MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

BERNARD DEBORD

Caractérisation des matrices des préférences nettes et méthodes d'agrégation associées

Mathématiques et sciences humaines, tome 97 (1987), p. 5-17

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1987__97__5_0>

Math. Sci. hum. (*25*^{e} année, n°97, *1987*, p.5-17)

CARACTERISATION DES MATRICES DES PREFERENCES NETTES ET METHODES D'AGREGATION ASSOCIEES

Bernard DEBORD * **

Le cadre de cet article est la théorie du choix social telle que ses précurseurs Borda [1781] et Condorcet [1785] l'ont définie. Nous supposerons donc que m votants veulent classer n objets, chaque votant exprimant ses préférences sur les n objets par une relation de préférence (ordre total, préordre total, quasi-ordre...). L'ensemble de ces m relations constitue un profil où l'apparition d'"effet Condorcet" est malheureusement monnaie courante; une pléiade de méthodes ont été proposées afin d'agréger, malgré tout, les préférences des votants en un choix collectif.

Parmi ces méthodes, nombreuses sont celles qui utilisent comme information de départ, non pas directement le profil, mais en fait la matrice des préférences $A=(a_{ij})$ où a_{ij} représente le nombre de votants qui préfèrent le ième objet au jème objet. La caractérisation de ces matrices a suscité de nombreuses études (G. Th. Guilbaud [1970], N. Megiddo [1977], H. P. Young [1978], T. Dridi [1981]...) mais le problème n'est pas résolu à ce jour.

Le but de cet article est la caractérisation d'une autre matrice tout aussi classique: la matrice des préférences nettes $B=(b_{ij})$ où $b_{ij} = a_{ij} - a_{ji}$. Ces deux problèmes sont très proches dans leur formulation, nous verrons cependant qu'ils sont très éloignés quant à leur complexité.

---

* Laboratoire de Structures Discrètes et Didactique, Institut IMAG, Grenoble.

** Cet article a bénéficié des critiques et suggestions du Comité de Lecture, à qui l'auteur adresse de vifs remerciements. (Manuscrit reçu en juin 1986).

La construction de méthodes d'agrégation ne sera pas envisagée ici; par contre nous caractériserons celles qui utilisent comme seule information de départ les matrices B.

*

* *

Dans une première partie, nous proposerons quatre conditions qui caractérisent l'information utilisée par les méthodes d'agrégation. La seconde partie présentera une caractérisation des matrices des préférences nettes construites à partir d'ordres et de préordres totaux.

1. QUATRE CONDITIONS D'INVARIANCE (POUR UNE METHODE D'AGREGATION).

1.1. Définitions et notations.

Soit $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un ensemble de n objets. On suppose que m votants expriment leurs préférences sur les n objets de X selon une relation binaire totale sur X, P, que l'on appelera **relation de préférence**. La relation P se décompose en sa partie asymétrique S ($xSy \Leftrightarrow xPy$ et non yPx), et sa partie symétrique I ($xIy \Leftrightarrow xPy$ et yPx); on a bien sûr $P = S \cup I$. S peut être interprétée comme la préférence stricte: x_i S x_j si et seulement si x_i est préféré strictement à x_j. I peut être interprétée comme l'indifférence: x_i I x_j si et seulement si x_j et x_i ne peuvent être différenciés (pour les préordres nous dirons ex aequo). En imposant des conditions supplémentaires aux relations S et I, on peut modéliser diverses variétés de préférences comme les ordres totaux, les préordres totaux, les quasi-ordres, les ordres d'intervalle…

Une manière totalement symétrique de considérer le problème consisterait à supposer que les m votants expriment leurs préférences sur les n objets de X selon S, I serait alors interprétée comme la relation d'incomparabilité.

Codage des relations de préférence:

Pour chaque relation de préférence (pour chaque votant), et pour chaque couple d'objets (x_i, x_j) l'un des trois cas suivants, et un seulement, est vérifié:

- x_i est strictement préféré à x_j;
- x_j est strictement préféré à x_i
- x_i et x_j sont indifférenciés.

Pour chaque couple d'objets, et pour le votant k, on associe la variable b_{ijk}, qui prend respectivement les valeurs 1 , -1 ou 0 dans chacun des cas précédents. La relation de préférence du votant k, P_k , sera donc définie par les n(n-1) valeurs de b_{ijk}. Comme $b_{ijk} = -b_{jik}$, on pourrait se contenter de n(n-1)/2 valeurs, mais ce serait faire jouer un rôle particulier à certains couples d'objets; par conséquent nous accepterons une certaine redondance dans le codage des relations de préférence.

DEFINITION 1: On appelle profil sur X tout m-uplet $\Pi = (P_1, P_2, \ldots, P_m)$ de m relations de préférence sur X. m peut être nul, le profil alors défini est vide.

Notations:
$\pi(i,j)$ représente le nombre de relations de préférence du profil Π qui rangent x_i strictement avant x_j.
$\pi(i=j)$ représente le nombre de relations de préférence du profil Π où x_i et x_j sont indifférenciés.
Comme les profils sont construits à partir de relations totales, les nombres $\pi(i,j)$ et $\pi(i=j)$ vérifient la propriété de **somme constante**:

$$\forall\ i \neq j \quad \pi(i,j) + \pi(j,i) + \pi(i=j) = m\ .$$

Si P_k est une relation de préférence, on notera $-P_k$ la relation inverse obtenue en inversant les préférences strictes de P_k ($-P_k$ est souvent appelée relation réciproque de P_k). L'utilisation de cette notation non classique se justifiera à l'usage; on peut déjà remarquer que du point de vue du codage, l'inversion d'une relation de préférence revient à inverser le codage: pour un couple d'objets donné, la variable b_{ijk} est transformée en $-b_{ijk}$ dans la relation inverse.

Pour des raisons de commodité, introduisons la notion de profil inverse par le biais suivant: si $\Pi = (P_1, P_2, \ldots, P_m)$ est un profil, on notera $-\Pi$ le profil $-\Pi = (-P_1, -P_2, \ldots, -P_m)$.

Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de relations de préférence tel que: $S \in \mathfrak{S} \Rightarrow -S \in \mathfrak{S}$. Cet ensemble désignera l'éventail des relations de préférence acceptables pour les votants; c'est à dire, selon le contexte, l'ensemble des ordres, des préordres…
$\mathfrak{S}^m$ représente donc l'ensemble des profils sur $\mathfrak{S}$ à m éléments.
L'ensemble de tous les profils sera noté $\mathfrak{D} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathfrak{S}^m$.

DEFINITION 2: On appellera méthode d'agrégation toute application $f : \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{A}$, l'ensemble d'arrivée $\mathfrak{A}$ pouvant être quelconque.

Cette définition regroupe des modélisations très différentes de la notion d'agrégation, que l'on différencie en particularisant les ensembles de départ et d'arrivée.

1.2. Information utile.

Dans ce paragraphe, nous allons définir quatre conditions qui permettent de caractériser l'information utilisée par les méthodes d'agrégation qui les vérifient.

La première condition, très classique, exprime que la méthode d'agrégation n'introduit aucune discrimination parmi les votants. Soit σ une permutation sur 1..m et $\Pi = (P_1, P_2, \ldots, P_m)$ un profil, notons Π^σ le profil $(P_{\sigma(1)}, P_{\sigma(2)}, \ldots, P_{\sigma(m)})$.

CONDITION I. Anonymat:

Une méthode d'agrégation f est anonyme si et seulement si pour toute permutation σ, $f(\Pi) = f(\Pi^\sigma)$.

Cette condition permet de définir la notion de "somme" -et de "différence"- de deux profils, dans un sens qui est bien en accord avec l'intuition. Soit Π_1 (resp Π_2) un profil construit à partir de m_1 (resp m_2) relations de préférence. Le profil $\Pi_1 + \Pi_2$ sera le profil constitué de la concaténation des $m_1 + m_2$ relations de préférence qui constituent Π_1 et Π_2. Si une méthode d'agrégation vérifie la condition I alors il est facile de vérifier que:

1- $f(\Pi_1 + \Pi_2) = f(\Pi_2 + \Pi_1)$;

2- $f(\Pi_1 + (\Pi_2 + \Pi_3)) = f((\Pi_1 + \Pi_2) + \Pi_3)$.

La deuxième condition est que, pour une paire d'objets quelconque, l'opinion de n'importe quel votant a la même influence sur le résultat fourni par la méthode d'agrégation. Si Π est un profil, nous noterons A la matrice usuelle des préférences par paires: $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = \pi(i,j)$.

CONDITION II. A-invariance:

Une méthode d'agrégation f est dite A-invariante si et seulement si : $A_1 = A_2 \Rightarrow f(\Pi_1) = f(\Pi_2)$

La condition II est une généralisation de la précédente. Nous allons maintenant définir une troisième condition qui englobe elle-même l'A-invariance.

DEFINITION 3: Si Π est un profil, on appelle matrice des préférences nettes associée à Π la matrice $B=(b_{ij})$ $i=1..n$, $j=1..n$ dont les coefficients sont définis par: $i\neq j \Rightarrow b_{ij} = \pi(i,j) - \pi(j,i)$.

Les coefficients de la matrice B peuvent être définis de manière équivalente par l'égalité:

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ijk}$$

Remarque 1: Cette nouvelle définition des coefficients de B nous permet de voir facilement que si Π_1 et Π_2 sont deux profils sur $\mathfrak{S}$ alors le profil $\Pi_1 + \Pi_2$ a pour matrice des préférences nettes associée $B_1 + B_2$. De plus, si B est la matrice des préférences nettes associée à Π, alors la matrice des préférences nettes associée à $-\Pi$ est $-B$.

Cette remarque nous servira constamment dans toutes les démonstrations.

CONDITION III. B-invariance:

Une méthode d'agrégation f est dite B-invariante si et seulement si : $B_1 = B_2 \Rightarrow f(\Pi_1) = f(\Pi_2)$

Nous allons maintenant déterminer une classe de profils qui, si on les ajoute à un profil quelconque, laissent invariant le résultat de la méthode d'agrégation. La condition qui en résulte est, d'un certain coté, similaire à la condition de "positive responsiveness" de May [1952]. Il s'agit, non pas de définir la plus petite modification du profil qui induit une modification du résultat, mais de définir quelles modifications le laissent inchangé.

Propriété d'égalité:

Un profil Π vérifie la **propriété d'égalité** si et seulement si $i\neq j \Rightarrow \pi(i,j) = \pi(j,i)$.

CONDITION IV. E-invariance:

Une méthode d'agrégation f est E-invariante si et seulement si: si Π est un profil quelconque alors pour tout profil Π_e vérifiant la propriété d'égalité $f(\Pi + \Pi_e) = f(\Pi)$.

Cette condition est l'une des hypothèses centrales de cet article. Elle suppose en particulier que si tous les votants considèrent les objets comme ex aequo à l'exclusion d'un "original", alors c'est l'opinion de cet "original" qui prévaudra! Cette hypothèse peut néanmoins s'imposer lorsque le but recherché est de départager à tout prix les objets. C'est d'ailleurs exactement ce que prévoit la règle majoritaire (ce qui explique que dans les commissions "paritaires", le président ait voix prépondérante en cas d'ex aequo).

L'E-invariance peut aussi être considérée comme une condition de "consistance faible". H. P. Young [1974] puis A. Levenglick & H. P. Young [1978] définissent la consistance par $f(\Pi_1)\cap f(\Pi_2)\neq\emptyset \Rightarrow f(\Pi_1+\Pi_2)=f(\Pi_1)\cap f(\Pi_2)$; et la "cancellation property" par: si Π est un profil qui vérifie la propriété d'égalité alors $f(\Pi)=\mathfrak{A}$. Une méthode qui vérifie ces deux propriétés vérifie aussi l'E-invariance.

THEOREME 1: Une méthode d'agrégation est B-invariante si et seulement si elle est anonyme et E-invariante.

Preuve.

Il est facile de vérifier la condition suffisante. En effet, par définition les coefficients de la matrice des préférences nettes ne dépendent que de $\pi(i,j)$; f est donc anonyme. De plus, si l'on fait la somme d'un profil vérifiant la propriété d'égalité et d'un profil quelconque, la matrice des préférences nettes de ce dernier est identique à celle du résultat de la somme des deux profils; la méthode d'agrégation fournit donc le même résultat; elle est E-invariante.

Pour la condition nécessaire, considérons deux profils Π_1 et Π_2 qui sont associés à une même matrice des préférences nettes. En d'autres termes, $\forall\ i\neq j$ $\pi_1(i,j) - \pi_1(j,i) = \pi_2(i,j) - \pi_2(j,i)$. Ce que l'on peut traduire en: $\forall\ i\neq j$ $\pi_2(i,j) + \pi_1(j,i) = \pi_2(j,i) + \pi_1(i,j)$. Soit $\Pi_3 = \Pi_2 - \Pi_1$, d'après la relation ci-dessus, Π_3 vérifie la propriété d'égalité. Comme f est E-invariante, $f(\Pi_1) = f(\Pi_1+\Pi_3)$. De même, $\Pi_1-\Pi_1$ vérifie la propriété d'égalité, donc $f(\Pi_2) = f(\Pi_2+(\Pi_1-\Pi_1))$. Comme f est anonyme, $f(\Pi_1+\Pi_3)$ est égal à $f(\Pi_1+(\Pi_2-\Pi_1))$ qui lui-même est égal à $f(\Pi_2+(\Pi_1-\Pi_1))$. En réunissant ces quatre égalités, on obtient le résultat final: $f(\Pi_1) = f(\Pi_2)$. Si Π est un profil et B sa matrice des préférences nettes associée, on peut donc écrire $f(\Pi) = f(B)$ ce qui démontre la condition nécessaire.

♦

Notons que si l'on ne connait que la matrice B, on ne peut utiliser de procédure d'agrégation à seuil (x_i préféré collectivement à x_j si $\pi_{ij} \geq s.m$) -sauf si s = 1/2- et en particulier la règle d'unanimité (ce qui ne veut pas dire qu'une méthode B-invariante ne puisse pas vérifier une telle règle). Ces conditions d'anonymat et d'E-invariance semblent cependant très raisonnables; de fait, elles sont vérifiées par de nombreuses méthodes d'agrégation.

Citons, en suivant par exemple la terminologie définie par Fishburn [1977], les méthodes d'agrégation de Borda, Condorcet, Kemeny, Nanson, ainsi que les méthodes définies par Arrow & Raynaud [1986].

COROLLAIRE: Une méthode d'agrégation est B-invariante si et seulement si elle est A-invariante et E-invariante.

Ce corollaire met en évidence la relation entre matrices des préférences et matrices des préférences nettes. Les problèmes de caractérisation de ces deux types de matrices sont effectivement reliés; néanmoins, ils présentent une grande différence de complexité. En effet, le paragraphe 2 met en évidence, pour quelques ensembles de relations de préférence $\mathfrak{S}$, la caractérisation de l'ensemble des matrices des préférences nettes associées.

2. CARACTERISATION DES MATRICES DES PREFERENCES NETTES.

Remarquons d'abord que si B est une matrice des préférences nettes, alors elle vérifie la propriété de **somme nulle**: $i \neq j \Rightarrow a_{ij} + a_{ji} = 0$. Nous allons commencer par mettre en évidence quelques propriétés des matrices à "somme nulle". Nous aborderons ensuite le problème de la caractérisation des matrices des préférences nettes.

2.1. Les matrices à somme nulle.

DEFINITION 4: Une matrice $C=(c_{ij})$ $i=1..n$, $j=1..n$ est dite à somme nulle si et seulement si elle vérifie les deux propriétés:

1-$\forall$ $i \neq j$ $c_{ij} \in \mathbb{Z}$

2-$\forall$ $i \neq j$ $c_{ij} + c_{ji} = 0$.

On notera C_{ij} la matrice à somme nulle dont tous les éléments sont nuls sauf le coefficient de la ligne i et de la colonne j qui est égal à 1, et le coefficient de la ligne j et de la colonne i qui est égal à -1.

LEMME 1: L'ensemble des matrices C_{ij} pour $1 \leq i < j \leq n$ est un système libre et générateur de l'ensemble des matrices à somme nulle muni de l'addition et de la multiplication par un entier relatif.

Preuve.

Elle est laissée au soin du lecteur.

Remarquons tout de même que l'ensemble des matrices à somme nulle muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire forme une structure de module sur l'anneau $(\mathbb{Z},+,.)$. Cette structure est l'analogue de celle d'espace vectoriel sur $(\mathbb{Q},+,.)$ mise en évidence et utilisée par Young [1974], mais l'extension au corps des rationnels ne s'impose pas ici.

Nous avons maintenant assez d'éléments pour démontrer les théorèmes de caractérisation.

2.2. Cas des profils constitués d'ordres totaux.

THEOREME 2: Une matrice B est une matrice des préférences nettes obtenue à partir d'un profil constitué d'ordres totaux si et seulement si B est une matrice à somme nulle et si elle vérifie l'une des deux propriétés

1-$\forall\ i \neq j$ $\qquad b_{ij}$ est pair;

2-$\forall\ i \neq j$ $\qquad b_{ij}$ est impair.

La démonstration de ce résultat est obtenue en regroupant les 3 lemmes ci-dessous.

LEMME 2: Soit Π un profil constitué de m ordres totaux,

1- si m est pair alors pour tout i différent de j, b_{ij} est pair;

2- si m est impair alors pour tout i différent de j, b_{ij} est impair.

Preuve.

Soit Π un profil constitué de m ordres totaux. Comme le profil est constitué d'ordres totaux, la propriété de somme constante s'écrit: $\forall\ i \neq j$ $\pi(i,j) + \pi(j,i) = m$. De plus, par définition $b_{ij} = \pi(i,j) - \pi(j,i)$. On en déduit donc $b_{ij} = 2\pi(i,j) - m$. Suivant la parité de m, l'une des deux propriétés énoncées est vérifiée, ce qui démontre le lemme 2.

♦

LEMME 3: Si C est une matrice à somme nulle dont tous les coefficients sont pairs alors C est une matrice des préférences nettes associée à un profil constitué d'ordres totaux.

Preuve.

Soit Π_{ij} (pour i<j) le profil constitué des deux ordres suivants:

$x_1 \dots x_{i-1}\ x_{i+1} \dots\ x_{j-1}\ x_{j+1} \dots\ x_n\ x_i\ x_j$;

$x_i\ x_j\ x_n \dots x_{j+1}\ x_{j-1} \dots\ x_{i+1}\ x_{i-1} \dots\ x_1$.

Soit B_{ij} sa matrice des préférences nettes associée. Il est facile de vérifier que $B_{ij} = 2C_{ij}$.

Soit C une matrice à somme nulle dont tous les coefficients sont pairs.

D'après le lemme 1: $C = \sum_{i<j} c_{ij}C_{ij} = \sum_{i<j} (c_{ij}/2)\ B_{ij}$

C est donc la matrice des préférences nettes associée au profil

$$\Pi = \sum_{i<j} (c_{ij}/2) \quad \Pi_{ij}\ .$$

♦

LEMME 4: Si C est une matrice à somme nulle dont tous les coefficients sont impairs, alors C est une matrice des préférences nettes associée à un profil constitué d'ordres totaux.

Preuve.

Soit C une matrice à somme nulle dont tous les coefficients sont impairs.

Soient D et E les matrices définies par:

si $i>j$ alors $d_{ij} = c_{ij} - 1$ et $e_{ij} = 1$;

si $i<j$ alors $d_{ij} = - d_{ji}$ et $e_{ij} = -1$.

Par construction $C = D + E$. Or D est une matrice à somme nulle dont tous les coefficients sont pairs; D est donc une matrice des préférences nettes associée à un profil constitué d'ordres totaux. Le profil constitué de l'unique ordre $x_1x_2 \ldots x_n$ admet E pour matrice des préférences nettes associée. La somme des deux profils définis ci-dessus constitue donc un profil formé d'ordres totaux dont la matrice des préférences nettes associée est C.

♦

Le théorème est démontré en exhibant un profil avec un nombre m bien déterminé d'ordres totaux (par exemple $m = \sum_{i<j} | c_{ij}|$), ce qui soulève évidemment la question du m minimal -problème équivalent à la caractérisation des matrices A. On peut se poser une autre question, de réponse peut-être moins ardue: s'il existe un profil de matrice des préférences nettes B, avec m ordres, en existe-t-il avec m + k ordres? (Evidemment oui pour k pair).

2.2. Cas des profils constitués de préordres totaux.

La notion d'ordre total est très restrictive, puisque l'indifférence est la relation d'égalité. La notion de préordre total constitue une première extension; l'indifférence est alors une relation d'équivalence dont les classes sont les objets ex aequo.

Notation: Un préordre total sera noté de manière identique à un ordre total à la seule différence près que les objets qui font partie d'une même classe d'ex aequo seront entre parenthèses.

THEOREME 3: Une matrice B est une matrice des préférences nettes obtenue à partir d'un profil constitué de préordres totaux si et seulement si B est une matrice à somme nulle.

Preuve.

Si B est une matrice des préférences nettes alors B est une matrice à somme nulle.

Réciproquement, soit C une matrice à somme nulle. Soit Π_{ij} $(i<j)$, le profil constitué des deux préordres suivants:

$$x_i\ x_j\ \ x_1 \dots x_{i-1}\ x_{i+1} \dots x_{j-1}\ x_{j+1} \dots x_n\ ;$$

$$x_n \dots x_{j+1}\ x_{j-1} \dots x_{i+1}\ x_{i-1} \dots x_1 (\, x_i\ x_j) \quad .$$

Soit B_{ij} sa matrice des préférences nettes associée. Il est facile de vérifier que $B_{ij} = C_{ij}$.

D'après le lemme 1: $$C = \sum_{i<j} c_{ij} C_{ij} = \sum_{i<j} c_{ij}\, B_{ij}$$

C est donc la matrice des préférences nettes associée au profil

$$\Pi = \sum_{i<j} c_{ij}\ \ \Pi_{ij} \ .$$

♦

Remarque 2: Dans les cas où les relations de préférence sont des extensions de la notion de préordre total (quasi-ordres, ordres d'intervalle...), le problème de la caractérisation des matrices des préférences nettes se trouve du même coup résolu: c'est l'ensemble des matrices à somme nulle. En d'autres termes, les résultats potentiels de la méthode d'agrégation ne seront pas accrus en relâchant la notion de préordre total! Le problème reste entier si l'on impose aux relations considérées de ne pas être des préordres totaux.

Remarque 3: Le profil Π constitué d'un préordre unique où les n objets sont classés ex aequo, vérifie la propriété d'égalité. Soit Π_e un profil vérifiant la propriété d'égalité; d'après la condition d'E-invariance $f(\Pi) = f(\Pi_e)$; et donc, du point de vue du résultat de la méthode d'agrégation, tous ces profils sont équivalents. En particulier, si l'ensemble d'arrivée de f est l'ensemble des préordres, il est naturel de postuler $f(\Pi) = X^2$ (préordre où tous les objets sont ex aequo), on obtient la condition intéressante $f(\Pi_e) = X^2$ pour tout profil "égalitaire".

Remarque 4: Soit Π_1 le profil constitué du seul préordre $P=Y_1Y_2 \dots Y_k$ où les Y_i constituent une partition de X; soit B_1 sa matrice des préférences nettes associée. Soit Π_2 un profil constitué de m ordres totaux sur X, $O_1\ O_2 \dots O_m$, tels que les O_i sont construits en prenant des orientations particulières de P et tels que la restriction de Π_2 à un Y_i quelconque vérifie la propriété d'égalité. Soit B_2 la matrice des préférences nettes associée à Π_2. D'après la remarque 3, il est naturel de postuler que $f(\Pi_1) = f(\Pi_2)$. Il est facile de vérifier que $mA_1 = A_2$. Comme pour la remarque 3, il est naturel de poser $f(\Pi_1) = P$ avec les conséquences analogues.

Remarque 5: Soit Π un profil constitué de k préordres $P_1\ P_2 ... P_k$. Soit Π_i un profil constitué de m_i ordres totaux et construit à partir du préordre P_i selon la technique exposée dans la remarque 4. Soit Π_0 le profil défini par:

$$\Pi_0 = \sum_{i=1}^{k} \frac{ppcm(m1...mk)}{mi}\ \Pi_i$$

Par extension des remarques 3 et 4 il est naturel de postuler $f(\Pi) = f(\Pi_0)$. Si B et B_0 sont respectivement les matrices des préférences nettes des profils Π et Π_0, il est facile de vérifier que $ppcm(m_1...m_k)\ B = B_0$.

Les trois remarques précédentes nous amènent à penser qu'une méthode d'agrégation ne peut être étendue de manière satisfaisante aux profils constitués de préordres totaux que si elle est "homogène" (cf ci-dessous).

2.3. Cas des méthodes d'agrégation homogènes.

Plaçons nous dans le cas où le profil est constitué d'ordres totaux et où la méthode d'agrégation est "homogène", condition définie ci-dessous.

CONDITION V. Homogénéité:

Soient Π_1 et Π_2 deux profils quelconques tels qu'il existe un entier naturel k vérifiant $kB_1 = B_2$. Une méthode d'agrégation f est dite homogène si et seulement si $f(\Pi_1) = f(\Pi_2)$.

THEOREME 4: Si f est une méthode d'agrégation (de profils) d'ordres totaux qui est anonyme, E-invariante et homogène alors il existe une unique extension de f à l'ensemble des matrices à somme nulle qui vérifie ces trois conditions.

Preuve.

Soit f une méthode d'agrégation qui vérifie les trois conditions. Comme f est anonyme et E-invariante alors elle peut être définie sur l'ensemble des matrices des préférences nettes. La condition d'homogénéité se traduit alors par: si B est une matrice des préférences nettes alors $f(B+B) = f(B)$. Si l'on étend cette propriété aux matrices à somme nulle, alors f est bien définie pour chacune de ces matrices. En effet, soit C une matrice à somme nulle, C + C est une matrice à somme nulle dont tous les coefficients sont pairs donc, d'après le lemme 2, C + C est une matrice des préférences nettes. f(C+C) est donc bien définie, grâce à la propriété d'homogénéité f(C) est donc définie du même coup de manière unique.

♦

3. EN GUISE DE CONCLUSION.

Les conditions d'anonymat et d'E-invariance permettent donc de définir une méthode d'agrégation comme une application dont l'ensemble de départ est l'ensemble des matrices des préférences nettes. Il peut paraître surprenant que la variété des résultats de f ne soit pas accrue si les relations de préférence sont étendues à des notions plus générales que les préordres (ou que les ordres si f est homogène).

Cette question me suggère deux réponses. Premièrement, d'un point de vue pratique, le nombre de votants considérés est borné; il est alors clair que l'ensemble des matrices des préférences nettes s'accroît strictement lorsque les votants expriment leurs préférences selon des relations de moins en moins restrictives. La variété des résultats augmente donc bien avec la liberté des votants.

D'un point de vue théorique, il est bien sûr intéressant de considérer des votants en nombre arbitrairement grand. Dans ce cas, il apparaît que la condition d'E-invariance est d'une importance déterminante -l'utilisation de la matrice B se traduisant par une perte d'information, et particulièrement du nombre m de votants. La supprimer revient à rassembler les informations utiles dans la matrice des préférences A, et la caractérisation de telles matrices est un problème non résolu à ce jour!

L'exemple suivant illustre bien les remarques précédentes: la matrice $a_{xy} = a_{yz} = 2$, $a_{xz} = a_{zx} = 1$, $a_{yx} = a_{zy} = 0$, est une matrice des préférences de deux tournois, mais non de deux ordres totaux, alors que la matrice B correspondante est une matrice des préférences nettes pour un profil de quatre ordres totaux.

BIBLIOGRAPHIE

Arrow K. J. & Raynaud H., *Social choice and multicriterion decision-making,* Cambridge, M.I.T. Press,1986.

Borda J. C. de, *Mémoire sur les élections au scrutin,* Histoire de l'Académie royale des sciences, Paris, Imprimerie royale, 1781.

Condorcet, *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix,* Paris, Imprimerie royale, 1785 (réimpression: New York, Chelsea publishing, 1972).

Dridi T., "Sur les distributions binaires associées à des distributions ordinales", *Math. Sci. hum.,* 69, 1981.

Fishburn P. C., "Condorcet social choice functions", *SIAM J. Appl. Math,* 33, 1977, 469-489.

Guilbaud G. Th., "Préférences stochastiques", *Math. Sci. Hum.,* 32, 1970.

Levenglick A. & Young H. P., "A consistant extension of Condorcet's election principle", *SIAM J. Appl. Math,* 35, 1978, 285-300.

May K. O., "A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decision", *Economica* ,20, 1952, 680-684.

Megiddo N., "Mixtures of order matrices and generalized order matrices", *Discrete Math.* ,19, 1977, 177-181.

Young H. P., "An axiomatization of Borda's rule", *Journal of Economic Theory* ,9, 1974, 43-52.

Young H. P., "On permutation and permutation polytopes", *Math. Programming Study* ,8, 1978, 128-140.