MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

M. BARBUT

Une classe de quasi-groupes qui peuvent servir à représenter des « moyennes »

Mathématiques et sciences humaines, tome 31 (1970), p. 33-37
<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1970__31__33_0>

M.S.H. (8e année, n° 31, 1970, p. 33-37)

UNE CLASSE DE QUASI-GROUPES QUI PEUVENT SERVIR A REPRÉSENTER DES « MOYENNES »

par

M. BARBUT[1]

Cette note, rédigée il y a près de quatre ans, est destinée à montrer certains liens entre les abéliens, et les groupoïdes de « moyenne » (cf. article de C. d'Adhémar, dans le présent numéro).

1. QUASI-GROUPES SYMÉTRIQUES POSSÉDANT UN ÉLÉMENT IDEMPOTENT

Soit (G, .) un quasi-groupe :

$$\forall\, a, \forall\, b, \quad \exists\, x \text{ unique, tel que} \quad a \,.\, x = b$$
$$\exists\, y \text{ unique, tel que} \quad y \,.\, a = b.$$

(G, .) est dit symétrique, si et seulement s'il satisfait à la condition d'*échange des moyens* :

$$\forall\, x, \forall\, y, \forall\, z, \forall\, t : (x \,.\, y) \,.\, (z \,.\, t) = (x \,.\, z) \,.\, (y \,.\, t) \tag{M}$$

On suppose en outre ici qu'au moins un élément a de G est idempotent :

$$a \,.\, a = a.$$

On vérifie que : $\forall\, x$, $a\,(xa) = (ax)\,a$; on peut écrire : $a\,x\,a$.

a) Automorphismes élémentaires de G définis au moyen d'un idempotent.

— Les translations :

$$g_a : x \mapsto a \,.\, x$$
$$d_a : x \mapsto x \,.\, a$$

car :

$$a \,.\, (x \,.\, y) = (a \,.\, a)\,(x \,.\, y) = (ax)\,(ay).$$

En outre :

$$g_a \circ d_a = d_a \circ g_a = (x \mapsto axa).$$

— Les inversions :

$$i_a : x \mapsto i_a(x) \qquad (x \,.\, i_a(x) = a)$$
$$j_a : x \mapsto j_a(x) \qquad (j_a(x) \,.\, x = a)$$

1. Centre de Mathématique Sociale, EPHE, VIe section.

car :

$$x \,.\, i_a(x) = y \,.\, i_a(y) = a$$

implique :

$$(x \,.\, i_a(x))\,(y \,.\, i_a(y)) = (x \,.\, y)\,(i_a(x) \,.\, i_a(y)) = a \,.\, a = a.$$

En outre :

$$i_a \circ j_a = j_a \circ i_a = I = (x \mapsto x).$$

— Les inverses des translations :

$$g_a^{-1} = \varphi_a \qquad (a \,.\, \varphi_a(x) = x)$$

$$d_a^{-1} = \psi_a \qquad (\psi_a(x) \,.\, a = x).$$

φ_a et ψ_a *ont les propriétés :*

$$\forall\, x, \qquad \varphi_a(a \,.\, x) = \psi_a(x \,.\, a) = x \tag{1}$$

$$\forall\, x, \qquad \varphi_a(x \,.\, a) = \varphi_a(x) \,.\, a \qquad \psi_a(a \,.\, x) = a \,.\, \psi_a(x) \qquad (\varphi_a \circ d_a = d_a \circ \varphi_a) \tag{2}$$

$$\varphi_a \circ \psi_a = \psi_a \circ \varphi_a \tag{3}$$

car :

$$\varphi_a \circ \psi_a = g_a^{-1} \circ d_a^{-1} = (d_a \circ g_a)^{-1} = (g_a \circ d_a)^{-1}$$

$$\varphi_a \circ i_a = i_a \circ \varphi_a \qquad \psi_a \circ j_a = j_a \circ \psi_a \tag{4}$$

D'autre part :

$$\forall\, x, \forall\, y : \qquad \psi_a(x) \,.\, \varphi_a(y) = \psi_a(y) \,.\, \varphi_a(x) \tag{5}$$

En effet :

$$a\,u\,a = a\,v\,a \Rightarrow u = v.$$

Or :

$$\begin{aligned} a\,[\psi_a(x)\,\varphi_a(y)]\,a &= [a\,(\varphi_a(x)\,\psi_a(y))]\,a = [(a\,\psi_a(x))\,(a\,\varphi_a(y))]\,a \\ &= [(a\,\psi_a(x))\,y]\,a = [(a\,\psi_a(x))\,a]\,(y\,a) = [a\,(\psi_a(x))\,a]\,(y\,a) \\ &= (a\,x)\,(y\,a). \end{aligned}$$

De même :

$$a\,[\psi_a(y)\,\varphi_a(x)]\,a = (a\,y)\,(x\,a).$$

La propriété (M) d'échange des moyens implique donc bien (5).

b) Constitution de G en groupe abélien.

1) Posons :

$$x + y = \psi_a(x) \,.\, \varphi_a(y).$$

D'après (5), (G, +) est un isotope principal *commutatif* de (G, .) ; c'est évidemment un quasi-groupe.

a est *élément neutre* pour (G, +) d'après (1) et la définition de φ_a et ψ_a.

Enfin, (G, +) satisfait à la condition (M) :

$$(x + y) + (z + t) = (x + z) + (y + t).$$

(Se servir de la définition de + et de (3) : $\varphi_a \circ \psi_a = \psi_a \circ \varphi_a$).

Tout groupoïde satisfaisant à (M) et ayant un élément neutre, est commutatif et associatif. Donc (G, +) est un groupe abélien (ce qui donne une autre démonstration de (5)).

2) Le groupe abélien (G, +) admet g_a et d_a comme automorphismes, et l'on a :

$$x \,.\, y = d_a(x) + g_a(y)$$

$$\begin{aligned} g_a(x + y) &= a \,.\, (x + y) = a\,(\psi_a(x) \,.\, \varphi_a(y)) = (a\,\psi_a(x) \,.\, (a\,\varphi_a(y)) \\ &= \psi_a(a \,.\, x) \,.\, \varphi_a(a \,.\, y) = g_a(x) + g_a(y) \end{aligned}$$

propriété (2).

c) *Passage inverse* d'un groupe abélien à un quasi-groupe symétrique ayant un idempotent.

Soit $(G, +)$ un abélien admettant deux automorphismes f et g qui commutent :

$$[f \circ g = g \circ f],$$

définissons l'opération. par :

$$x \,.\, y = fx + gy.$$

$(G, .)$ est évidemment un quasi-groupe ; il satisfait à la condition (M) car f et g commutent ; O, élément neutre de $(G, +)$, est idempotent dans $(G, .)$. On a d'ailleurs :

$$x \,.\, O = fx$$
$$O \,.\, x = gx$$
$$x + y = f^{-1} x \,.\, g^{-1} y.$$

2. GROUPES ABÉLIENS ISOMORPHES ENTRE EUX

a) Les groupes abéliens construits à partir de deux idempotents distincts a et b d'un quasi-groupe symétrique sont isomorphes entre eux.

Soit $(G, .)$ un quasi-groupe symétrique, et a et b deux idempotents :

$$a \,.\, a = a \qquad\qquad b \,.\, b = b.$$

Si h est un automorphisme de $(G, .)$ tel que : $h(a) = b$, on a :

$$h \circ \varphi_a = \varphi_b \circ h \quad \text{et} \quad h \circ \psi_a = \psi_b \circ h$$

car :

$$\psi_b (h(x)) \,.\, b = h(x) = h[\psi_a (x) \,.\, a] = h(\psi_a (x)) \,.\, h(a)$$
$$= h(\psi_a (x)) \,.\, \varphi_a (y).$$

L'autre égalité se montre de même.

Si l'on a :

$$x + y = \psi_a (x) \,.\, \varphi_a (y)$$
$$x \oplus y = \psi_b (x) \,.\, \varphi_b (y).$$

On a donc :

$$h(x + y) = h(\psi_a (x)) \,.\, h(\varphi_a (y)) = \psi_b (h(x)) \,.\, \varphi_b (h(y))$$
$$= h(x) \oplus h(y).$$

Or il existe toujours un tel automorphisme ; car il existe u unique tel que : $au = b$.

u est idempotent :

$$au = b = b \,.\, b = (au)(au) = (aa)(uu) = a(uu)$$

D'où : $uu = u$.

La translation $d_u : x \mapsto xu$ est l'automorphisme h voulu.

b) Les quasi-groupes symétriques construits, à partir d'un groupe abélien $(G, +)$ au moyen de deux coupes (f, g), (f', g') d'automorphismes de $(G, +)$ sont isomorphes si et seulement si le couple (f, g) est conjugué de (f', g').

Posons :

$$x \,.\, y = fx + gy$$
$$x \Delta y = f' x + g' y.$$

Si :

$$f' = \alpha f \alpha^{-1} \qquad g' = \alpha g \alpha^{-1},$$

α étant un automorphisme de $(G, +)$, on a :

$$\alpha (x . y) = \alpha (fx + gy) = \alpha fx + \alpha gy = f' \alpha x + g' \alpha y = \alpha x \Delta \alpha y.$$

Réciproquement, si $h : (G, .) \to (G, \Delta)$ est un isomorphisme :

$$h (fx + gy) = f' hx + g' hy \tag{1}$$

D'où :

$$(x = y = O) \qquad hO = a = f' a + g' a$$

$$(y = O) \quad h (fx) = f' (hx) + g' a ; \qquad (x = O) \quad h (gy) = g' (hy) + f' a \tag{2}$$

et :

$$h (fx) + h (gy) = h (fx + gy) + a \tag{3}$$

fx et fy sont arbitraires dans G ; h satisfait donc à :

$$\forall u, \forall v : h (u) + h (v) = h (u + v) + a.$$

Donc si l'on pose :

$$(\forall t), \alpha (t) = h (t) - a$$

α est un automorphisme de $(G, +)$, et satisfait d'après (2) à :

$$\alpha \circ f = f' \circ \alpha \qquad \alpha \circ g = g' \circ \alpha.$$

3. CAS DES QUASI-GROUPES ORDONNÉS

a) Si $(G, .)$ est muni d'un ordre $\leqslant$ compatible avec ., les translations à gauche et à droite sont, par définition, monotones ; donc leurs inverses aussi ; donc $(G, +)$ défini par :

$$x + y = d_a^{-1} (x) . g_a^{-1} (y)$$

est un abélien ordonné, et d_a et g_a sont pour $(G, +, \leqslant)$ des automorphismes *monotones*.

b) Réciproquement, si $(G, + \geqslant)$ est un abélien ordonné, et si f et g sont monotones, et commutent, $(G, ., \geqslant)$ est tel que l'ordre $\geqslant$ est compatible avec :

$$x . y = fx + gy.$$

On remarquera d'ailleurs que si f est un automorphisme monotone de $(G, +, \geqslant)$, tout automorphisme conjugué de f est lui aussi monotone.

4. CAS PARTICULIERS ET APPLICATIONS

a) $(G, .)$ est commutatif si et seulement si sur $(G, +)$, $f = g$. On a alors :

$$x . y = f (x + y)$$

b) $(G, .)$ est idempotent ($\forall x \in G, x . x = x$) si et seulement si : $f + g = I$, où I est la transformation identique de G.

La condition $f + g = I$ entraîne d'ailleurs évidemment, la commutativité de f et g.

Ce cas est intéressant, car si $(G, .)$ est ordonné, l'opération $x . y$ est alors susceptible d'être interprétée comme une « moyenne » ; en effet :

$$x < y \Rightarrow x < x . y < y.$$

Les seules opérations binaires de « moyenne » sur un ensemble ordonné, et telles que la « moyenne » satisfasse aux hypothèses (ces propriétés ne sont pas indépendantes entre elles) :

— être un quasi-groupe,

— idempotence,

— échange des moyens,

— si x est inférieur à y, la moyenne de x et z est inférieure à la moyenne de y et z, quel que soit z,

sont donc obtenues en se donnant un abélien ordonné, ayant deux automorphismes f et g au moins dont la somme soit la transformation identique et qui soient monotones, et en prenant pour « moyenne » de x et y :

$$fx + gy.$$

Ce sont par exemple, les « moyennes pondérées » classiques dans (R, +) et de (Q, +).

c) (G, .) est idempotent et commutatif si et seulement si, (G, +) est divisible par 2 (d'après *a*) et *b*)) ; on a alors :

$$x \cdot y = \frac{x + y.}{2}$$

BIBLIOGRAPHIE

Voir dans le présent numéro p. 31 la bibliographie de l'article de C. d'Adhémar.