MATHÉMATIQUES ET SCIENCES HUMAINES

M. BARBUT

Intermédiarité

Mathématiques et sciences humaines, tome 28 (1969), p. 5-6

<http://www.numdam.org/item?id=MSH_1969__28__5_0>

M.S.H. (7e année, n° 28, 1969, p. 5-6)

INTERMÉDIARITÉ

par

M. BARBUT

Les deux articles de G. Guilbaud et J. Högaasen, que l'on lira ci-dessous, sont les premiers d'une série consacrée, dans la revue, à l'« intermédiarité» ; série constituée, pour l'essentiel, des communications au second colloque d'Aix-en-Provence sur les structures ordonnées et leurs applications aux Sciences Humaines en septembre 1969. (Les travaux du premier colloque, en juillet 1967, doivent être publiés prochainement sous le titre : *Ordres*, travaux du séminaire sur les ordres totaux finis, Aix-en-Provence, juillet 1967, Mouton et Gauthier-Villars, éditeurs.)

Intermédiarité, *mésologie*, de quoi s'agit-il ? La plupart des structures étudiées en mathématiques sont définies par des relations et des opérations *binaires*. Celles-ci ont une généralisation naturelle aux relations ou opérations dites « n-aires», c'est-à-dire telles que les liaisons sont définies non sur des *couples* d'éléments d'un ensemble, mais sur des suites de n éléments, ou « n-uples».

L'étude générale des relations « n-aires» n'a guère été tentée que par quelques logiciens ou algébristes ; par contre, les cas $n = 4$ (par exemple « analogies» du type « x est à y comme z est à t») et $n = 3$ ont été rencontrés et étudiés dans plusieurs domaines particuliers des mathématiques, notamment à propos de la géométrie élémentaire et de ses généralisations.

Le champ couvert par les relations ternaires ($n = 3$) dites d'*intermédiaire*, du type « x est entre y et z», est très vaste tant en mathématiques « pures» que du côté des applications ; en ce qui concerne celles-ci, G. Guilbaud fournit ci-dessous un panorama de celles qui ont été étudiées, ou que l'on peut envisager. Disons simplement ici, que si la plus évidente concerne le vocabulaire du langage spatial : un point situé entre deux autres, d'autres modèles d'organisation font appel à cette notion : l'organisation des couleurs, ou des sons, ou d'autres sensations ; on peut également penser aux opinions, peut-être à certains aspects de la sémantique, etc. Il est en tout cas un domaine dans lequel l'idée d'*intermédiaire* est toujours explicitement ou implicitement présente : c'est celui de l'analyse des données (d'une observation, d'une expérience, etc.), de la statistique descriptive ; un bon résumé statistique, ou un bon ajustement, c'est en effet d'abord, dans la classe des objets mathématiques où l'on a décidé de choisir cet ajustement, un objet *intermédiaire* dans l'ensemble des données observées.

Il y a là une façon d'aborder ces questions de statistique descriptive qui peut être assez féconde, ne serait-ce que du point de vue pédagogique.

Pour donner un sens précis à une relation ternaire d'intermédiaire, quatre voies sont généralement suivies en mathématiques :

— Utiliser une *relation binaire* (par exemple, un ordre) sous-jacente ; dans le cas d'un ordre, on pourra ainsi définir « a est entre b et c» par : $b \leqslant a \leqslant c$; ou bien, dans un réseau fini, on peut dire que le sommet x est entre les sommets y et z si et seulement si x appartient à un chemin de longueur minimum joignant y à z ;

— Se servir d'une *métrique ; d* étant une distance, x est dit entre y et z, si et seulement si $d(y, x) + d(x, z) = d(y, z)$.

— Définir l'intermédiarité à partir d'une *opération binaire* (interprétable comme une « moyenne ») ; l'ensemble des intermédiaires entre y et z est l'ensemble des x engendrés par y et z.

— Enfin, choisir a priori, un système convenable d'axiomes pour la relation ternaire elle-même.

Il est quelques cas où plusieurs de ces méthodes permettent de définir la même structure ou des structures d'une même classe ; le plus célèbre est celui de géométries affines, où « entre » peut être défini par l'ordre (des points sur une droite), par la distance euclidienne (pour les géométries euclidiennes), par l'opération de moyenne pondérée (barycentre), ou par des systèmes d'axiomes construits pour retrouver précisément un espace affine (cf. article de Guilbaud ci-dessous).

Il reste néanmoins un large champ ouvert à la recherche, tant pour obtenir des *présentations* (au moyen d'une relation ternaire d'intermédiaire) de structures bien connues par ailleurs (par exemple, certaines classes de treillis ; un article de B. Monjardet, dans un numéro ultérieur, y introduira), que pour étudier des structures dont la présentation la plus naturelle est d'emblée définie par un jeu d'axiomes pour une relation « être entre » : c'est là que les disciplines utilisant des modèles mathématiques peuvent fournir un apport important.