t\to\infty}\psi(t) = 0$ et $\lim_{t\to\infty}\psi(t)\nu_t'' = \nu$. Supposons construite une suite $(g_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions continues de $[1,n]$ dans $\overset{\bullet}{Y}$ telle que :

(i) toutes les fonctions g_i sont constantes de valeur y_∞ sauf un nombre fini d'entre elles;

(ii) $g_i(p) = b_i^p$ pour $i = 1,\dots,t_p$ et $g_i(p) = y_\infty$ si $i > t_p$ $(1 \leqslant p \leqslant n)$;

(iii) $g_i([p,p+1]) \subset C_i^p$ pour $i = 1,\dots,t_p$ et $1 \leqslant p \leqslant n-1$;

(iv) $g_i([p,p+1]) \subset W_{v(p)}$ pour $i > t_p$ et $1 \leqslant p \leqslant n-1$.

Pour $i \leqslant t_n$, considérons une fonction continue f_i définie sur $[n,n+1]$ à valeurs dans C_i^n (connexe par arcs), telle que $f_i(n) = b_i^n$ et $f_i(n+1) = b_i^{n+1}$. Pour $i = t_n + 1, \dots, t_{n+1}$, considérons une fonction continue f_i définie sur $[n,n+1]$ à valeurs dans $W_{v(n)}$ (connexe par arcs), telle que $f_i(n) = y_\infty$ et $f_i(n+1) = b_i^{n+1}$ (remarquer qu'on a $b_i^{n+1} \in \dot{Y} - K_{v(n)} \subset W_{v(n)}$). Enfin, si $i > t_{n+1}$, on prendra f_i constante sur $[n,n+1]$, de valeur y_∞ . Cette suite $(f_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ se raccorde de façon continue à la suite $(g_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, et on définit ainsi une suite de fonctions continues de $[1,n+1]$ dans $\dot{Y}$ prolongeant $(g_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$. On s'assure facilement que la nouvelle suite satisfait encore aux conditions (i), (ii), (iii),et (iv), où on remplace n par $n+1$. On construit ainsi par récurrence une suite $(g_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions continues de $[1,+\infty[$ dans $\dot{Y}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les $g_i|[1,n]$ vérifient les conditions (i), (ii), (iii) et (iv) . Pour tout $t \in [1,+\infty[$, appelons ν_t'' l'élément de $\mathcal{M}_d(Y)$ tel que, si $y \in Y$, $\nu_t''(\{y\})$ soit égal au cardinal de l'ensemble des $i \in \mathbb{N}^*$ satisfaisant à $g_i(t) = y$. Remarquons que, grâce à la condition (ii), on n'a pas d'ambiguïté pour la définition de ν_n'' en chaque $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le lemme VI.2.3.(ii), (et grâce à la condition (i) ci-dessus), la fonction $t \mapsto \nu_t''$ appartient à $\mathcal{D}^{\aleph_0}([1,+\infty[,Y)$.

Si $t \in [n,n+1]$ s'écrit $\beta n + (1-\beta)(n+1)$,posons $\psi(t) = \beta r_n + (1-\beta)r_{n+1}$. Comme la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0 , la fonction ψ est décroissante et tend vers 0 avec $1/t$. Montrons que $\lim_{t\to\infty} \psi(t)\nu_t'' = \nu$. Soit $f \in \mathcal{K}(Y)$, de support F , et donnons-nous $\varepsilon > 0$. Soit $n_\circ$ tel que, si $n \geqslant n_\circ$, on ait $F \cap W_{v(n)} = \emptyset$. D'après (iv), pour $n \geqslant n_\circ$ et $t \in [n,n+1]$, on a

$$\nu_t''(f) = \sum_{i=1}^{t_n} f(g_i(t)) .$$

On a d'autre part

$$\begin{aligned} |\psi(t)\nu_t''(f) - r_n\nu_n''(f)| &\leqslant r_n|\nu_t''(f) - \nu_n''(f)| + |r_{n+1}\nu_t''(f) - r_n\nu_n''(f)| \\ &\leqslant r_n|\nu_t''(f) - \nu_n''(f)| + r_{n+1}|\nu_t''(f) - \nu_{n+1}''(f)| + |r_{n+1}\nu_{n+1}''(f) - r_n\nu_n''(f)| \end{aligned}$$

Par ailleurs, f étant uniformément continue, on peut choisir $n_\circ$ tel que, pour tout $n \geqslant n_\circ$ et tous x et y satisfaisant à $d(x,y) \leqslant 2/v(n)$, on ait $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, appelons F_n l'ensemble des points de Y qui sont à une distance $\leqslant 2/v(n)$ de F . Remarquons que, si $t \in [n,n+1]$ avec $n \geqslant n_\circ$, on a $\nu_t''(F) \leqslant \nu_n''(F_n)$ et $\nu_t''(F) \leqslant \nu_{n+1}''(F_n)$. En effet, pour tout i tel que $g_i(t) \in F$, on a nécessairement $i \leqslant t_n$ d'après (iv), d'où $d(g_i(t),g_i(n)) \leqslant 2/v(n)$ et $d(g_i(t),g_i(n+1)) \leqslant 2/v(n)$ d'après (iii). Il en résulte que $g_i(n)$ et $g_i(n+1)$ appartiennent à F_n . On déduit de ce qui précède que, si $n \geqslant n_\circ$ et $t \in [n,n+1]$ on a

$$|\nu''_t(f) - \nu''_n(f)| \leq \varepsilon(\nu''_t(F) + \nu''_n(F)) \leq 2\varepsilon\nu''_n(Fn)$$

et

$$|\nu''_t(f) - \nu''_{n+1}(f)| \leq 2\varepsilon\nu''_{n+1}(F_n) .$$

De plus, on peut choisir $n_\circ$ assez grand pour que, si $n > n_\circ$, on ait $|r_{n+1}\nu''_{n+1}(f) - r_n\nu''_n(f)| \leq \varepsilon$ et $F_n \subset V$, où V est un voisinage compact de F arbitrairement choisi à l'avance. Il en résulte que, si $n \geq n_\circ$ et $t \in [n,n+1]$, on a

$$|\psi(t)\nu''_t(f) - r_n\nu''_n(f)| \leq 2\varepsilon r_n\nu''_n(V) + 2\varepsilon r_{n+1}\nu''_{n+1}(V) + \varepsilon .$$

Comme la fonction $n \longmapsto r_n\nu''_n(V)$ a une borne supérieure ne dépendant que de V , on en déduit que

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t)\nu''_t(f) = \lim_{n\to\infty} r_n\nu''_n(f) = \nu(f) .$$

(6) Construisons enfin une fonction $x \longmapsto \nu_x$ appartenant à $\mathfrak{D}^{\aleph_\circ}(X,Y)$ et telle que $\lim_{x,\Theta}\varphi(x)\nu_x = \nu$, ce qui achèvera la démonstration. Nous pouvons supposer que $\psi([1,+\infty[) =]0,1]$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, posons

$$n_p = \inf \{t \in [1,+\infty[\mid \psi(t) = 1/p\} .$$

La suite $(n_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et converge vers $+\infty$ avec p Prenons $L \in \Theta$ tel que $L \cup \{w\}$ soit compact. Posons

$$R_p = \{x \in L \mid \varphi(x) \leq 1/p\} \quad \text{et} \quad T_p = \{x \in L \mid \varphi(x) = 1/p\} .$$

Alors, on peut facilement construire une fonction continue l de X dans $[1,+\infty[$ telle que $l|T_p$ soit constante de valeur n_p et $l|R_p - R_{p+1}$ soit à valeurs dans $[n_p , n_{p+1}]$. Posons $\nu_x = \nu''_{l(x)}$ pour $x \in X$; alors $x \longmapsto \nu_x$ appartient à $\mathfrak{D}^{\aleph_\circ}(X,Y)$. Prouvons que $\lim_{x,\Theta} \varphi(x)\nu_x = \nu$. Soit $f \in \mathcal{K}(Y)^+$ et prenons $x \in R_p - R_{p+1}$. On a $\frac{1}{p+1} < \varphi(x) \leq \frac{1}{p}$ et $l(x) \in [n_p , n_{p+1}]$, d'où $\frac{1}{p+1} \leq \psi(l(x)) \leq \frac{1}{p}$. Il en résulte que

$$|(\varphi(x) - \psi(l(x)))\nu''_{l(x)}(f)| \leq \frac{1}{p(p+1)} \nu''_{l(x)}(f) \leq \frac{\psi(l(x))}{p}\nu''_{l(x)}(f) ,$$

et donc que

$$\lim_{x,\Theta} \varphi(x)\nu_x(f) = \lim_{t\to\infty} \psi(t)\nu''_t(f) = \nu(f) .$$

VII.3.5. PROPOSITION. <u>Soient</u> $x = \mathbb{N}$ <u>et</u> $W = \dot{X}$; <u>Soient</u> H <u>et</u> H' <u>deux espaces hilbertiens tels que</u> $[\dim H : \dim H'] \geq \aleph_\circ$. <u>Soient</u> Y <u>un espace localement compact à base dénombrable</u>, $A = \mathscr{C}^\circ(\mathbb{N}, \mathscr{L}\mathscr{C}(H))$, <u>et</u> $C = \mathscr{C}^\circ(Y, \mathscr{L}\mathscr{C}(H'))$. <u>Alors on a</u> $\Phi_\circ \tilde{\times} \mathscr{M}^Y(Y) \subset \sigma(\mathscr{B}\mathscr{S}c_W(A,C)^\sim) \subset \sigma(\mathscr{B}_W(A,C)^\sim)$.

Soit $(\varphi,\nu) \in \Phi_\circ \times \mathscr{M}^Y(Y)$. D'après la partie (1) de la démonstration de la proposition VII.3.4, il existe une suite $(\nu'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de mesures à support fini qui appartiennent à $\mathscr{M}_d(Y)$ et sont telles que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \nu'_n = \nu$. Pour $n \in \mathbb{N}$, choisissons un entier $\psi(n) > 0$ tel que

$|\psi(n) - 1/\varphi(n)| \leqslant 1$ et posons $\nu''_n = \nu'_{\psi(n)}$. On a évidemment $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\psi(n)} \nu''_n = \nu$. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $f \in \mathcal{K}(Y)^+$, on a

$$|1/\psi(n) - \varphi(n)|\nu''_n(f) \leqslant (\varphi(n)/\psi(n))\nu''_n(f)$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(n)\nu''_n(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\psi(n)} \nu''_n(f) = \nu(f) .$$

Comme $n \longmapsto \nu''_n$ appartient évidemment à $\mathcal{D}^{\aleph_0}(\mathbb{N},Y)$, il suffit d'appliquer le lemme VII.3.3 pour achever la démonstration.

VII.3.6. Remarquons que, dans la proposition VII.3.5, on ne peut remplacer X par un espace localement compact quelconque (voir VII.3.2).

VII.3.7. Montrons le résultat suivant que nous avons en partie utilisé pour la démonstration de la proposition III.4.12 (iii).

Soient H un espace hilbertien de dimension infinie, $A = \mathcal{C}^\circ(\mathbb{N},\mathcal{LC}(H))$, $x \in \beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$, et $\varphi \in \Phi_x$ tel que $\lim_{\Theta_x} \varphi = 0$. Soit Y un espace localement compact à base dénombrable. Alors, pour tout espace hilbertien H' tel que $\dim H' \leqslant \dim H$, et pour tout $\nu \in \mathcal{M}^Y(Y)$, il existe une sous-C^*-algèbre D de $\overline{E}^\varphi_x(A)(x)/\overline{Z}^\varphi_x(A)(x)$ et un isomorphisme α de D sur $C = \mathcal{C}^\circ(Y,\mathcal{LC}(H'))$ tels que

$$\dot{T}^\varphi_x(d) = \int_Y \mathrm{Tr}\ \alpha(d)(y).d\nu(y)$$

si $d \in D^+$.

Nous pouvons évidemment supposer que φ se prolonge en une fonction bornée (notée encore φ) de $\mathbb{N}$ dans $]0,+\infty[$. D'après la partie (1) de la démonstration de la proposition VII.3.4, il existe $n \mapsto \nu'_n$ appartenant à $\mathcal{D}^{\aleph_0}(\mathbb{N},Y)$ tel que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \nu'_n = \nu$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, choisissons un entier $\psi(n) > 0$ tel que $|\psi(n) - 1/\varphi(n)| \leqslant 1$, et posons $\nu_n = \nu'_{\psi(n)}$. On a $\lim_{\Theta_x} \psi = +\infty$, d'où

$$\lim_{n,\Theta_x} \varphi(n)\nu_n = \lim_{n,\Theta_x} \frac{1}{\psi(n)} \nu'_{\psi(n)} = \nu .$$

Soit $(f_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\ddot{Y}$ qui détermine $n \mapsto \nu_n$, et soit γ' l'homomorphisme de C dans $\mathcal{C}^b(\mathbb{N},\mathcal{LC}(H)) = L(A)$ associé à $(f_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ (voir VI.2.5). Pour tout $c \in \mathcal{K}(C)$ on a alors

$$\lim_{n,\Theta_x} \varphi(n).\mathrm{Tr}\ \gamma'(c)(n) = \int_Y \mathrm{Tr}\ c(y).d\nu(y) ,$$

d'où il résulte que C est bien φ-encadrée suivant Θ_x (voir I.2.6 et I.2.13). On en déduit (comme dans la proposition IV.2.4 (i)) que $\gamma'(C)(x) \subset (\overline{E}^\varphi(A)(x) - \overline{Z}^\varphi(A)(x)) \cup \{0\}$. Notons δ l'homomorphisme de C dans $\overline{E}^\varphi(A)(x)/\overline{Z}^\varphi(A)(x)$ qui à c associe la classe de $\gamma'(c)(x)$; on a $\dot{T}^\varphi_x(\delta(c)) = \int_Y \mathrm{Tr}\ c(y).d\nu(y)$ pour tout $c \in C^+$. Comme $\gamma'(C)(x)^\wedge = Y$ et puisque $\gamma'(C)(x) \subset (\overline{E}^\varphi(A)(x) - \overline{Z}^\varphi(A)(x)) \cup \{0\}$, l'application δ est une bijection de C sur $\delta(C) = D$. Il suffit maintenant de poser $\alpha = \delta^{-1}$.

VII.4. Injectivité de σ .

VII.4.1. PROPOSITION. *Soit* $C = \mathcal{C}^\circ(]0,1])$ *et notons* $c_\circ$ *l'élément de* C *tel que* $c_\circ(y) = y$ *si* $y \in]0,1]$. *Soient* H *un espace hilbertien de dimension* q , $A = \mathcal{C}^\circ([0,+\infty[, \mathcal{LC}(H))$, *et* γ *un homomorphisme de* C *dans* $L(A)$.

(i) *Il existe un homomorphisme* γ' *de* C *dans* $L(A) = \mathcal{C}^b([0,+\infty[, \mathcal{LC}(H))$ *tel que* $\Pi \circ \gamma' = \gamma$.

(ii) *Notons* $(f_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ *la suite décroissante des fonctions propres de* $\gamma'(c_\circ)$ *sur* $[0,+\infty[$. *Posons* $q' = \inf(\aleph_\circ , q)$. *Il existe un champ continu* $(e_i)_{i \in N(q)}$ *de bases orthonormales de* H *sur* $[0,+\infty[$ *tel que, si* γ'' *est l'homomorphisme de* C *dans* $\mathcal{C}^b([0,+\infty[, \mathcal{LC}(H))$ *défini par*

$$\gamma''(c)(x) = \sum_{i \in N(q')} c(f_i(x)) P e_i(x)$$

pour $x \in [0,+\infty[$ *et* $c \in C$, *on ait* $\Pi \circ \gamma'' = \gamma$.

(i) Soit $l \in L(A)^+$ tel que $\Pi(l) = \gamma(c_\circ)$. Considérons la fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ telle que $g(x) = 0$ si $x < 0$, $g(x) = 1$ si $x \geqslant 1$, et $g(x) = x$ si $x \in [0,1]$. On a $\Pi(g(l)) = g(\Pi(l)) = \gamma(c_\circ)$. D'autre part, on a $\mathrm{Sp}' g(l)(x) \subset [0,1]$ pour $x \in [0,+\infty[$. Posons $l_\circ = g(l)$ et, pour tout $c = \varphi(c_\circ) \in C$ et tout $x \in [0,+\infty[$, posons $\gamma'(c)(x) = \varphi(l_\circ)(x)$. On définit ainsi un homomorphisme γ' de C dans $L(A)$ tel que $\Pi \circ \gamma' = \gamma$.

(ii) Lorsque $q < \aleph_\circ$, les fonctions f_i sont nulles pour $i > q$ et on peut donc se limiter à considérer la suite $(f_i)_{i \in N(q')}$. Pour tout $x \in [0,+\infty[$, posons $f(x) = \mathrm{Sp}'\gamma'(c_\circ)(x) = (\bigcup_{i \in N(q')} \{f_i(x)\}) \cup \{0\}$. D'après le corollaire I.1.6, f est continue de $[0,+\infty[$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ muni de la topologie fellienne.

Soit $x \in [n-1,n]$, et donnons-nous des ouverts relativement compacts $B_1 , \ldots , B_m$ et des compacts $V_1 , \ldots , V_m$ dans $]0,1]$ tels que

$V_i \subset B_i$ pour $i = 1,\ldots,m$;

$f(x) \cap [1/n,1] \subset \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{Int}\, V_i$;

$f(x) \cap (\overline{B}_i - \mathrm{Int}\, V_i) = \emptyset$ pour $i = 1,\ldots,m$;

les parties $B_1 , \ldots , B_m$ sont deux à deux disjointes et de diamètre $\leqslant 1/n$.

Grâce à la semi-continuité supérieure de f , il existe un voisinage v de x tel que :

$$f(t) \cap [1/n,1] \subset \bigcup_{i=1}^{m} \mathrm{Int}\, V_i \quad \text{pour } t \in v ;$$

$$f(t) \cap (B_i - V_i) = \emptyset \quad \text{pour } t \in v \text{ et } i = 1,\ldots,m .$$

Grâce à la compacité de $[n-1,n]$ et à ce qui précède, on peut construire une suite strictement croissante $x_0 = n-1,\ldots, x_p = n$ telle que, pour $i = 0,\ldots, p-1$, il existe des ouverts $B_1^i , \ldots , B_{m_i}^i$ et des compacts

$V_1^i, \ldots, V_{m_i}^i$ de $]0,1]$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$V_j^i \subset B_j^i$ pour $j = 1,\ldots,m_i$;

$f(x) \cap [1/n, n] \subset \bigcup_{j=1}^{m_i} V_j^i$ pour $x \in [x_i, x_{i+1}]$;

$f(x) \cap (B_j^i - V_j^i) = \emptyset$ pour $x \in [x_i, x_{i+1}]$ et $j = 1,\ldots,m_i$;

les parties $B_1^i, \ldots, B_{m_i}^i$ sont deux à deux disjointes et de diamètre $<1/n$.

Grâce à la connexité de $[x_i, x_{i+1}]$, on a $f_r([x_i, x_{i+1}]) \subset V_j^i$ dès qu'il existe $x \in [x_i, x_{i+1}]$ avec $f_r(x) \in V_j^i$.

Pour $j = 1,\ldots,m_i$, soit φ_j une fonction continue de $]0,1]$ dans $[0,1]$, valant 1 sur V_j^i et 0 hors de B_j^i. Alors, si $x \in [x_i, x_{i+1}]$, l'opérateur $\gamma'(\varphi_j)(x)$ est un projecteur qui appartient à $\gamma'(C)(x)$ et sera noté $P_j(x)$. On construit de cette façon des projecteurs deux à deux orthogonaux $P_1, \ldots, P_{m_i}$ appartenant à $\mathcal{C}([x_i, x_{i+1}], \mathcal{LC}(H))$. Posons $k(j) = \operatorname{rg} P_j$, $h(0) = 0$ et $h(j) = \sum_{r=1}^{j} k(r)$; on évidemment

$$k(j) = \operatorname{card}\{r \in N(q') \mid f_r([x_i, x_{i+1}]) \subset V_j^i\} .$$

Supposons par exemple que $r_{h(j-1)+1}, \ldots, r_{h(j)}$ sont les indices r tels que $f_r([x_i, x_{i+1}]) \subset V_j^i$. D'autre part, donnons-nous arbitrairement une base orthonormale $(e_r^{i,i})_{r\in N(q)}$ (resp. $(e_r^{i,i+1})_{r\in N(q)}$) de H qui diagonalise $\gamma'(c_0)(x_i)$ (resp. $\gamma'(c_0)(x_{i+1})$). Un sous-ensemble de cette base forme une base de $P_j(x_i)(H)$ (resp. $P_j(x_{i+1})(H)$), soit, par exemple, $(e^{i,i}_{r_{h(j-1)+s}})_{s=1,\ldots,k(j)}$ (resp. $(e^{i,i+1}_{r_{h(j-1)+s}})_{s=1,\ldots,k(j)}$. Soit alors $(e_{r_{h(j-1)+s}})_{s=1,\ldots,k(j)}$ une suite de fonctions normiquement continues de $[x_i, x_{i+1}]$ dans H telle que :

$(e_{r_{h(j-1)+s}}(x))_{s=1,\ldots,k(j)}$ forme une base orthonormale de $P_j(x)(H)$ pour $x \in [x_i, x_{i+1}]$;

$e_{r_{h(j-1)+s}}(x_i) = e^{i,i}_{r_{h(j-1)+s}}$ pour $s = 1,\ldots,k(j)$;

$e_{r_{h(j-1)+s}}(x_{i+1}) = e^{i,i+1}_{r_{h(j-1)+s}}$ pour $s = 1,\ldots,k(j)$.

On procède de même pour $j = 1,\ldots,m_i$. Appelons N l'ensemble $N(q) - \{r_1, \ldots, r_{h(m_i)}\}$. Il existe (voir [17], prop. 18, si $q \geq \aleph_0$) une suite $(e_r)_{r\in N}$ de fonctions normiquement continues de $[x_i, x_{i+1}]$ dans H telle que :

$(e_r)_{r\in N}$ soit une base orthonormale de $(1 - \sum_{j=1}^{m_i} P_j(x))(H)$ pour $x \in [x_i, x_{i+1}]$;

$e_r(x_i) = e_r^{i,i}$ et $e_r(x_{i+1}) = e_r^{i,i+1}$ pour $r \in N$.

Posons $\delta_i(c)(x) = \sum_{r\in N(q')} c(f_r(x)) P e_r(x)$ pour $x \in [x_i, x_{i+1}]$ et $c \in C$. Alors δ_i est un homomorphisme de C dans $\mathcal{C}([x_i, x_{i+1}], \mathcal{LC}(H))$

(voir lemme VI.2.4). Remarquons qu'on a $\delta_i(\varphi_j)(x) = P_j(x) = \gamma'(\varphi_j(x))$ pour $x \in [x_i , x_{i+1}]$ et $j = 1,\dots,m_i$.

Nous allons indiquer maintenant comment on choisit les bases $(e_r^{i,i})_{r\in N(q)}$ et $(e_r^{i,i+1})_{r\in N(q)}$ utilisées pour la construction de δ_i . Nous prenons pour $(e_r^{0,0})_{r\in N(q)}$ et $(e_r^{0,1})_{r\in N(q)}$ deux bases quelconques qui diagonalisent respectivement $\gamma'(c_\circ)(x_0)$ et $\gamma'(c_\circ)(x_1)$. On construit alors, comme ci-dessus, un homomorphisme δ_0 de C dans $\mathcal{C}([n-1,x_1],\mathcal{L}\mathcal{C}(H))$. On choisit ensuite pour base $(e_r^{1,1})_{r\in N(q)}$ la base $(e_r^{0,1})_{r\in N(q)}$; la base $(e_r^{1,2})_{r\in N(q)}$ est quelconque pourvu, bien entendu, qu'elle diagonalise $\gamma'(c_\circ)(x_2)$. Avec ce choix, on a $\delta_1(c)(x_1) = \delta_0(c)(x_1)$ pour $c \in C$. Ainsi, de proche en proche, on construit convenablement les homomorphismes δ_i de C dans $\mathcal{C}([x_i , x_{i+1}],\mathcal{L}\mathcal{C}(H))$ et, en les recollant, on obtient un homomorphisme γ_n'' de C dans $\mathcal{C}([n-1,n],\mathcal{L}\mathcal{C}(H))$.

Supposons construits de cette façon, pour tout $p \leqslant n-1$, des homomorphismes γ_p'' de C dans $\mathcal{C}([p-1,p],\mathcal{L}\mathcal{C}(H))$ tels qu'il existe un champ continu $(e_r)_{r\in N(q)}$ de bases orthonormales de H sur $[0,n-1]$ avec $\gamma_p''(c)(x) = \sum_{r\in N(q')} c(f_r(x))Pe_r(x)$ pour tous $x \in [p-1,p]$ et $c \in C$. Alors, on construit γ_n'' en prenant pour base $(e_r^{0,0})_{r\in N(q)}$ qui diagonalise $\gamma'(c_\circ)(n-1)$ la base $(e_r(n-1))_{r\in N(q)}$. Ainsi $(e_r)_{r\in N(q)}$ se prolonge en un champ continu, noté encore $(e_r)_{r\in N(q)}$, de bases orthonormales de H sur $[0,n]$ tel qu'on ait $\gamma_p''(c)(x) = \sum_{r\in N(q')} c(f_r(x))Pe_r(x)$ pour tous $x\in[p-1,p]$, $p\leqslant n$ et $c \in C$. De cette façon on construit γ'' de proche en proche

Soit $\varphi \in \mathcal{K}(]0,1])$ et donnons-nous $\varepsilon > 0$. Il existe un entier $n_\circ$ tel que, si $n \geqslant n_\circ$, on ait $\operatorname{Supp}\varphi \subset [1/n,1]$. De plus, on peut choisir $n_\circ$ tel que, pour tous x et y satisfaisant à $|x - y| \leqslant 1/n_\circ$, on ait $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \varepsilon$. Prenons $n \geqslant n_\circ$ et $x \in [x_i , x_{i+1}] \subset [n-1,n]$ (en conservant les notations précédentes). On a

$$\gamma'(\varphi)(x) = \sum_{j=1}^{m_i} \gamma'(\varphi_j\varphi)(x) \quad \text{et} \quad \gamma''(\varphi)(x) = \sum_{j=1}^{m_i} \gamma''(\varphi_j\varphi)$$

d'où

$$\begin{aligned}\|\gamma''(\varphi)(x) - \gamma'(\varphi)(x)\| &= \Big\|\sum_{j=1}^{m_i} P_j(x)(\gamma''(\varphi_j\varphi) - \gamma'(\varphi_j\varphi))(x)\Big\| \\ &= \sup_{j=1,\dots,m_i}\|\gamma''(\varphi_j\varphi)(x) - \gamma'(\varphi_j\varphi)(x)\|\end{aligned}$$

Prenons $y_\circ \in B_j^i$. On a $\sup_{y\in]0,1]}|\varphi_j(y)(\varphi(y) - \varphi(y_\circ))| \leqslant \varepsilon$ d'où

$$\begin{aligned}\|\gamma''(\varphi_j\varphi)(x) - \gamma'(\varphi_j\varphi)(x)\| &\leqslant \|\gamma''(\varphi_j\varphi)(x) - \varphi(y_\circ)\gamma''(\varphi_j)(x)\| \\ &\quad + \|\varphi(y_\circ)\gamma'(\varphi_j)(x) - \gamma'(\varphi_j\varphi)(x)\| \leqslant 2\varepsilon .\end{aligned}$$

Il en résulte que $\|\gamma''(\varphi)(x) - \gamma'(\varphi)(x)\| \leqslant 2\varepsilon$ si $x \geqslant n_\circ$. On a donc $\gamma''(\varphi) - \gamma'(\varphi) \in A$ pour tout $\varphi\in C$, ce qui achève la démonstration.

VII.4.2. LEMME. Soient T un ensemble, Θ' un filtre sur T, et φ une fonction bornée définie sur un élément de Θ', à valeurs dans $]0,+\infty[$. Soit Y un espace localement compact tel que $\ddot{Y}$ soit connexe. Prenons $\nu \in \mathcal{M}^Y(Y)$. Soient $t \longmapsto \nu_t^1$ et $t \longmapsto \nu_t^2$ deux fonctions de T dans $\mathcal{M}(Y)$ telles que $\lim_{t,\Theta'} \varphi(t)\nu_t^1 = \lim_{t,\Theta'} \varphi(t)\nu_t^2 = \nu$. Pour tout compact E de Y et tout ouvert non vide Ω contenant E, il existe un élément de Θ' sur lequel on ait $\nu_t^1(E) < \nu_t^2(\Omega)$ et $\nu_t^2(E) < \nu_t^1(\Omega)$.

Puisque $\ddot{Y}$ est connexe, E est strictement contenu dans Ω. Soit U un ouvert de Y tel que $\overline{U} \subset \Omega - E$. Comme $\operatorname{Supp} \nu = Y$, il existe $f \in \mathcal{K}(Y)$, à valeurs dans $[0,1]$ et nulle hors de U, telle que $\nu(f) > 0$. Puisque $\lim_{t,\Theta'} \varphi(t)\nu_t^1(f) = \nu(f)$, il existe $V \in \Theta'$ sur lequel on a $\varphi(t)\nu_t^1(U) \geqslant \varphi(t)\nu_t^1(f) \geqslant \alpha > 0$. Soit g une fonction continue de Y dans $[0,1]$, à support compact, qui vaut 1 sur E et 0 sur $U \cup (Y - \Omega)$. Si $t \in T$, on a $\nu_t^1(g) \leqslant \nu_t^1(\Omega) - \nu_t^1(U)$ et $\nu_t^2(g) \geqslant \nu_t^2(E)$. Posons

$$1 = \nu(g) = \lim_{t,\Theta'} \varphi(t)\nu_t^1(g) = \lim_{t,\Theta'} \varphi(t)\nu_t^2(g) .$$

En diminuant au besoin $V \in \Theta'$, on peut supposer que, sur V, on a

$$\varphi(t)(\nu_t^1(\Omega) - \nu_t^1(U)) > 1 - \alpha/2 \quad \text{et} \quad \varphi(t)\nu_t^2(E) < 1 + \alpha/2$$

d'où

$$\varphi(t)\nu_t^1(\Omega) > 1 - \alpha/2 + \varphi(t)\nu_t^1(U) \geqslant 1 + \alpha/2 > \varphi(t)\nu_t^2(E) .$$

VII.4.3. PROPOSITION. Soient $W = [0,+\infty]$ et w le point à l'infini de $X = [0,+\infty[$. Soient H un espace hilbertien de dimension infinie, $A = \mathcal{C}^\circ([0,+\infty[, \mathcal{LC}(H))$, et $C = \mathcal{C}^\circ(]0,1])$. On a $\mathfrak{B}_W(A,C) = \mathfrak{BS}c_W(A,C)$ et σ est une bijection de $\mathfrak{B}_W(A,C)^\sim = \mathfrak{BS}c_W(A,C)^\sim$ sur $\Phi_\circ \tilde{\times} \mathcal{M}^{]0,1]}(]0,1])$.

L'égalité $\mathfrak{B}_W(A,C) = \mathfrak{BS}c_W(A,C)$ résulte de la proposition VII.4.1 (i). Posons $q = \dim H > \aleph_0$. Soient B_1 et B_2 deux éléments de $\mathfrak{B}_W(A,C)$ tels que $\sigma(\tilde{B}_1) = \sigma(\tilde{B}_2)$, et prenons un représentant (φ,ν) de $\sigma(\tilde{B}_1)$. Soient γ_1' et γ_2' deux homomorphismes de C dans $L(A)$ tels que B_1 et B_2 soient associés à $\Pi\circ\gamma_1'$ et $\Pi\circ\gamma_2'$ respectivement. D'après la proposition VII.4.1 (ii), on peut supposer qu'il existe un champ continu $(e_j^i)_{j\in N(q)}$ de bases orthonormales de H sur $[0,+\infty[$ et une suite décroissante $(f_j^i)_{j\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions continues de $[0,+\infty[$ dans $[0,1]$ tels que $\gamma_i'(c)(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}^*} c(f_j^i(x))Pe_j^i(x)$ pour $x \in [0,+\infty[$ et $c \in C$ $(i=1,2)$. Montrons que $\lim_{x\to\infty} (\sup_{j\in\mathbb{N}^*}|f_j^1(x) - f_j^2(x)|) = 0$. Supposons le contraire; il existe $\varepsilon > 0$ et une suite croissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[0,+\infty[$ avec $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, et une suite $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers > 0, tels qu'on ait $|f_{i_n}^1(x_n) - f_{i_n}^2(x_n)| \geqslant \varepsilon$ pour $n \in \mathbb{N}$. On peut supposer, en prenant au besoin une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que $f_{i_n}^1(x_n) > f_{i_n}^2(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$

et que $\lim_{n\to\infty} f^2_{i_n}(x_n) = \beta$. Pour $i = 1, 2$ et $x \in [0,+\infty[$, appelons ν^i_x la mesure $c \longmapsto \mathrm{Tr}\, \gamma'_i(c)(x)$ sur C^+ ; alors $x \longmapsto \nu^i_x$ est évidemment déterminé par la suite $(f^i_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$, et on a $\lim_{x\to\infty} \varphi(x)\nu^i_x = \nu$ (voir VII.2.5) Soit E le compact $[\frac{3}{4}\varepsilon + \beta , 1]$ et Ω l'ouvert $]\frac{\varepsilon}{2} + \beta , 1]$ dans $]0,1]$ Pour n assez grand, on a $\nu^1_{x_n}(E) = \mathrm{card}\{j \mid f^1_j(x_n) \in E\} \geqslant i_n$ et $\nu^2_{x_n}(\Omega) = \mathrm{card}\{j \mid f^2_j(x_n) \in \Omega\} < i_n$. Ceci est absurde d'après le lemme VII.4.2.

Pour $x \in [0,+\infty[$, notons $u(x)$ l'opérateur unitaire de H défini par $u(x)e^1_j(x) = e^2_j(x)$ si $j \in N(q)$. Alors $x \mapsto u(x)$ est fortement continue de $[0,+\infty[$ dans $\mathcal{U}(H)$. On a

$$\tilde{u}(x)\gamma'_1(c)(x) = \sum\nolimits_{j\in N(q)} c(f^1_j(x))Pe^2_j(x)$$

pour tout $x \in [0,+\infty[$ et tout $c \in C$. Il résulte de l'égalité

$$\|\tilde{u}(x)\gamma'_1(c)(x) - \gamma'_2(c)(x)\| = \sup_{j\in\mathbb{N}^*} |f^1_j(x) - f^2_j(x)| ,$$

que $\lim_{x\to\infty} \|\tilde{u}(x)\gamma'_1(c)(x) - \gamma'_2(c)(x)\| = 0$ pour tout $c \in C$. On a donc

$$\overline{\overline{\alpha}}_u \circ \Pi \circ \gamma'_1 = \Pi \circ \alpha_u \circ \gamma'_1 = \Pi \circ \gamma'_2$$

et ainsi B_1 et B_2 sont semi-équivalentes. Ceci prouve l'injectivité de σ .

L'égalité $\sigma(\mathcal{B}_W(A,C)^\sim) = \Phi_o \tilde{\times} \mathcal{M}^{]0,1]}(]0,1])$ résulte de VII.3.4.

VII.4.4. Soient W un espace localement compact, w un point non isolé de W , et $X = W - \{w\}$. Soit Y un espace discret. L'application qui à $\nu \in \mathcal{M}^Y_d(Y) = \mathcal{M}_d(Y) \cap \mathcal{M}^Y(Y)$ associe la classe de $(1,\nu)$ dans $\Phi \tilde{\times} \mathcal{M}^Y(Y)$ est injective et permet d'identifier $\mathcal{M}^Y_d(Y)$ à un sous-ensemble de $\Phi \tilde{\times} \mathcal{M}^Y(Y)$.

PROPOSITION. <u>Conservons les notations précédentes en supposant de plus que</u> Y <u>est dénombrable. Soient</u> H <u>et</u> H' <u>deux espaces hilbertiens avec</u> $p = [\dim H : \dim H'] \geqslant \aleph_o$. <u>Soient</u> $A = \mathcal{C}^o(X, \mathcal{LC}(H))$ <u>et</u> $C = \mathcal{C}^o(Y, \mathcal{LC}(H'))$.

(i) <u>On a</u> $\mathcal{M}^Y_d(Y) \subset \sigma(\mathcal{BS}c_W(A,C)^\sim)$.

(ii) <u>Supposons que</u> Θ <u>ait une base dénombrable formée de parties connexes. Alors on a</u>

$$\mathcal{S}_W(A,C) = \mathcal{B}_W(A,C) \subset \mathcal{E}(A,C) \quad \text{et} \quad \sigma(\mathcal{B}_W(A,C)^\sim) = \sigma(\mathcal{BS}c_W(A,C)^\sim) = \mathcal{M}^Y_d(Y) .$$

(iii) <u>Supposons que</u> Θ <u>ait une base dénombrable formée de parties connexes, que</u> $\dim H = \aleph_o$, <u>et que</u>

a) <u>pour tout</u> $V \in \Theta$ <u>et tout champ de projecteurs appartenant à</u> $\mathcal{C}(V, \mathcal{LC}(H))$, <u>il existe</u> $V_1 \in \Theta$, <u>contenu dans</u> V , <u>sur lequel ce champ soit trivial;</u>

b) <u>il existe</u> $V' \in \Theta$ <u>tel que</u> Θ <u>possède une base formée de rétrac-</u>

<u>tes de</u> V' .

<u>Alors, on a</u> $\mathcal{S}_W(A,C) = \mathcal{BS}c_W(A,C)$, <u>et</u> σ <u>est une bijection de</u> $\mathcal{BS}c_W(A,C)^{\sim} = \mathcal{S}_W(A,C)^{\sim}$ <u>sur</u> $\mathcal{M}_d^Y(Y)$.

(i) Identifions H à $H' \otimes l_p^2$ et notons $(e_i)_{i\in N(p)}$ la base orthonormale canonique de l_p^2 . Soit $\nu \in \mathcal{M}_d^Y(Y)$ et appelons $(a_i)_{i\in N(q)}$ (avec $q \leqslant \aleph_0$) la suite des points de $\mathrm{Supp}\ \nu = Y$, multiplicités comprises. Soit γ' l'homomorphisme de C dans $\mathcal{C}^b(X, \mathcal{LC}(H))$ tel que

$$\gamma'(c)(x) = \sum_{i\in N(p)} c(a_i) \otimes Pe_i$$

pour $x \in X$ et $c \in C$. L'extension B de A par C associée à γ' appartient à $\mathcal{BS}c_W(A,C)$, et on a $\sigma(\tilde{B}) = \nu$ (voir VII.2.5) .

L'assertion (ii) résulte de la proposition VI.1.5.

(iii) Soient B_1 et B_2 deux éléments de $\mathcal{B}_W(A,C) = \mathcal{S}_W(A,C)$. On vérifie immédiatement que $\sigma(\tilde{B}_1) = \sigma(\tilde{B}_2)$ si et seulement si $\xi(\tilde{B}_1) = \xi(\tilde{B}_2)$. L'assertion résulte alors facilement de la proposition VI.3.4 (voir en particulier VI.3.6 b) et d)).

CHAPITRE VIII

Exemples

VIII.1. Nous donnons un exemple d'une C^*-algèbre liminaire et d'un filtre Θ sur B pour lesquels

a) Θ converge vers chacune de ses valeurs d'adhérence dans $\hat{B}$;

b) il n'existe pas de fonction φ définie sur un élément de Θ, à valeurs dans $]0,+\infty[$, telle que B soit bien φ-encadrée suivant Θ (voir I.2.16).

Soient $A = \mathscr{C}^\circ([0,+\infty[, \mathscr{LC}(H))$ avec $\dim H \geqslant \aleph_0$, $C_1 = \mathscr{C}^\circ(]0,1])$, $C_2 = \mathbf{C}$ et $C = C_1 \times C_2$. Ecrivons H sous la forme $H_1 \oplus \mathbf{C}$, et notons P le projecteur de H sur $\mathbf{C}$. Soit γ_1 un homomorphisme de C_1 dans $\mathscr{C}^b([0,+\infty[, \mathscr{LC}(H))$ tel que $\lim_{x\to\infty} \gamma_1(C_1)(x)^\wedge =]0,1]$ dans $\mathscr{F}(]0,1])$ muni de la topologie fellienne (il en existe d'après le lemme VII.2.2 et la proposition VII.3.4). Appelons γ' l'homomorphisme de C dans $\mathscr{C}^b([0,+\infty[, \mathscr{LC}(H))$ tel que $\gamma'((c_1,\eta))(x) = \gamma_1(c_1)(x) + \eta P$ pour tout $(c_1,\eta) \in C$ et tout $x \in [0,+\infty[$. Soit B l'extension scindée de A par C associée à γ'. Le filtre Θ des voisinages de l'infini dans $[0,+\infty[$ converge vers chacune de ses valeurs d'adhérence dans $\hat{B}$, et $\hat{C}$ est l'ensemble de ses limites (voir VII.2.2). Pour $i = 1, 2$, appelons I_i l'idéal bilatère fermé de B tel que $\hat{I}_i = \hat{A} \cup \hat{C}_i$. Supposons qu'il existe φ définie sur un élément de Θ, à valeurs dans $]0,+\infty[$, telle que B soit bien φ-encadrée siuvant Θ. On vérifie facilement que dans ces conditions I_1 et I_2 sont bien φ-encadrés suivant Θ. Mais I_2 est encadré suivant Θ (voir I.3.6). Ceci entraîne que $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) > 0$ et donc que B est encadrée suivant Θ. Mais alors $\hat{C}$ doit être discret d'après la proposition I.2.24, ce qui est absurde.

Posons $W = [0,+\infty]$. On remarquera que B est un élément de $\mathscr{G}_W(A,C)$ qui n'appartient pas à $\mathscr{D}_W(A,C)$.

VIII.2. Classification des extensions de $A = \mathscr{C}^\circ(\mathbf{R}, M_5(\mathbf{C}))$ par $C = M_2(\mathbf{C})$. Posons $X_1 = [-\infty,+\infty]$, $X = \mathbf{R}$, et $h = h_{X,X_1}$. D'après VI.1.3, on a $\mathscr{E}(A,C) = \mathrm{Ext}(A,C)$ et, d'après VI.1.10, on a

$$\xi(\mathscr{E}(A,C)^\sim) \subset \mathscr{C}(\beta\mathbf{R} - \mathbf{R}, \mathscr{M}_d^2(\hat{C})) .$$

Comme $\hat{C}$ n'a qu'un seul point et que $\beta\mathbf{R} - \mathbf{R}$ a deux composantes connexes, à savoir $h^{-1}(+\infty) = K^+$ et $h^{-1}(-\infty) = K^-$, on vérifie facilement que $\mathscr{C}(\beta\mathbf{R} - \mathbf{R}, \mathscr{M}_d^2(\hat{C}))$ contient seulement les 9 éléments Γ suivants (en identifiant $\mathcal{M}_d(\hat{C})$ à $\mathbb{N}$ et en notant une fonction constante par sa valeur) :

$$\Gamma = 0 \; ; \; \Gamma = 1 \; ; \; \Gamma = 2 \; ;$$
$$\Gamma|K^+ = 1 \text{ et } \Gamma|K^- = 0 \; ; \; \Gamma|K^+ = 0 \text{ et } \Gamma|K^- = 1 \; ;$$
$$\Gamma|K^+ = 2 \text{ et } \Gamma|K^- = 0 \; ; \; \Gamma|K^+ = 0 \text{ et } \Gamma|K^- = 2 \; ;$$
$$\Gamma|K^+ = 2 \text{ et } \Gamma|K^- = 1 \; ; \; \Gamma|K^+ = 1 \text{ et } \Gamma|K^- = 2 \; .$$

Ainsi tout élément Γ de $\mathcal{C}(\beta\mathbb{R} - \mathbb{R}, \mathcal{M}_d^2(\hat{C}))$ est simple sur K^+ et sur K^- ; il satisfait évidemment aux conditions a) et b) de VI.3.3 (voir VI.3.6 a) et b)). De plus, comme $\mathcal{PU}(l_5^2)$ est connexe par arcs, la condition c) de VI.3.3 est réalisée aussi. En utilisant VI.2.6 et la généralisation de VI.3.3 signalée au début du paragraphe VI.3.7, on prouve donc qu'il y a 9 classes de semi-équivalence dans Ext(A,C) . Mais, parmi les 9 possibilités ci-dessus pour Γ , il est clair que les possibilités 4 et 5 (resp. 6 et 7 , resp. 8 et 9) donnent des extensions faiblement équivalentes. Montrons par contre que les possibilités 1, 2, 3, 4, 6 et 8 donnent des C^*-algèbres deux à deux non isomorphes. Soient B et B' deux C^*-algébres isomorphes appartenant à Ext(A,C) et remarquons d'abord qu'elles sont faiblement équivalentes en tant qu'extensions; en effet, soit β un isomorphisme de B sur B' : on a $\beta(A) = A$ car A est le seul idéal bilatère fermé de B et B' tel que B/A et B'/A soient homogènes de degré 2 . Appelons α l'automorphisme de A induit par β ; soient f l'homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et v l'élément de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathcal{PU}(l_5^2))$ tels que $\alpha = \psi(f,v)$ (en conservant les notations de IV.3.1). On a soit $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, soit $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Il en résulte que, pour tout $b \in B$, on a soit

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{Tr} b(x) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{Tr} v(x)b(x) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{Tr} \beta(b)(x)$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{Tr} b(x) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{Tr} \beta(b)(x) \quad ,$$

soit

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{Tr} b(x) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{Tr} \beta(b)(x)$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{Tr} b(x) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{Tr} \beta(b)(x) \quad .$$

On a donc

soit $\xi(\tilde{B}) = \xi(\tilde{B}')$, soit $\xi(\tilde{B})|K^+ = \xi(\tilde{B}')|K^-$ et $\xi(\tilde{B})|K^- = \xi(\tilde{B}')|K^+$.

Ainsi il y a exactement 6 classes d'équivalence faible d'extensions de A par C , et la proposition VI.2.6 nous permet d'en écrire des représentants $B_1, \dots, B_6$ de la manière suivante. Identifions l_5^2 à $l_2^2 \otimes l_2^2 \oplus \mathbb{C}$ et appelons (e_1,e_2) la base canonique de l_2^2 . Alors

$B_1 = A \times C$;

$B_2 = \{(m,c) \in L(A) \times C \mid \lim_{x\to\pm\infty} m(x) = c \otimes Pe_1\}$;

$B_3 = \{(m,c) \in L(A) \times C \mid \lim_{x\to\pm\infty} m(x) = c \otimes (Pe_1 + Pe_2)\}$;

$B_4 = \{(m,c) \in L(A) \times C \mid \lim_{x\to+\infty} m(x) = c \otimes Pe_1 \;,\; \lim_{x\to-\infty} m(x) = 0\}$;

$B_5 = \{(m,c) \in L(A) \times C \mid \lim_{x\to+\infty} m(x) = c \otimes (Pe_1 \oplus Pe_2),\; \lim_{x\to-\infty} m(x) = 0\}$;

$B_6 = \{(m,c) \in L(A) \times C \mid \lim_{x\to+\infty} m(x) = c \otimes (Pe_1 \oplus Pe_2),$

$\lim_{x\to-\infty} m(x) = c \otimes Pe_1\}$.

L'espace $\hat{B}_1$ est la somme topologique de $\mathbf{R}$ et $\hat{C}$; on a $\hat{B}_2 = \hat{B}_3 = \hat{B}_6 = \dot{\mathbf{R}}$ et $\hat{B}_4 = \hat{B}_5 =]-\infty,+\infty]$.

VIII.3. Soient $A = \mathcal{C}^{\circ}(\mathbf{R},M_n(\mathbf{C}))$ et $C = M_n(\mathbf{C})$ avec $n \in \mathbf{N}^*$. En utilisant les raisonnements de VIII.2, on prouve que la C^*-algèbre $\mathcal{C}(\dot{\mathbf{R}},M_n(\mathbf{C}))$ est la seule extension (à équivalence faible près) de A par C ayant $\dot{\mathbf{R}}$ comme spectre. On en déduit que toute C^*-algèbre homogène B de degré n (voir [16], déf. 10.9.4) et de spectre $\dot{\mathbf{R}}$ (homéomorphe à $\mathbf{T}$) est isomorphe à $\mathcal{C}(\dot{\mathbf{R}},M_n(\mathbf{C}))$. En effet, appelons r_∞ le point à l'infini de $\mathbf{R}$ et posons $A' = \{b \in B \mid b(r_\infty) = 0\}$. Alors B apparaît évidemment comme une extension de A' par $M_n(\mathbf{C})$. Il suffit maintenant de remarquer que A' est isomorphe à $\mathcal{C}^{\circ}(\mathbf{R},M_n(\mathbf{C}))$. Ce fait se déduit du résultat suivant concernant la structure des C^*-algèbres homogènes. Il existe une bijection canonique (voir [19], § 3.2) entre les deux ensembles ci-dessous :

l'ensemble des classes (à isomorphisme près) des C^*-algèbres homogènes de degré n et de spectre T ;

l'ensemble des classes d'équivalence faible (au sens de [19], p. 250) des espaces fibrés (au sens de ([34], chap. I, § 3.4)) ayant T pour base, $M_n(\mathbf{C})$ pour fibre et $\mathcal{PU}(1_n^2)$ pour groupe.

Donc (voir [34], corol. 11.6), toute C^*-algèbre homogène de degré n ayant une base T paracompacte et contractile est isomorphe à $\mathcal{C}^{\circ}(T,M_n(\mathbf{C}))$.

Le fait que toute C^*-algèbre homogène de degré n et de base $\mathbf{T}$ soit isomorphe à $\mathcal{C}(\mathbf{T},M_n(\mathbf{C}))$ se déduit aussi, grâce à la bijection précédente, de la classification des espaces fibrés sur une sphère (utiliser ([34], corol. 18.6), et la connexité par arcs de $\mathcal{PU}(1_n^2)$).

Prenons maintenant $A = \mathcal{C}^{\circ}(\mathbf{R}^2,M_n(\mathbf{C}))$ et $C = M_n(\mathbf{C})$ avec $n > 1$, et appelons r_∞ le point à l'infini de $\mathbf{R}^2$. Le groupe fondamental de $\mathcal{PU}(1_n^2)$ vaut $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ (voir [23], p. 58). Alors, d'après ([34], corol. 18.6), il existe un fibré non trivial de base $\dot{\mathbf{R}}^2$, de groupe $\mathcal{PU}(1_n^2)$, et de fibre $M_n(\mathbf{C})$. Il en résulte que la C^*-algèbre B des sections continues de ce fibré (voir [19], § 3.2) n'est pas isomorphe à $\mathcal{C}(\dot{\mathbf{R}}^2,M_n(\mathbf{C})) = B'$. Pourtant, comme dans la première partie de VIII.3 ($\mathbf{R}^2$ étant paracompact et contractile), B est isomorphe à une extension B'' de A par C telle que $\hat{B}'' = \dot{\mathbf{R}}^2$. Ainsi B' et B'' sont deux éléments non faiblement équivalents dans $\mathcal{E}(A,C)$ et tels que $\xi(\tilde{B}') = \xi(\tilde{B}'')$ (= la fonction constante de valeur 1 sur $\beta\mathbf{R}^2 - \mathbf{R}^2$, $\mathcal{M}_d(\hat{C})$ étant identifié à $\mathbf{N}$) . On peut vérifier que le filtre Θ des voisinages de l'infini dans $\mathbf{R}^2$ satisfait aux conditions a) et b) de la proposition VI.3.3, mais non à la condition c).

VIII.4. Soient $A = \mathcal{C}^\circ([0,+\infty[, \mathcal{LC}(H))$ et $C = \mathcal{LC}(H')$ avec $0 < \dim H' \leqslant \dim H = \aleph_0$. Classons les éléments de $\mathcal{S}(A,C)$, c'est-à-dire, ici, les extensions à spectre séparé de A par C . Notons B_0 l'extension triviale $A \times C$. Le spectre des éléments de $\mathcal{S}(A,C)$ distincts de B_0 est nécessairement la compactifié d'Alexandroff X_1 de $[0,+\infty[= X$ car $\beta X - X$ est connexe (voir II.12). Soit B une extension de A par C telle que $\hat{B} = X_1$. Remarquons que nous sommes dans la situation de la proposition VI.3.8 (ii) avec $\Omega = X_1 - X$, $Z = X_1$, $n = 1$, $s_1 = 1$, Θ étant le filtre des voisinages de l'infini dans X . On a donc $B \in \mathcal{E}(A,C)$. De plus Θ satisfait évidemment aux conditions 5) et 6) de VI.3.8. Il en résulte que $\mathcal{S}(A,C)^\sim = \mathcal{E}(A,C)^\sim$ est en bijection avec $\mathbb{N}$ de la façon suivante. Identifions H à $H' \otimes l^2_{\aleph_0}$ et soit $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ la base orthonormale canonique de $l^2_{\aleph_0}$. Alors à 0 correspond B_0 et à $n \in \mathbb{N}^*$ correspond la classe de

$$B_n = \{(m,c) \in \mathcal{C}^b([0,+\infty[, \mathcal{LC}(H)) \times C \mid \lim_{x\to+\infty} m(x) = c \otimes \sum_{i=1}^{n} Pe_i\} .$$

Montrons que si n et n' sont deux entiers > 0 distincts, les C^*-algèbres B_n et $B_{n'}$ ne sont pas isomorphes. Tout d'abord B_0 n'est évidemment isomorphe à aucune des C^*-algèbres B_n avec $n > 0$. On vérifie immédiatement que B_1 est une C^*-algèbre à trace continue et que les C^*-algèbres B_n avec $n \geqslant 2$ ne sont pas à trace continue. Il reste donc à prouver que si n et n' sont deux entiers $\geqslant 2$ distincts, B_n et $B_{n'}$ ne sont pas isomorphes. Soit β un isomorphisme de B_n sur $B_{n'}$. On a $\beta(A) = A$ car A est le plus grand idéal bilatère fermé à trace continue de B_n et $B_{n'}$. Appelons α (resp. δ) l'automorphisme de A (resp. C) induit par β . Soient f l'homéomorphisme de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$ et v l'élément de $\mathcal{C}([0,+\infty[, \mathcal{PU}(H))$ tels que $\alpha = \psi(f,v)$ (en conservant les notations du lemme IV.3.1). Pour tout $b = (m,c) \in \mathcal{K}(B_n)$ on a

$$\begin{aligned} n.\mathrm{Tr}\, c &= \lim_{x\to+\infty} \mathrm{Tr}\, b(x) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{Tr}\, v(x)b(x) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \mathrm{Tr}\, \beta(b)(x) = n'.\mathrm{Tr}\, \delta(c) = n'.\mathrm{Tr}\, c \ , \end{aligned}$$

ce qui est absurde.

On peut démontrer que le filtre Θ des voisinages de l'infini dans $\mathbb{R}^2$ satisfait aussi aux conditions 5) et 6) de la proposition VI.3.8 et que tout ce qui a été établi avec $X = [0,+\infty[$ reste valable avec $X = \mathbb{R}^2$. L'extension B_1 est la seule extension (à équivalence faible près) non triviale et à trace continue de $A = \mathcal{C}^\circ(X, \mathcal{LC}(H))$ (avec $X = \mathbb{R}^2$ ou $[0,+\infty[$) par $C = \mathcal{LC}(H')$. En particulier, si $H = H'$, elle est faiblement équivalente à $\mathcal{C}(\dot{X}, \mathcal{LC}(H))$. Ce résultat se déduit aussi de ([16], 10.9.5 (ii)) car (avec les notations de ([16], 10.9.5)) on a $H^3(\dot{X},\mathbf{Z}) = 0$ si $X = \mathbb{R}^2$ et si $X = [0,+\infty[$. Par contre, si $X = \mathbb{R}^3$, on a $H^3(\dot{X},\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ puisque $\dot{X}$

est homéomorphe à la sphère unité de $\mathbb{R}^4$, et donc, d'après ([16], 10.9.5 (ii)), il existe une C^*-algèbre séparable à trace continue, homogène de degré $\aleph_0$, de spectre $\dot{\mathbb{R}}^3$, non isomorphe à $\mathscr{C}(\dot{\mathbb{R}}^3, \mathscr{LC}(H))$. Comme dans VIII.3 (et en utilisant le fait que toute C^*-algèbre séparable à trace continue, homogène de degré $\aleph_0$, de spectre $\mathbb{R}^3$, est isomorphe à $\mathscr{C}^\circ(\mathbb{R}^3, \mathscr{LC}(H))$, toujours d'après ([16], 10.9.5)), on en déduit qu'il existe une extension à trace continue B'' de $A = \mathscr{C}^\circ(\mathbb{R}^3, \mathscr{LC}(H))$ par $C = \mathscr{LC}(H)$, non triviale et non faiblement équivalente à $B' = \mathscr{C}(\dot{\mathbb{R}}^3, \mathscr{LC}(H))$, et donc qu'il existe dans $\mathscr{E}(A,C)$ deux éléments non faiblement équivalents B' et B'' tels que $\xi(\tilde{B}') = \xi(\tilde{B}'')$.

VIII.5. Soient $Y = \mathbb{R} - \{0\}$, $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$, $X_1' = X \cup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$, et $X_1 = \dot{X}_1'$, les espaces X et X_1' étant munis de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$. Nous appellerons x_∞' le point à l'infini de X_1'. Soient H un espace hilbertien de dimension $\aleph_0$ H' un espace hilbertien séparable, $A = \mathscr{C}^\circ(X, \mathscr{LC}(H))$, et $C = \mathscr{C}^\circ(Y, \mathscr{LC}(H'))$. Considérons la fonction f de $X_1 - X$ dans $\mathscr{F}(Y)$ telle que $f(x_\infty') = \emptyset$ et $f(x,0) = \{\sqrt{x}, -\sqrt{x}\}$ pour tout $(x,0) \in X_1' - X$; elle est continue. Appelons Z l'extension de X par Y associée à f. D'après II.9, une partie F de Z est fermée dans Z si et seulement si

$F \cap X$ est fermé dans X et $F \cap Y$ est fermé dans Y ;
$F \cap Y$ contient $f(x)$ pour tout $(x,0) \in (X_1' - X) \cap \overline{F \cap X}^{X_1'}$.

Nous nous proposons de classer les extensions B de A par C telles que $\hat{B} = Z$. Lorsque $\dim H = \dim H' = \aleph_0$, l'une de ces extensions apparaît naturellement comme idéal bilatère fermé de la C^*-algèbre du groupe nilpotent Γ_4 (voir [10], §3); nous notons $I(\Gamma_4)$ cette extension.

Posons $\Pi^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$, $\Pi^- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}$ et $\Omega = X_1' - X$. Pour $\varepsilon = \pm 1$, notons f_ε la fonction continue de Ω dans Y telle que $f_\varepsilon(x,0) = \varepsilon\sqrt{x}$ si $(x,0) \in \Omega$; on a $f(x,0) = \{f_{-1}(x,0), f_1(x,0)\}$ pour tout $(x,0) \in \Omega$. Appelons Θ (resp. Θ_∞') la trace sur X du filtre des voisinages de Ω (resp. x_∞') dans X_1. Le filtre Θ se divise en les bouts $\Theta^+ = \{V \cap \Pi^+ \mid V \in \Theta\}$ et $\Pi^- = \{V \cap \Pi^- \mid V \in \Theta\}$. De plus, pour tout $(x,0) \in \Omega$, le filtre Θ_x, trace sur X du filtre des voisinages de $(x,0)$ dans X_1, se divise en les bouts $\Theta_x \wedge \Theta^+ = \Theta_x^+$ et $\Theta_x \wedge \Theta^- = \Theta_x^-$ (avec les notations de VI.3.8). Alors, il résulte de VI.3.8 (ii), dont les conditions sont réalisées avec $n = 1$, $s_1 = 2$, et $q_1 = 2$, que toute extension B de A par C telle que $\hat{B} = Z$ est uniformément liminaire. Montrons que Θ satisfait à la condition 6) de la proposition VI.3.8. On vérifie facilement que Θ^+ possède une base formée d'ensembles du type suivant :

$$U = \{(x,y) \in \Pi^+ \mid x > 0 \text{ et } y < \varphi(x)\},$$

où φ est une fonction continue de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ telle que

$\lim_{x\to 0}\varphi(x) = \lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = 0$ et telle que pour tout $(x,y)\in\Pi^+$, il existe un point et un seul situé à la fois sur la droite joignant $(1,0)$ à (x,y) et sur la courbe $\{(x,\varphi(x)) \mid x > 0\}$. La fonction de Π^+ dans U définie par

$(x,y) \longmapsto (x,y)$ si $(x,y)\in U$;

$(x,y) \longmapsto$ le point situé à l'intersection de la courbe $\{(x,\varphi(x)) \mid x > 0\}$ avec la droite joignant $(1,0)$ à (x,y) si $(x,y)\in\Pi^+ - U$,

est une rétraction de Π^+ sur U. Comme de même Θ^- possède une base formée de rétractes de Π^-, on en déduit que Θ possède une base formée de rétractes de X. Par ailleurs on s'assure immédiatement que les filtres Θ^+ et Θ^- ont une base formée de parties paracompactes et contractiles et donc que Θ satisfait aussi à la condition 5) de la proposition VI.3.8. Il résulte alors de cette proposition que l'ensemble

$$\{\tilde{B} \mid B\in \mathrm{Ext}(A,C) \text{ et } \hat{B} = Z\}$$

est en bijection avec $(\mathbb{N}^*)^4$ de la façon suivante. Identifions H à $H'\otimes l^2_{\aleph_0}$ et appelons $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ la base orthonormale canonique de $l^2_{\aleph_0}$.

Alors, au quadruplet $(m_1^1, m_{-1}^1, m_1^{-1}, m_{-1}^{-1})$ correspond la classe de la C^*-algèbre B des couples $(m,c)\in\mathscr{C}^\circ(X,\mathscr{L}\mathscr{C}(H))\times C$ tels que $\lim_{t,\Theta'_\infty} m(t) = 0$ et tels que

$$\lim_{t,\Theta_x^\varepsilon} m(t) = c(\sqrt{x})\otimes\sum_{i=1}^{m_1^\varepsilon} Pe_i + c(-\sqrt{x})\otimes\sum_{j=m_1^\varepsilon+1}^{m_1^\varepsilon+m_{-1}^\varepsilon} Pe_j$$

pour tout $(x,0)\in\Omega$ et $\varepsilon = \pm 1$ (les limites étant les limites normiques dans $\mathscr{L}\mathscr{C}(H)$). Remarquons que des extensions associées à des quadruplets distincts peuvent être faiblement équivalentes. C'est ainsi que les extensions associées à $(m_1^1, m_{-1}^1, m_1^{-1}, m_{-1}^{-1})$, $(m_{-1}^1, m_1^1, m_{-1}^{-1}, m_1^{-1})$, $(m_{-1}^{-1}, m_1^{-1}, m_{-1}^1, m_1^1)$ et $(m_1^{-1}, m_{-1}^{-1}, m_1^1, m_{-1}^1)$ sont faiblement équivalentes. On en déduirait facilement la classification, à équivalence faible près, des éléments de $\mathrm{Ext}(A,C)$ ayant Z comme spectre.

Dans une rédaction non plubliée, F. Perdrizet a montré que la classe de l'extension $I(\Gamma_4)$ est associée au quadruplet $(1, 1, 1, 1)$.

VIII.6. Structure de la C^*-algèbre $D = C^*(SL(2,\mathbb{C}))$ du groupe $SL(2,\mathbb{C})$. La topologie de $\hat{D}$ a été déterminée dans ([18], chap. III). L'ensemble $\hat{D}$ s'identifie à la réunion des deux sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$X = (\{(n,y) \mid n\in\mathbb{N}^* \text{ et } y\in\mathbb{R}\}\cup\{(0,y) \mid y > 0\} \cup\{(x,0) \mid -1 < x \leqslant 0\}) - (\{2,0\})$$

$$Y = \{(-1,0)\}\cup\{(2,0)\}.$$

Nous munissons X et Y de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$. Posons $X'_1 = \overline{X}^{\mathbb{R}^2}$ et $X_1 = \dot{X}'_1$, et appelons x'_∞ le point à l'infini de X'_1. Soit

f la fonction de $X_1 - X$ dans $\mathcal{F}(Y)$ telle que $f(x'_\infty) = \emptyset$, $f(-1,0) = Y$ et $f(2,0) = \{(2,0)\}$. Alors $\hat{D}$ est l'extension de X par Y associée à f. Pour cette topologie (voir [18], corol. 1 du th. 3.1), une partie $F \subset \hat{D}$ est fermée si et seulement si :

$F \cap X$ est fermé dans X ;
Y est contenu dans F lorsque $(-1,0) \in \overline{F \cap X}^{\mathbb{R}^2}$;
$(2,0) \in F$ lorsque $(2,0) \in \overline{F \cap X}^{\mathbb{R}^2}$.

La représentation irréductible de $SL(2,\mathbb{C})$ qui correspond au point $(-1,0)$ est la représentation triviale de dimension 1. Toutes les autres représentations irréductibles de $SL(2,\mathbb{C})$ sont des représentations dans un espace hilbertien de dimension $\aleph_0$ (voir [19], chap. V). Appelons A' l'idéal bilatère fermé de D tel que $\hat{A}' = X$, et posons $C = \mathcal{LC}(H') \times \mathbb{C}$ où H' est un espace hilbertien de dimension $\aleph_0$. Ainsi D apparaît comme une extension de A' par C. D'après ([18], lemmes 3.6 et 3.8) la C^*-algèbre A' est à trace continue. Alors, grâce à ([16], 10.9.6), A' est isomorphe à $\mathcal{C}^\circ(X, \mathcal{LC}(H)) = A$ où H est un espace hilbertien de dimension $\aleph_0$. Donc D est isomorphe à une extension D' de A par C.

Nous poserons maintenant $A = \mathcal{C}^\circ(X, \mathcal{LC}(H))$ et $C = \mathcal{LC}(H') \times \mathbb{C}$ avec $0 < \dim H' \leqslant \dim H = \aleph_0$. Nous allons classer les extensions B de A par C telles que $\hat{B} = \hat{D}$. Appelons Θ_1 (resp. Θ_2, Θ'_∞) la trace sur X du filtre des voisinages de $(-1,0)$ (resp. $(2,0)$, x'_∞) dans X_1, et posons $\Pi^+ = \{(2,y) \mid y > 0\}$, $\Pi^- = \{(2,y) \mid y < 0\}$. Le filtre Θ_1 a un bout et le filtre Θ_2 a deux bouts, $\Theta_2^+ = \{V \cap \Pi^+ \mid V \in \Theta_2\}$ et $\Theta_2^- = \{V \cap \Pi^- \mid V \in \Theta_2\}$. Alors, d'après la généralisation VI.3.9 de la proposition VI.3.8 (dont les conditions sont réalisées avec $\Omega^1 = \{(-1,0)\}$, $\Omega^2 = \{(2,0)\}$, $Z = \hat{D}$, $n = 2$, $s_1 = 1$, $s_2 = 2$, $q_1 = 2$, $q_2 = 1$), toute extension B de A par C telle que $\hat{B} = \hat{D}$ est uniformément liminaire, et l'ensemble $\{\tilde{B} \mid B \in \mathrm{Ext}(A,C)\}$ et $\hat{B} = \hat{D}\}$ est en bijection avec $(\mathbb{N}^*)^4$ de la façon suivante. Identifions H à $H' \otimes l^2_{\aleph_0} \oplus l^2_{\aleph_0}$ et appelons $(e_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ la base orthonormale canonique de $l^2_{\aleph_0}$. Alors, à $(p,q,r,s) \in (\mathbb{N}^*)^4$ correspond la classe de semi-équivalence de B, où B est la C^*-algèbre des couples $(m,(c,\eta)) \in \mathcal{C}^b(X, \mathcal{LC}(H)) \times C$ tels que

$$\lim_{t,\Theta'_\infty} m(t) = 0 , \quad \lim_{t,\Theta_1} m(t) = c \otimes \sum_{i=1}^{p} Pe_i \oplus \eta \sum_{j=1}^{q} Pe_j ,$$

$$\lim_{t,\Theta_2^+} m(t) = c \otimes \sum_{i=1}^{r} Pe_i , \quad \lim_{t,\Theta_2^-} m(t) = c \otimes \sum_{i=1}^{s} Pe_i$$

(les limites étant les limites normiques dans $\mathcal{LC}(H)$).

D'après ce qui précède, la structure de D est entièrement déterminée, à isomorphisme près, par le quadruplet (p,q,r,s) auquel est associé $\tilde{D}'$; il résulte de ([18], lemmes 3.8 et 3.10) que ce quadruplet est $(1,1,1,1)$. Notons X' l'espace $X \cup \{(2,0)\}$ muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$ et identifions H à $H \oplus \mathbb{C}$. Alors D est isomorphe à la C^*-algèbre

B_1 des couples $(m,(c,\eta)) \in \mathscr{C}^b(X', \mathscr{LC}(H)) \times C$ tels que $m(2,0) = c$, $\lim_{t,\theta_1} m(t) = c \oplus \eta$ et $\lim_{t,\theta'_\infty} m(t) = 0$. En effet le quadruplet associé à B_1 est évidemment $(1,1,1,1)$.

Signalons que la structure de D a déjà été entièrement déterminée auparavant, avec d'autres méthodes, par J.M.G. Fell (voir [19], th. 5.4). Dans notre méthode les seuls résultats de Fell que nous utilisons sont ceux de [18].

VIII.7. Soient H un espace hilbertien de dimension infinie q, $A = \mathscr{C}^\circ(\mathbb{N}, \mathscr{LC}(H))$ et $C = \mathbb{C}$. Posons $W = \dot{\mathbb{N}}$. Nous allons classer, à équivalence faible près, les extensions de A par C qui ont W pour spectre. Soit B une telle extension, associée à un homomorphisme γ de C dans $L(A)/A$. D'après le corollaire II.15 et la proposition IV.1.4, on a $\gamma(C)(x)^\wedge = \hat{C}$ pour tout $x \in \beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$. Il en résulte l'existence d'un projecteur $P \in \mathscr{C}^b(\mathbb{N}, \mathscr{LC}(H))$ tel que $\Pi(P) = \gamma(1)$ et $P(n) \neq 0$ pour n assez grand. On peut donc supposer $P(n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que B est scindée et entièrement déterminée par P. Soit B' une autre extension de A par C telle que $\hat{B}' = W$, associée à un homomorphisme γ' de C dans $L(A)/A$, et soit P' un projecteur de $\mathscr{C}^b(\mathbb{N}, \mathscr{LC}(H))$ tel que $\Pi(P') = \gamma'(1)$ et $P'(n) \neq 0$ pour $n \in \mathbb{N}$. Pour tout isomorphisme β de la C^*-algèbre B sur la C^*-algèbre B', on a $\beta(A) = A$. En effet, A est le seul idéal bilatère fermé de B et B' tel que les C^*-algèbres B/A et B'/A soient commutatives non nulles. Appelons α l'automorphisme de A induit par β. Alors β n'est autre que l'isomorphisme qui à $(m,c) \in B$ associe $(\bar{\alpha}(m),c) \in B'$. On a donc $\bar{\alpha}(P) - P' \in A$. Réciproquement, s'il existe un automorphisme α de A tel que $\bar{\alpha}(P) - P' \in A$, l'application de B dans B' qui à (m,c) associe $(\bar{\alpha}(m),c)$ est un isomorphisme de B sur B'. Remarquons qu'ici les C^*-algèbres B et B' sont isomorphes si et seulement si les extensions B et B' sont faiblement équivalentes. Appelons ψ (resp. ψ') la fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\psi(n) = \mathrm{rg}\, P(n)$ (resp. $\psi'(n) = \mathrm{rg}\, P'(n)$) pour $n \in \mathbb{N}$. Etant donné la forme des automorphismes de A (voir IV.3.1), on vérifie facilement que les C^*-algèbres B et B' sont isomorphes si et seulement si il existe une permutation r de $\mathbb{N}$ telle que $\psi(n) = \psi'(r(n))$ pour n assez grand. Ainsi, il existe une bijection canonique entre les deux ensembles suivants:

l'ensemble des classes (à isomorphisme près) des éléments $B \in \mathscr{S}(A,C)$ tels que $\hat{B} = W$;

l'ensemble quotient de $(\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ par la relation d'équivalence $\psi \mathscr{R} \psi'$ s'il existe une permutation r de $\mathbb{N}$ telle que $\psi(n) = \psi'(r(n))$ pour n assez grand.

Soit $(e_i)_{i \in N(q)}$ une base orthonormale de H. La bijection précédente associe à la classe de ψ la classe de

$$B = \{(m,c) \in \mathscr{C}^b(\mathbb{N}, \mathscr{L}\mathscr{C}(H)) \times C \mid \lim_{n\to\infty} \|m(n) - c \sum_{i=1}^{\psi(n)} Pe_i\| = 0\}$$

(comparer avec la classification de VIII.4).

Remarquons que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\psi(n)} \operatorname{Tr} m(n) = c$ pour tout $b = (m,c) \in \mathcal{K}(B)$. Ainsi B appartient à $\mathscr{B}\mathscr{S}c_W(A,C)$.

Appelons φ' (resp. φ'') la fonction telle que $\varphi'(n) = \frac{1}{n+1}$ (resp. $\varphi''(n) = \frac{1}{n+2}$) pour $n \in \mathbb{N}$. Considérons les C^*-algèbres

$$B' = \{(m,c) \in \mathscr{C}^b(\mathbb{N}, \mathscr{L}\mathscr{C}(H)) \times C \mid \lim_{n\to\infty} \|m(n) - c \sum_{i=1}^{n+1} Pe_i\| = 0\},$$

$$B'' = \{(m,c) \in \mathscr{C}^b(\mathbb{N}, \mathscr{L}\mathscr{C}(H)) \times C \mid \lim_{n\to\infty} \|m(n) - c \sum_{i=1}^{n+2} Pe_i\| = 0\}.$$

Elles ne sont pas isomorphes, d'après ce qui précède. Par ailleurs, $\sigma(\tilde{\hat{B}}')$ est la classe de $(\varphi',1) \in \Phi_0 \times \mathscr{M}^{\hat{C}}(\hat{C})$, et $\sigma(\tilde{\hat{B}}'')$ est la classe de $(\varphi'',1)$ (voir VII.2.5). Puisque $\lim_{n\to\infty} \varphi'(n)/\varphi''(n) = 1$, on a $\sigma(\tilde{\hat{B}}') = \sigma(\tilde{\hat{B}}'')$. Ainsi B' et B'' sont deux éléments non isomorphes de $\mathscr{B}\mathscr{S}c_W(A,C)$ tels que $\sigma(\tilde{\hat{B}}') = \sigma(\tilde{\hat{B}}'')$ (comparer avec la proposition VII.4.3).

CHAPITRE IX

Problèmes

IX.1. Soit A une C^*-algèbre liminaire à spectre séparé; $\bar{E}^1(A)$ est-il le plus grand idéal postliminaire de $L(A)$ (voir III.2.13 et III.4.15)?

IX.2 Soient X un espace localement compact, H un espace hilbertien et $A = \mathcal{C}^\circ(X, \mathcal{LC}(H))$; la C^*-algèbre $\bar{E}^1(A)$ est-elle toujours à trace continue (voir III.4.7 et 8)? Plus généralement, $\bar{E}^1(A)$ est-elle à trace continue lorsque A est à trace continue?

IX.3. Soient H un espace hilbertien de dimension infinie et $A = \mathcal{C}^\circ(\mathbb{N}, \mathcal{LC}(H))$. Soit $x \in \beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$. En utilisant le lemme III.4.11, on montre que l'ensemble des idéaux bilatères fermés de $L(A)(x)$ (ensemble dont le cardinal est supérieur ou égal au continu d'après III.4.12) est totalement ordonné par inclusion; ainsi les idéaux bilatères fermés de $L(A)(x)$ sont tous premiers. Sont-ils tous primitifs?

IX.4. Soient H et H' deux espaces hilbertiens tels que $1 \leqslant [\dim H : \dim H'] = p$. Soient X et Y deux espaces localement compacts, $A = \mathcal{C}^\circ(X, \mathcal{LC}(H))$ et $C = \mathcal{C}^\circ(Y, \mathcal{LC}(H'))$. L'application ξ de $\mathcal{E}(A,C)^\sim$ dans $\mathcal{C}(\beta X - X, \mathcal{M}_d^p(Y))$ est-elle toujours surjective (voir VI.1.10 et VI.2.11)?

IX.5. Soient $A = \mathcal{C}^\circ(\mathbb{R} - \{0\}, \mathcal{LC}(H))$ avec $\dim H = \aleph_0$, et $C = \mathcal{C}^\circ(\mathbb{R}^2)$. Posons $W = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R} - \{0\}$ et $Y = \mathbb{R}^2$. Dans VII.1.10 on a signalé que la C^*-algèbre $\mathcal{C}^*(\Gamma_3')$ est canoniquement isomorphe à un élément B de $\mathcal{B}_W(A,C)$. On peut montrer que l'extension B n'est pas scindée, d'où il résulte que $\mathcal{BS}c_W(A,C)^\sim \subsetneqq \mathcal{B}_W(A,C)^\sim$. Par ailleurs, d'après la proposition VII.3.4 on a

$$\sigma(\mathcal{BS}c_W(A,C)^\sim) = \sigma(\mathcal{B}_W(A,C)^\sim) = \Phi_\circ \overset{\sim}{\times} \mathcal{M}^Y(Y) .$$

Par conséquent, ici σ n'est pas injective (comparer avec la proposition VII.4.3). Deux problèmes se posent donc :

1. déterminer si $\sigma | \mathcal{BS}c_W(A,C)^\sim$ est injective;

2. trouver un système maniable d'invariants qui caractérise complètement, à équivalence faible près, les éléments de $\mathcal{B}_W(A,C)$ (en particulier, on pourrait ainsi connaitre la structure précise de $\mathcal{C}^*(\Gamma_3)$). Plus généralement, il serait intéressant de résoudre ce deuxième problème pour des familles suffisamment vastes d'espaces $Y = \hat{C}$, $X = \hat{A}$ et W .

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI, Topologie générale, chap. I-II, 3e éd. (Act. Sc. Ind. n° 1142, Hermann, Paris, 1961).

[2] N. BOURBAKI, Topologie générale, chap. IX, 2e éd. (Act. Sc. Ind. n° 1045, Hermann, Paris, 1958).

[3] R. C. BUSBY, Double centralizers and extensions of C^*-algebras (Trans. Amer. Math. Soc., t. 132, 1968, p. 79-99).

[4] F. COMBES, Sur les faces d'une C^*-algèbre (Bull. Sc. Math., t. 93, 1969, p. 37-62).

[5] W. W. COMFORT, Retractions and other continuous maps from βX onto $\beta X - X$ (Trans. Amer. Math. Soc., t. 114, 1965, p. 1-9).

[6] C. DELAROCHE, Extensions localement quasi-compactes d'un espace localement quasi-compact par un autre (C. R. Acad. Sc., t. 269, série A, 1969, p. 953-955).

[7] C. DELAROCHE, Spectres des extensions de C^*-algèbres (C. R. Acad. Sc., t. 269, série A, 1969, p. 1003-1005).

[8] C. DELAROCHE, Limites et valeurs d'adhérence d'un filtre sur le spectre d'une C^*-algèbre (C. R. Acad. Sc., t. 271, série A, 1970, p. 434-437).

[9] C. DELAROCHE, Sur les extensions de C^*-algèbres (C. R. Acad. Sc., t. 272, série A, 1971, p. 727-730).

[10] J. DIXMIER, Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents VI (Can. J. Math., t. 12, 1960, p. 324-352).

[11] J. DIXMIER, Points séparés dans le spectre d'une C^*-algèbre (Acta Sc. Math., t. 22, 1962, p. 115-128).

[12] J. DIXMIER, Traces sur les C^*-algèbres (Ann. Inst. Fourier, t. 13, 1963, p. 219-262).

[13] J. DIXMIER, Traces sur les C^*-algèbres II (Bull. Sc. Math., t. 88, 1964, p. 39-57).

[14] J. DIXMIER, Sur le dual d'un groupe de Lie nilpotent (Bull. Sc. Math. t. 90, 1966, p. 113-118).

[15] J. DIXMIER, Sur les espaces localement quasi-compacts (Can. J. Math., t. 20, p. 1053-1100).

[16] J. DIXMIER, Les C^*-algèbres et leurs représentations, 2e éd. (Gauthiers-Villars, Paris, 1969).

[17] J. DIXMIER et A. DOUADY, Champs continus d'espaces hilbertiens et de C^*-algèbres (Bull. Soc. Math. Fr., t. 91, 1963, p. 227-287).

[18] J. M. G. FELL, The dual spaces of C^*-algebras (Trans. Amer. Math. Soc. Soc., t. 94, 1960, p. 365-403).

[19] J. M. G. FELL, The structure of algebras of operator fields (Acta Math., t. 106, 1961, p. 233-280).

[20] J. M. G. FELL, A Hausdorff topology for the closed subsets of a locally compact non Hausdorff space (Proc. Amer. Math. Soc., t. 13, 1962, p. 472-476).

[21] H. FREUDENTHAL, Uber die Enden topologischer Raüme und Gruppen (Math. Zeit., t. 33, 1931, p. 692-713).

[22] L. GILLMAN and M. JERISON, Rings of continuous functions (Van Nostrand, Princeton, 1960).

[23] R. V. KADISON and J. R. RINGROSE, Derivations and automorphisms of operator algebras (Comm. Math. Phys., t. 4, 1967, p. 32-63).

[24] I. KAPLANSKY, The structure of certain operator algebras (Trans. Amer. Math. Soc., t. 70, 1951, p. 219-255).

[25] K. KURATOWSKY, Topologie II, 3e éd. (Varsovie, 1961).

[26] K. D. MAGILL Jr, A note on compactifications (Math. Zeit., t. 94, 1966 p. 322-325).

[27] E. MICHAEL, Continuous selections I (Ann. Math., t. 63, 1956, p. 361-382).

[28] E. MICHAEL, Continuous selections II (Ann. Math., t. 64, 1956, p. 562-580).

[29] G. K. PEDERSEN, Measure theory for C^*-algebras (Math. Scand., t. 19, 1966, p. 131-145).

[30] G. K. PEDERSEN, Measure theory for C^*-algebras II (Math. Scand., t. 22, 1968, p. 63-74).

[31] G. K. PEDERSEN, A decomposition theorem for C^*-algebras (Math. Scand., t. 22, 1968, p. 266-268).

[32] F. PERDRIZET, Topologie et trace sur les C^*-algèbres (Bull. Soc. Math. Fr., t. 99, 1971, p. 193-239).

[33] Séminaire H. CARTAN, Espaces fibrés et homotopie, t. 2, 2e éd. (Paris, Secrétariat mathématique, 1956).

[34] N. STEENROD, The topology of fibre bundles (Princeton University Press, Princeton, 1951).

[35] A. K. STEINER and E. F. STEINER, Compactifications as closures of graphs (Fund. Math., t. 63, 1968, p. 221-223).

INDEX DES NOTATIONS

INDEX DES DEFINITIONS

(Texte définitif reçu le 10 janvier 1972)

Claire DELAROCHE
24 rue Berbier du Mets
75 - PARIS 13