Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

Christophe Brouillard

Action du groupe de Galois sur les périodes de certaines courbes de Mumford

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, tome 6, nº 2 (1994), p. 363-390

<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1994__6_2_363_0>

Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **6** *(1994), 363–390*

Action du groupe de Galois sur les périodes de certaines courbes de Mumford

par CHRISTOPHE BROUILLARD

RÉSUMÉ – Nous étudions l'action du groupe de Galois sur les périodes des courbes de Mumford qui sont des revêtements cycliques de $\mathbb{P}^1_K$. Lorsque le degré de ce revêtement est premier à la caractéristique résiduelle du corps de base, nous décomposons le réseau des périodes en une somme directe de modules monogènes, le nombre de ces modules monogènes étant déduit de la géométrie de la courbe (théorème 4). Ceci nous permet de donner une condition nécessaire et suffisante pour que le module des périodes soit libre (théorème 5).

ABSTRACT – We study the Galois-action on periods of Mumford curves which are cyclic coverings of $\mathbb{P}^1_K$. When the degree of this covering is prime to the characteristic of the residue field we write the periods lattice as a direct sum of modules generated by one element; the number of such modules is deduced from the geometry of the curve (theorem 4). We give a condition (necessary and sufficient) for the periods-module to be free (theorem 5).

1. Introduction

Soit K un corps algébriquement clos, muni d'une valeur absolue ultramétrique; on suppose ce corps complet pour sa valeur absolue. Soit $\mathcal{C}$ une courbe de Mumford définie sur le corps K (voir [Mum]); on suppose que la courbe de Mumford $\mathcal{C}$ est un revêtement cyclique de $\mathbb{P}^1_K$. L'objet de ce travail est d'étudier l'action du groupe de Galois $\mathcal{G}$ du revêtement $\mathcal{C}$ de $\mathbb{P}^1_K$ sur les périodes de la courbe, et de préciser la structure du $\mathcal{G}$-module des périodes.

Une courbe de Mumford $\mathcal{C}$ sur K est, du point de vue analytique rigide, un quotient Ω/Γ, où Ω est un sous-espace analytique de $\mathbb{P}^1_K$ "sans bord et borné dans aucune direction", et Γ un groupe de Schottky, libre à g générateurs, g étant le genre de la courbe. Une théorie des fonctions thêta, due à Myers [My], Manin et Drinfeld [M-D], Gerritzen [Ge 4], permet de construire analytiquement la jacobienne de $\mathcal{C}$: celle-ci se décrit comme étant le groupe des facteurs d'automorphie des fonctions thêta, modulo le réseau engendré par les facteurs d'automorphie des fonctions thêta qui sont sans

Manuscrit reçu le 9 octobre 1993.

zéros ni pôles; elles est donc de la forme $(K^*)^g/\mathcal{R}$ où $\mathcal{R}$ est un réseau de $(K^*)^g$, le réseau des périodes de $\mathcal{C}$, de rang g le genre de $\mathcal{C}$.

Dans un premier temps, nous donnons une caractérisation des courbes de Mumford qui sont des revêtements cycliques de $\mathbb{P}^1_K$ (proposition 3.1); nous ne faisons aucune hypothèse sur le degré du revêtement. Cette caractérisation porte sur le groupe de Schottky Γ de la courbe, et permet de montrer que les périodes forment un $\mathcal{G}$-module projectif (proposition 3.5). De là, nous sommes conduit à étudier les rangs locaux de ce module; nous avons une formule (lemme 3.8) qui, par des calculs élémentaires, nous permet de savoir si le rang du module projectif est défini.

Nous supposons que le degré du revêtement $\mathcal{C}$ de $\mathbb{P}^1_K$ est premier à la caractéristique résiduelle du corps K. Une caractérisation géométrique des revêtements cycliques de $\mathbb{P}^1_K$ qui sont des courbes de Mumford (proposition 4.4) permet de décomposer le $\mathcal{G}$-module projectif en somme directe de $\mathcal{G}$-modules monogènes, ceux-ci sont en nombre $\frac{r-2}{2}$ où r désigne le nombre de points de ramification de $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{P}^1_K$. Cette décomposition n'est pas unique en général; en revanche, elle majore les rangs locaux par $\frac{r-2}{2}$.

Cette majoration et le lemme 3.8 établissent que le $\mathcal{G}$-module des périodes est libre de rang $\frac{r-2}{2}$ si et seulement si la courbe est totalement ramifiée sur $\mathbb{P}^1_K$ (théorème 5); de plus, le rang du module projectif est défini si et seulement si le module des périodes tensorisé par $\mathbb{Q}$ est un $(\mathcal{G}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q})$-module libre (théorème 5).

De tels résultats rendaient tentant de continuer cette étude sur un système de $2g$ périodes, comme c'est le cas sur $\mathbb{C}$ ou encore sur notre corps K selon le point de vue de Fontaine et Messing [F-M]. Cela nous a conduit à examiner l'action du groupe de Galois sur $H^1_{DR}(\mathcal{C}/K)$, le premier groupe de la cohomologie de De Rham de $\mathcal{C}$ sur K. À l'aide de résultats récents de L. Gerritzen ([Ge 2], [Ge 3]) qui décrivent $H^1_{DR}(\mathcal{C}/K)$, on détermine lorsque le degré du revêtement $\mathcal{C}$ de $\mathbb{P}^1_K$ est premier à la caractéristique résiduelle du corps K, et lorsque le corps K est de caractéristique zéro, un réseau de $H^1_{DR}(\mathcal{C}/K)$ qui se décompose en une somme directe de $\mathcal{G}$-modules monogènes en nombre $r-2$, ce réseau étant de plus $\mathcal{G}$-libre, de rang $r-2$, si et seulement si la ramification de $\mathcal{C}$ sur K est totale (théorème 6).

On peut citer autour de ce type de problème le travail de Weil [W] qui cherche à exprimer les périodes de certains revêtements de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ en termes des coefficients de l'équation affine associée, et celui de Teitelbaum qui fait la même étude pour les courbes de Mumford de genre 2 uniquement.

Je remercie le referee pour l'ensemble des commentaires, des remarques, et des suggestions qu'il a bien voulu me faire et qui m'ont été d'un grand bénéfice.

2. Rappels et notations

Pour les généralités sur les courbes de Mumford, on renvoie à [Mum]; notre point de vue est celui de [G-vdP]. Pour les généralités de géométrie rigide, on renvoie à [B-G-R], [F-vdP] et [G-vdP].

Soit K un corps algébriquement clos, muni d'une valeur absolue ultramétrique; on note $K^\circ = \{x \in K;\ |x| \leq 1\}$, $K^{\circ\circ} = \{x \in K;\ |x| < 1\}$. Le quotient $\overline{K} = K^\circ / K^{\circ\circ}$ est un corps appelé *corps résiduel de K*; l'entier $\mathrm{car}(\overline{K})$ s'appelle *la caractéristique résiduelle de K*.

Courbes de Mumford : soit Γ un sous-groupe de Schottky de $\mathrm{PGL}(2, K)$ de rang g (par définition Γ est un groupe libre discontinu de rang g); soit $\Omega_\Gamma = \mathbb{P}^1_K \setminus \mathcal{L}_\Gamma$ où $\mathcal{L}_\Gamma$ désigne des points limites de Γ; le quotient Ω_γ/Γ a une structure d'espace analytique isomorphe (au sens de la géométrie analytique rigide), à l'analytifiée d'une courbe projective $\mathcal{C}$ sur le corps K, régulière, de genre g (le rang de Γ).

Nous prendrons comme définition d'une courbe de Mumford l'une des trois définitions équivalentes données par la proposition-définition 2.1.

PROPOSITION-DÉFINITION 2.1. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) La courbe $\mathcal{C}$ s'écrit analytiquement comme un quotient du type Ω_Γ/Γ où Γ est un groupe de Schottky.

(ii) La courbe $\mathcal{C}$ est localement analytiquement isomorphe à $\mathbb{P}^1_K$.

(iii) La courbe $\mathcal{C}$ possède une réduction analytique dont les composantes irréductibles sont des $\mathbb{P}^1_{\overline{K}}$ se coupant en des points doubles ordinaires.

Preuve : ces équivalences sont établies dans [G-vdP] chap. IV et V, et dans [F-vdP] chap. IV.

Nous savons qu'alors l'application $\pi : \Omega_\Gamma \longrightarrow \Omega_\Gamma/\Gamma \simeq \mathcal{C}$ est le revêtement universel (au sens analytique rigide) de la courbe $\mathcal{C}$, de groupe Γ et on a les isomorphismes: $\mathrm{Aut}_{\mathrm{alg.}}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Aut}_{\mathrm{alg.}}(\mathcal{C}) \simeq N(\Gamma)/\Gamma$ où $N(\Gamma)$ désigne le normalisateur de Γ dans $\mathrm{PGL}(2, K)$ (cf. [Ge 1], [G-vdP] VII) ($N(\gamma)/\Gamma$ est un groupe fini dont on connait précisément l'ordre (cf. [He])). Dans la suite, sans que cela nuise à la généralité de notre problème, on supposera que $\infty \in \Omega_\Gamma$.

Périodes de la courbe : étant donnée une courbe de Mumford $\mathcal{C}$ sur K, on définit les périodes (au sens de Myers, Manin et Drinfeld, Gerritzen et van der Put) de la façon suivante : pour a, b dans Ω_Γ, on définit la fonction thêta par le produit : $\theta(a, b; z) = \prod_{\gamma\in\Gamma} \frac{z-\gamma a}{z-\gamma b}$; il existe un homomorphisme de groupes $c_{a,b}$ de Γ dans K^* appelé facteur d'automorphie de la fonction thêta tel que l'on ait $\theta(a, b; z) = c_{a,b}(\gamma)\ \theta(a, b; \gamma z)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Une forme automorphe sur Ω_Γ est un produit fini de telles fonctions thêta et on définit de manière analogue, à l'aide du produit, les facteurs d'automorphie des formes automorphes sur Ω_Γ. Pour $\alpha \in \Gamma$, on pose $u_\alpha(z) = \theta(a, \alpha a; z)$; la fonction $u_\alpha(z)$, qui ne dépend pas du choix de $a \in \Omega_\Gamma$, et sans zéros ni pôles.

DÉFINITION 2.2. *Les périodes de la courbe $\mathcal{C}$ sont les facteurs d'automorphie associés aux $u_\alpha(z)$ lorsque α parcourt Γ; on note $\mathcal{R}$ l'ensemble des périodes.*

Fixons $\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_g\}$ une base de Γ, et soit C l'ensemble des facteurs d'automorphie des formes automorphes sur Ω_Γ; l'application

$$\begin{aligned} C &\longrightarrow (K^*)^g \\ c &\longrightarrow (c(\gamma_1), c(\gamma_2), \cdots, c(\gamma_g)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes qui transforme l'ensemble des périodes $\mathcal{R}$ en un réseau W de $(K^*)^g$ et la jacobienne (analytifiée) de la courbe définie sur K par le quotient $\mathcal{J}(\mathcal{C})(K) = C/\mathcal{R} \simeq (K^*)^g/W$ est isomorphe au groupe $\mathrm{Pic}^\circ(\mathcal{C})$ (voir par exemple [M-D], [Ge 4] ou [G-vdP] chap. VI).

L'application

$$\begin{aligned} \Gamma &\longrightarrow (K^*)^g \\ \alpha &\longrightarrow (c_\alpha(\gamma_1), c_\alpha(\gamma_2), \cdots, c_\alpha(\gamma_g)), \end{aligned}$$

où c_α désigne le facteur d'automorphie de u_α, se factorise en une bijection (qui est un isomorphisme de groupes) :

$$\Gamma/[\Gamma,\Gamma] \xrightarrow{\sim} \mathcal{R} \qquad \text{([G-vdP] Chap. II, §3);} \tag{2.3}$$

et on pourra donc regarder les périodes $\mathcal{R}$ de la courbe comme les éléments du groupe $\Gamma/[\Gamma,\Gamma]$.

Action du goupe des automorphismes de la courbe : soit $\mathcal{G}$ le groupe des automorphismes de la courbe $\mathcal{C}$; le groupe $\mathcal{G} \simeq N(\Gamma)/\Gamma$ agit de façon naturelle sur l'ensemble des fonctions méromorphes sur Ω_Γ; soit σ un relèvement dans $N(\Gamma)$ d'un générateur de $\mathcal{G}$; l'action naturelle de $\sigma \in \mathrm{PGL}(2, K)$ sur les fonctions méromorphes sur Ω_Γ est la suivante :

$$f(\,.\,) \in \mathcal{M}(\Omega_p) \longrightarrow f(\sigma^{-1}(\,.\,) \in \mathcal{M}(\Omega_\Gamma)$$

Cette action se prolonge en une action sur les périodes de la courbe.

D'autre part le normalisateur de Γ agit par conjugaison sur le quotient $\Gamma/[\Gamma,\Gamma]$, et donc sur les périodes de la courbe, en associant au facteur d'automorphie de la fonction u_α le facteur d'automorphie de la fonction $u_{\sigma\alpha\sigma^{-1}}$. Nous montrons que ces deux actions sont compatibles avec l'isomorphisme de (2.3) : $\Gamma/[\Gamma,\Gamma] \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}$.

PROPOSITION 2.4. *Soit c_α le facteur d'automorphie de la forme automorphe $u_\alpha(z)$, et soit c_α^σ le facteur d'automorphie de la forme automorphe $u_\alpha^\sigma(z) = u_\alpha(\sigma^{-1}z)$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$ on a l'égalité $c_{\sigma\alpha\sigma^{-1}}(\gamma) = c_\alpha^\sigma(\gamma)$.*

Preuve de la proposition 2.4. Un calcul simple montre qu'il existe une constante A non nulle telle qu'on ait les égalités :

$$c_{\sigma\alpha\sigma^{-1}}(\gamma) = \frac{c_{\sigma\alpha\sigma^{-1}}(z)}{c_{\sigma\alpha\sigma^{-1}}(\gamma z)} = \frac{A.u_\alpha^\sigma(z)}{A.u_\alpha^\sigma(\gamma z)} = c_\alpha^\sigma(\gamma),$$

ce qui prouve la proposition.

Remarque 2.5. L'action du groupe des automorphismes de la courbe sur les périodes $\mathcal{R}$ se ramène donc à l'action par conjugaison de $N(\Gamma)$ sur la quotient $\Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ par l'isomorphisme $\Gamma/[\Gamma,\Gamma] \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}$.

NOTATION-DÉFINITION 2.6. *On notera dans la suite Γ_{ab} pour $\Gamma/[\Gamma,\Gamma]$. Soit $\sigma \in N(\Gamma)$, nous noterons $\overline{\sigma}$ sa classe dans $N(\Gamma)/\Gamma$, $\overline{\sigma}$ le morphisme $\Gamma_{ab} \longrightarrow \Gamma_{ab}$ induit par la conjugaison de σ sur Γ, et $\hat{\sigma}$ le morphisme $\mathbb{Q}$-linéaire $\Gamma_{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow \Gamma_{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ induit par $\widetilde{\sigma}$. On appelle trace de $\widetilde{\sigma}$ et on note $Tr(\widetilde{\sigma})$ l'application $\Gamma_{ab} \longrightarrow \Gamma_{ab}$ définie par $Tr(\widetilde{\sigma}) = 1 + \widetilde{\sigma} + \cdots + \widetilde{\sigma}^n$; on définit de façon analogue $Tr(\hat{\sigma}) : \Gamma_{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow \Gamma_{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ par $Tr(\hat{\sigma}) = 1 + \hat{\sigma} + \cdots + \hat{\sigma}^n$.*

3. Le module projectif des périodes

On donne la caractérisation suivante des revêtements cycliques de $\mathbb{P}^1_K$ qui sont des courbes de Mumford; elle généralise celle donnée par van Steen qui ne caractérise que les revêtements d'ordre premier à l'aide de la formule du produit (iv) (cf. [vS]). Rappelons la définition d'un revêtement cyclique de $\mathbb{P}^1_K$:

Définition et rappels. Un revêtement cyclique de $\mathbb{P}^1_K$ de degré n est la donnée d'une courbe projective $\mathcal{C}$, non singulière, connexe, définie sur le corps K, et dont le corps des fonctions rationnelles $K(\mathcal{C})$ est une extension cyclique d'un corps de fonctions rationnelles à une variable. Lorsque la caractéristique de K ne divise pas n, le corps $K(\mathcal{C})$ est de la forme :

$$K(x,y) = \frac{K(X)[Y]}{(Y^n - \prod_{i=1}^{i=r}(X-a_i)^{\alpha_i})}$$

où les entiers $n, \alpha_1, \cdots, \alpha_r$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. Quitte à effectuer un changement de variables en x, y qui laisse les corps

$K(x,y)$ et $K(x)$ invariants, on peut supposer que les relations suivantes sont satisfaites :

$$0 < \alpha_i < n \text{ pour } i = 1 \cdots r,$$

$$n \text{ divise } \sum_{i=l}^{i=r} \alpha_i.$$

La deuxième relation signifie que le morphisme $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{P}^1_K$ déduit de l'inclusion $K(x) \subset K(x,y)$ n'est pas "ramifié à l'infini".

On appelle groupe de Galois du revêtement $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{P}^1_K$, et on note $\mathrm{Gal}(\mathcal{C}/\mathbb{P}^1_K)$, le groupe $\mathrm{Gal}(K(x,y)/K(x))$.

PROPOSITION 3.1. *Soit $\mathcal{C}$ une courbe de Mumford de groupe de Schottky Γ et soit $n \geq 2$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\mathcal{C}$ est un revêtement cyclique d'ordre n de $\mathbb{P}^1_K$.

(ii) Il existe $\sigma \in N(\Gamma)$ dont l'image $\overline{\sigma}$ dans $N(\Gamma)/\Gamma$ est d'ordre n et dont la trace $Tr(\widetilde{\sigma})$ agit trivialement sur Γ_{ab}.

(iii) Il existe $\sigma \in N(\Gamma)$ dont l'image $\overline{\sigma}$ dans $N(\Gamma)/\Gamma$ est d'ordre n et dont la trace $Tr(\widetilde{\sigma})$ agit trivialement sur $\Gamma_{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

(iv) Il existe $\sigma \in N(\Gamma)$ dont l'image $\overline{\sigma}$ dans $N(\Gamma)/\Gamma$ est d'ordre n et qui vérifie la formule du produit : $\forall \gamma \in \Gamma, \prod_{i=0}^{n-1} \sigma_i \gamma \sigma^{-i} \equiv 1 \mod [\Gamma, \Gamma]$.

Preuve. Il est clair que les assertions (ii), (iii), (iv) sont équivalentes. Pour montrer l'équivalence entre (i) et (ii) nous avons besoin du lemme :

LEMME 3.2. *Soit $\sigma \in N(\Gamma)$ d'image $\overline{\sigma}$ dans $N(\Gamma)/\Gamma$ d'ordre n, puis $\Gamma_0 = < \Gamma, \sigma >$, et soit ϕ_d le polynôme cyclotomique d'ordre d; alors:*

1 - on a l'égalité $\mathcal{L}_\Gamma = \mathcal{L}_{\Gamma_0}$;

2 - le quotient Ω_Γ/Γ_0 est une courbe algébrique dont le genre g_0 est donné par : $g_0 = \dim_{\mathbb{Q}} Ker(\hat{\sigma} - 1)$;

3 - on a la décomposition en somme directe : $\Gamma_{ab} \otimes \mathbb{Q} \cong Ker(\hat{\sigma} - 1) \cong \bigoplus_{d|n} Ker \Phi_d(\hat{\sigma})$.

Preuve du lemme 3.2.

1 - Γ est d'indice fini dans Γ_0, ceci prouve l'égalité $\mathcal{L}_\Gamma = \mathcal{L}_{\Gamma_0}$.

2 - En utilisant les résultats de [Ge 1] on a :

$$g_0 = \text{ rang } \Gamma_{0,ab} = \dim_{\mathbb{Q}} \Gamma_{0,ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

Montrons que les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels $\Gamma_{0,ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et $Ker(\hat{\sigma} - 1)$ sont isomorphes.

Les inclusions $[\Gamma, \Gamma] \subset [\Gamma_0, \Gamma_0] \subset \Gamma$ donnent la suite exacte :

$$1 \to [\Gamma_0, \Gamma_0]/[\Gamma, \Gamma] \hookrightarrow \Gamma_{ab} \to \Gamma/[\Gamma_0, \Gamma_0] \to 1$$

On a de plus les suites exactes :

$$1 \to \Gamma \hookrightarrow \Gamma_0 \to < \overline{\sigma} > \to 1$$

$$1 \to \Gamma/[\Gamma_0, \Gamma_0] \hookrightarrow \Gamma_{0,ab} \to < \overline{\sigma} > \to 1$$

On obtient en tensorisant par $\mathbb{Q}$ l'isomorphisme $(\Gamma/[\Gamma_0, \Gamma_0]) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q} \cong \Gamma_{0,ab} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q}$ et la suite exacte $1 \to ([\Gamma_0, \Gamma_0]/[\Gamma, \Gamma]) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q} \hookrightarrow \Gamma_{ab} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q} \to \Gamma_{0,ab} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q} \to 1$

Un calcul simple permet d'interpréter $([\Gamma_0, \Gamma_0]/[\Gamma, \Gamma]) \underset{Z}{\otimes} \mathbb{Q}$ comme $\mathrm{Im}(\hat{\sigma} - 1)$, ce qui montre que l'on a $\Gamma_{0,ab} \underset{Z}{\otimes} \mathbb{Q} \cong \Gamma_{ab} \underset{Z}{\otimes} \mathbb{Q} / \mathrm{Im}(\hat{\sigma} - 1) \cong \mathrm{Ker}(\hat{\sigma} - 1)$.

3 - C'est le lemme des noyaux que l'on peut appliquer puisque $\mathbb{Q}[X]$ est principal.

Le lemme est prouvé.

Prouvons maintenant la proposition:

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit $\Gamma_0 =< \Gamma, \sigma >$, le lemme nous dit $\Omega_\Gamma = \Omega_{\Gamma_0}$; comme le quotient $\Omega_{\Gamma_0}/\Gamma_0$ est une courbe algébrique (notée $\mathcal{C}_{\Gamma_0}$), on peut définir le morphisme analytique et algébrique

$$\begin{aligned} \rho \ : \ \Omega_\gamma/\Gamma &\longrightarrow \Omega_{\Gamma_0}/\gamma_0 \\ x \mod \gamma &\longrightarrow x \mod \Gamma_0 \end{aligned}$$

on a alors $\mathcal{C}_\Gamma / < \overline{\sigma} > \simeq \mathcal{C}_{\Gamma_0}$ ct ρ est un morphisme de degré n (puisque σ détermine un automorphisme de la courbe d'ordre n). Pour montrer que ρ est un revêtement cyclique d'ordre n de $\mathbb{P}^1_K$, il suffit de voir que g_0 est nul; mais ceci est trivial puisque $\Gamma_{ab} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q} = Ker\ Tr(\hat{\sigma})$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit $\overline{\sigma} \in N(\Gamma)/\Gamma$ tel que $\mathcal{C}_\Gamma / < \overline{\sigma} > \simeq \mathbb{P}^1_K$; soit $\sigma \in N(\Gamma)$ un relèvement de $\overline{\sigma}$ et $\Gamma_0 =< \Gamma, \sigma >$; on a $g(\mathbb{P}^1_K) = 0 = \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Ker}(\hat{\sigma} - 1)$; la somme directe

$$\Gamma_{ab} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q} \cong \underset{d|n}{\oplus} \ker \phi_d(\hat{\sigma})$$

s'écrit

$$\Gamma_{ab} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q} \cong \underset{d|n, d>1}{\oplus} \ker \phi_d(\hat{\sigma}) \cong \mathrm{Ker}\ Tr(\hat{\sigma}),$$

ce qui prouve la proposition.

Remarque 3.3. La proposition 3.1 nous dit que si la courbe $\mathcal{C}$ est un revêtement cyclique d'ordre n de $\mathbb{P}^1_K$ alors il existe σ, qui est nécessairement un générateur de $\mathrm{Gal}(\mathcal{C}/\mathbb{P}^1_K)$, qui vérifie (ii); en fait la preuve de la proposition montre que tout générateur de $\mathrm{Gal}(\mathcal{C}/\mathbb{P}^1_K)$ vérifie (ii); une autre façon de le voir est de constater que si k est un entier premier à n, alors le polynôme $Tr(X)$ divise $Tr(X^k)$ et donc si l'action de $Tr(\widetilde{\sigma})$ est triviale sur Γ_{ab}, il en est de même de l'action de $Tr(\widetilde{\sigma}^k)$.

COROLLAIRE 3.4. *Avec les notations de la proposition 3.1, si la courbe de Munford $\mathcal{C}$ est un revêtement cyclique d'ordre n de $\mathbb{P}^1_K$, alors on a la décomposition en somme directe:*

$$\Gamma_{ab} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q} \cong \bigoplus_{d|n, d>1} \ker \phi_d \, Tr(\hat{\sigma})$$

Preuve du corollaire. C'est une conséquence du lemme 3.2.

Tout est en place pour énoncer la proposition 3.5 :

PROPOSITION 3.5. *Le $\mathbb{Z}\,[\widetilde{\sigma}]/Tr(\widetilde{\sigma})$-module des périodes Γ_{ab} est un module projectif.*

Preuve. Comme Γ_{ab} est de type fini, il suffit de prouver que pour tout $\wp$ dans $\mathrm{Spec}(Z[\widetilde{\sigma}]/Tr(\widetilde{\sigma}))$, le $(Z[\widetilde{\sigma}]/Tr(\widetilde{\sigma}))_\wp$-module $\Gamma_{ab,\wp}$ défini par $\Gamma_{ab,\wp} = \Gamma_{ab} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} (\mathbb{Z}[\widetilde{\sigma}]/Tr(\widetilde{\sigma}))_\wp$ est sans torsion.

1- Remarquons tout d'abord que les idéaux premiers de $\mathbb{Z}[\widetilde{\sigma}]/Tr(\widetilde{\sigma})$ sont de la forme $(\phi_d(\widetilde{\sigma}))$ ou $(p, \phi_d(\widetilde{\sigma}))$ où d est un diviseur de n différent de 1, et p est un nombre premier qui ne divise pas d.
On a donc $\mathrm{Spec}(Z[\widetilde{\sigma}]/Tr(\widetilde{\sigma})) = \bigcup_{d|n,d>1} V(\phi_d(\widetilde{\sigma}))$; cette réunion est disjointe.

2- Montrons que pour tout idéal premier $\wp$ dans $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\widetilde{\sigma}]/Tr(\widetilde{\sigma}))$, le module des périodes localisé en $\wp$, $\Gamma_{ab,\wp} = \Gamma_{ab} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} (\mathbb{Z}[\widetilde{\sigma}]/Tr(\widetilde{\sigma}))_\wp$ est sans torsion.

Soit $\wp = (p, \phi_d(\sigma))$ avec p premier ne divisant pas d.
On a $(\mathbb{Z}[\widetilde{\sigma}]/Tr(\widetilde{\sigma}))_\wp \simeq \mathbb{Z}[\xi_d]_{p\mathbb{Z}[\xi_d]}$ où ξ_d désigne une racine primitive d-ième de l'unité. L'anneau $(\mathbb{Z}[\widetilde{\sigma}]/Tr(\widetilde{\sigma}))_\wp$ est donc principal, donc intègre. Soit alors $x \in \Gamma_{ab}$ tel que $\overline{x} = x \otimes 1$ soit de torsion dans $\Gamma_{ab,\wp}$.

Il existe $a \in (\mathbb{Z}[\widetilde{\sigma}]/Tr(\widetilde{\sigma}))_\wp = \mathbb{Z}_p[\widetilde{\sigma}]/(\phi_d(\widetilde{\sigma})) = \mathbb{Z}_p[\xi_d]$ tel que $a\overline{x} = 0$; a est non nul. On multiplie cette relation par les conjugués de a dans une clôture intégrale de $\mathbb{Z}_p[\xi_d]$ dans $\mathbb{Q}(\xi_d)$; comme l'anneau $\mathbb{Z}_p[\xi_d]$ est intégralement clos, on a la relation : $N(a)\overline{x} = 0$ (où N désigne la norme de l'extension $\mathbb{Q}(\xi_d)$ sur $\mathbb{Q}$) et $N(a) \in \mathbb{Z}_p$ est non nul. Il existe donc m un entier non nul tel que $m\overline{x} = 0$. Soit $s \in (\mathbb{Z}[\widetilde{\sigma}]/Tr(\widetilde{\sigma}))_\wp$ tel que $smx = 0$; on a alors $msx = 0$ et comme le module Γ_{ab} est sans $\mathbb{Z}$-torsion, on a $sx = 0$. Donc $\overline{x} = 0$ et $\Gamma_{ab,\wp}$ est sans torsion, ce qui prouve qu'il est libre ; ce qui conclut la preuve de proposition 3.5.

Soit $\wp = (\phi_d(\sigma))$; on a l'isomorphisme :

$\Gamma_{ab,\wp} \simeq \Gamma_{ab} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} K_d \simeq Ker\phi_d(\hat{\sigma})$ où K_d désigne le corps $\mathbb{Q}[\hat{\sigma}]/(\phi_d(\hat{\sigma}))$.

Le module $\Gamma_{ab,\wp}$ est donc un K_d-espace vectoriel, donc un K_d-module libre. En particulier la valeur du rang local sur la composante connexe $V(\phi_d(\widetilde{\sigma}))$ de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\widetilde{\sigma}]/Tr(\widetilde{\sigma}))$ vaut $\dim_{K_d} Ker\phi_d(\hat{\sigma})$. Ceci démontre le corollaire 3.6 suivant :

COROLLAIRE-DÉFINITION 3.6. *Soit* $\wp \in V(\phi_d(\widetilde{\sigma})) \subset Spec(\mathbb{Z}[\widetilde{\sigma}]/Tr(\widetilde{\sigma}))$, *on a:*

$$rg_\wp(\Gamma_{ab,\wp}) = \dim_{K_d} \ Ker\ \phi_d(\hat{\sigma}).$$

On note $N(d)$ *la valeur du rang local des périodes sur la composante* $V(\phi_d(\widetilde{\sigma}))$.

Remarque 3.7. Le rang projectif n'est pas toujours défini (i.e. lorsque les rangs locaux ne sont pas égaux entre eux). Nous allons donner un exemple dans lequel le rang des périodes n'est pas défini. Nous utiliserons dans cet exemple le lemme 3.8 :

LEMME 3.8. *Soit* C *une courbe de Mumford qui est un revêtement cyclique d'ordre* n *de* $\mathbb{P}^1_K$; *on suppose que* n *est premier à la caractéristique de* K; *écrivons le corps des fonctions rationnelles de la courbe sous la forme* $K(x,y)$ *avec* x *et* y *vérifiant une relation type :*

$$y^n = \prod_{\lambda\in\Lambda}(x-\lambda)^{m(\lambda)}, \ \textit{avec :} \begin{cases} \Lambda \textit{ un sous-ensemble fini de } K, \\ 0 < m(\lambda) < n, \ \textit{pour tout } \lambda \in \Lambda, \\ \textit{pgcd}(n, m(\lambda)/\lambda \in \Lambda) = 1, \\ n \textit{ divise la somme } \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} m(\lambda). \end{cases}$$

Alors on a l'égalité suivante, où φ *désigne l'indicateur d'Euler :*

$$2\sum_{d|n, d>1}\varphi(d)N(d) = -2(n-1) + \sum_{\lambda\in\Lambda}(n - pgcd(n, m(\lambda)))$$

Preuve du lemme. Si g est le genre de la courbe de Mumford $\mathcal{C}$, on a :

$$g = \dim_{\mathbb{Q}} \Gamma_{ab} \otimes_Z \mathbb{Q} = \sum_{d|n, d>1} \dim_{\mathbb{Q}} \ Ker\phi_d(\hat{\sigma}) = \sum_{d|n,d>1} \dim_{\mathbb{Q}} K_d N(d)$$
$$= \sum_{d|n,d>1} \varphi(d) N(d);$$

ce qui, avec la formule d'Hurwitz, prouve le lemme.

Exemple 3.9 : Considérons la courbe de Mumford définie par un modèle affine singulier de la forme :

$$y^{pq} = (\frac{x-a}{x-b})^p (\frac{x-c}{x-d})(\frac{x-e}{x-f})(\frac{x-g}{x-h})$$

avec p, q des nombres premiers distincts; on sait qu'il est possible de choisir convenablement les éléments $a, b, \dots, h$ pour qu'un tel modèle soit celui d'une courbe de Mumford (cf. la proposition 4.4). Le lemme 3.8 nous donne la formule:

$$3(pq-1) - (p-1) = (p-1)N(p) + (q-1)N(q) + (p-1)(q-1)N(pq).$$

Supposons l'égalité $N(p) = N(q) = N(pq)$; on a alors $(3 - N(p))(pq-1) = (p-1)$ ce qui est impossible.

Donc le rang du module projectif Γ_{ab} n'est pas défini et celui-ci n'est pas libre sur $Z[\widetilde{\sigma}]/Tr(\widetilde{\sigma})$.

4. La somme directe de modules monogènes

Nous venons de voir que les périodes de la courbe forment un module projectif sur l'anneau $\mathbb{Z}[\widetilde{\sigma}]/Tr(\widetilde{\sigma})$ (proposition 3.5). Le but de ce passage est de décomposer ce module en une somme directe de $\mathbb{Z}[\widetilde{\sigma}]/Tr(\widetilde{\sigma})$-modules monogènes le nombre de ces modules monogènes étant égal à $\frac{r-2}{2}$ où r désigne le nombre de points de ramification de $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{P}^1_K$. Cette décomposition n'est pas unique en général; en revanche, elle majore les rangs locaux par $\frac{r-2}{2}$. Cette majoration et le lemme 3.8 établissent que le module des périodes est libre de rang $\frac{r-2}{2}$ si et seulement si la courbe est totalement ramifiée sur $\mathbb{P}^1_K$ (théorème 5).

4. Hypothèses et notations

Nous énonçons les hypothèses et notations utilisées dans la suite.
Soit n un entier premier à la caractéristique résiduelle du corps K; on suppose que la courbe $\mathcal{C}$ vérifie l'hypothèse (4.0.H):

(4.0.H) : La courbe $\mathcal{C}$ est un revêtement n-cyclique de $\mathbb{P}^1_K$; soit $\mathcal{G}$ le groupe de ce revêtement. Soit $K(x,y)$ est le corps des fonctions rationnelles de la courbe où x et y vérifient la relation :

$$y^n = \prod_{\lambda\in\Lambda}(x-\lambda)^{m(\lambda)} \text{ avec : } \begin{cases} \Lambda \text{ un sous-ensemble fini de } K, \\ 0 < m(\lambda) < n, \text{ pour tout } \lambda \in \Lambda, \\ \operatorname{pgcd}(n, m(\lambda)/\lambda \in \Lambda) = 1, \\ n \text{ divise la somme } \sum_{\lambda\in\Lambda} m(\lambda). \end{cases}$$

Soit f le morphisme $\mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{P}^1_K$ déduit de l'inclusion $K(x) \subset K(x,y)$.

Si $\mathcal{C}$ est une courbe de Mumford de groupe de Schottky Γ qui vérifie (4.0.H), on désigne par σ un revêtement dans le groupe $N(\Gamma)$ d'un générateur de $\mathcal{G}$ via la surjection : $N(\Gamma) \longrightarrow N(\Gamma)/\Gamma \xrightarrow{\sim} \operatorname{Aut}(\mathcal{C})$, ([Ge 1]).

THÉORÈME 4. *Soit $\mathcal{C}$ une courbe de Mumford de groupe de Schottky Γ vérifiant l'hypothèse (4.0.H).*
1 - Nous avons la somme directe suivante : $\Gamma_{ab} = \bigoplus_{h\in H} \mathbb{Z}[\widetilde{\sigma}]/Tr(\widetilde{\sigma}).\ \gamma_h$, où H est un ensemble fini d'indices, et les γ_h, pour $h \in H$, des éléments de Γ_{ab}.
2 - Card$(H) = \frac{r-2}{2}$ où r désigne le nombre de points de ramification de $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{P}^1_K$.

Pour prouver le théorème 4 nous avons besoin de caractériser "géométriquement" les revêtements cycliques de $\mathbb{P}^1_K$ qui sont des courbes de Mumford. Les lemmes 4.2 et 4.3 suivants permettent d'établir cette nouvelle caractérisation des revêtements n-cycliques de $\mathbb{P}^1_K$ qui sont des courbes de Mumford; on peut utiliser les méthodes de [M]; la rédaction donnée ici est différente et nous a été suggérée par Q. Liu.

Soit $\mathcal{C}$ un revêtement n-cyclique de $\mathbb{P}^1_K$ comme dans (4.0.H). On ne suppose pas que $\mathcal{C}$ est une courbe de Mumford. En reprenant les notations de (4.0.H) on a le lemme suivant :

LEMME 4.2. *Il existe une réduction analytique pré-stable $r : \mathbb{P}^1_K \xrightarrow{r} Z$ telle que Z est formé de $\mathbb{P}^1_{\overline{K}}$ se coupant en des points doubles ordinaires, r sépare les points de ramification de $\mathcal{C}$, $(r(\Lambda)\cup\{r(\infty)\})\cap Z_{\text{sing}} = \varnothing$, telle que de plus pour toute composante irréductible L de Z, card $\{L \cap (Z_{\text{sing}} \cup r(\Lambda))\} \geq 3$.*

La preuve ne présente aucune difficulté.

DÉFINITION 4.2.1.
1 - Soit T le graphe d'intersection de Z, alors T est un arbre ([G-vdP] Chap.1 §2). Si L est une composante irréductible de Z, on note $i(L)$ le sommet de T correspondant; et de la même façon si P est l'intersection des deux composantes irréductibles de Z, alors on note $i(P)$ l'arête de T correspondante.
2 - Soit L^∞ la composante irréductible de Z contenant $r(\infty)$. On oriente T de la façon suivante : l'arête d'extrémités s' et s est orientée positivement de s' vers s, on note $s' \to s$, si l'unique chemin allant de s' à $i(L^\infty)$ passe par s.
3 - Soit L et L' des composantes irréductibles de Z, on dit que L' est avant L si $L = L'$ ou bien si le chemin allant de $i(L')$ à $i(L^\infty)$ passe par $i(L)$; sous ces hypothèses, on dit aussi que L (resp. $i(L)$) est après L' (resp. $i(L')$).
4 - Soit L une composante irréductible de Z, on pose $m(L) = \sum m(\lambda)$ la sommation se faisant sur l'ensemble des $\lambda \in \Lambda$ pour lesquels il existe une composante irréductible L' de Z, L' avant L et telle que $r(\lambda) \in L'$ (remarquons que si pour $\lambda \in \Lambda$, L' existe; alors L' est unique). L'entier $m(L)$ s'interprète aussi comme la somme des $m(\lambda)$ étendue à l'ensemble des $\lambda \in \lambda$ pour lesquels $r(\lambda)$ appartient à la composante connexe de $T \setminus \{i(L)\}$ qui ne contient pas $r(\infty)$.
5 - Enfin si $L \neq L^\infty$ est une composante irréductible de Z soit L° l'unique composante irréductible de Z telle que L° intersecte L et que l'arête $i(L) \to i(L^\circ)$ soit orientée positivement.

LEMME 4.3. *La réduction r du lemme 4.2 induit via f une réduction pré-stable $R : \mathcal{C} \xrightarrow{R} \mathcal{C}$. On a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow[R]{} & \overline{\mathcal{C}} \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{f}} \\ \mathbb{P}^1_K & \xrightarrow[r]{} & Z \end{array}$$

où $\overline{f}$ est déduit de f par passage aux réductions. De plus on a:

$$\overline{f}^{-1}(r(\Lambda)) \subset \overline{\mathcal{C}}_{\text{rég.}}.$$

Preuve. On montre que pour tout point singulier p de Z,

$$R^{-1}\overline{f}^{-1}(p)) = f^{-1}(r^{-1}(p))$$

est analytiquement isomorphe à une réunion disjointe de couronnes ouvertes, et que pour toute composante irréductible L de Z, $\overline{f}^{-1}(L)$ est lisse.

4.3.1 - Soit L et L' deux composantes irréductibles de Z d'intersection non vide; on peut supposer que L' est avant L et on note p le point d'intersection de L avec L'. L'ensemble $r^{-1}(p)$ est une couronne ouverte de la forme suivante

$$r^{-1}(p) = B(a, \alpha, \alpha') = \{x \in \mathbb{P}^1_K; \alpha < |x - a| < \alpha'\}.$$

Comme $r^{-1}(p) \cap \Lambda = \varnothing$, on a :

$$f^{-1}(r^{-1}(p)) = \{(x, y) | \ \alpha < |x - a| < \alpha', \ y^n = \prod_{\lambda \in \Lambda} (x - \lambda)^{m(\lambda)}\}$$

et pour $\lambda \in \Lambda$, on a soit $\alpha' \leq |\lambda - a|$, soit $|\lambda - a| \leq \alpha$.

Posons $\Lambda^- = \{\lambda \in \Lambda; |\lambda - a| \leq \alpha\}$ et $\Lambda^+ = \{\lambda \in \Lambda; \alpha' \leq |\lambda - a\}$ alors $f^{-1}(r^{-1}(p))$ est l'ensemble :

$$\{(x, y) | \alpha < |x - a| < \alpha', y^n = \prod_{\lambda \in \Lambda^-} (x - \lambda)^{m(\lambda)} \prod_{\lambda \in \Lambda^+} (x - \lambda)^{m(\lambda)}\}$$

Posons $t = (x - a)/\alpha'$, $\rho = \alpha/\alpha'$, nous obtenons pour $f^{-1}(r^{-1}(p))$:

$$\{(t, y) | \rho < |t| < 1, y^n = c \prod_{\lambda \in \Lambda^-} (t - \frac{(\lambda - a)}{\alpha'}) m(\lambda) \prod_{\lambda \in \Lambda^+} (\frac{\alpha' t}{\lambda - a} - 1)^{m(\lambda)}\}$$

où $c \in K^*$.

Pour $\lambda \in \Lambda^-$ on a $\left|\frac{(\lambda - a)}{\alpha'}\right| < 1$, et pour $\lambda \in \Lambda^+$ on a $\left|\frac{\alpha' t}{\lambda - a}\right| < 1$. Puisque n est premier à la caractéristique résiduelle de K, il existe une série convergente $\varepsilon(t, \rho/t) \in K^{\circ\circ} < t, \rho/t >$, telle que $f^{-1}(r^{-1}(p))$ s'écrive :

$$f^{-1}(r^{-1}(p)) = \{(t, y) | \rho < |t| < 1, y^n = ct^N(1 + \varepsilon(t, \rho/t))\}$$

où $N = \sum_{\lambda \in \Lambda^-} m(\lambda) = m(L')$; autrement dit :

(4.3.1.1) $f^{-1}(r^{-1}(p))$ est analytiquement isomorphe à la réunion disjointe de pgcd$(n, m(L'))$ couronnes ouvertes.

4.3.2 - Soit maintenant $\lambda^\circ \in \Lambda$; posons $q = \Gamma(\lambda^\circ)$; l'ensemble $r^{-1}(q)$ est un disque ouvert que l'on note $B(\lambda^\circ, \pi) = \{x \in \mathbb{P}^1_K; |x - \lambda^\circ| < |\pi|\}$. Comme l'application r sépare les points de Λ, on a, pour tout λ de Λ distinct de λ°, $|\lambda - \lambda^\circ| \geq |\pi|$ et donc $f^{-1}(r^{-1}(q))$ s'écrit :

$$f^{-1}(r^{-1}(q)) = \{x, y) \mid |x - \lambda^\circ| < |\pi| \;,\; y^n = \prod_{\lambda \in \Lambda} (x - \lambda)^{m(\lambda)}\}.$$

En posant $u = \dfrac{x - \lambda^\circ}{\pi}$ on obtient :

$$f^{-1}(r^{-1}(q)) = \{(u, y)/|u| < 1 \text{ et } y^n = cu^{m(\lambda^\circ)} \prod_{\lambda \neq \lambda^\circ} (1 - u\frac{\pi}{\lambda - \lambda^\circ})^{m(\lambda)}\}$$

pour $\lambda - \lambda^\circ$, $\left|\dfrac{u\,\pi}{\lambda - \lambda^\circ}\right| < 1$; puisque n est premier à la caractéristique résiduelle de K, il existe une série convergente z_λ de $K < u >$, qui soit racine n-ième de $(1 - u\frac{\pi}{\lambda - \lambda^\circ})^{m(\lambda)}$, c'est à dire : $z_\lambda^n = (1 - u\frac{\pi}{\lambda - \lambda^\circ})^{m(\lambda)}$; en posant $v = y\,{}^n\!\sqrt{c} \prod_{\lambda \neq \lambda^\circ} z_\lambda^{-1}$ on obtient :

$$f^{-1}(r^{-1}(q)) = \{(u, v); |u| < 1, v^n = u^{m(\lambda^\circ)}\}$$

(4.3.2.1) $f^{-1}(r^{-1}(q))$ est donc analytiquement isomorphe à la réunion de $\text{pgcd}(n, m(\lambda^\circ))$ disques ouverts ; les points de $R(f^{-1}(r^{-1}(q))) = \overline{f}^{-1}(r(\lambda^\circ))$ sont réguliers.

4.3.3 - Soit $L \neq L^\infty$, est une composante irréductible de Z, soit $U = L \setminus (Z_{\text{sing}} \cup r(\Lambda))$. Soit L° l'unique composante irréductible de Z telle que L° intersecte L et que l'arête $i(L) \to i(L^\circ)$ soit orientée positivement (L° existe dès que $L \neq L^\infty$).

Notons $L^1, L^2, \dots, L^s$ les autres composantes de Z qui intersectent L. Soit $x^i = L \cap L^i$ pour $i = 0, \dots, s$.

L'ensemble $r^{-1}(x^0)$ est la couronne ouverte $B(t^0, \alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{P}^1_K \mid |\alpha| < |x - t^0| < |\beta|\}$; il existe $\alpha^1, \dots, \alpha^s$ et $t^1, \dots, t^s$ tels que l'on ait $r^{-1}(x^i) = \{x \in \mathbb{P}^1_K; |\alpha^i| < x - t^i| < |\alpha|\}$ pour $i = 1, \dots, s$, qui vérifient de plus les égalités :

$|\alpha| = |t^0 - t^i| = |t^i - t^j|$ pour i, j distincts dans l'ensemble $\{1, \dots, s\}$

$|\alpha| > |\alpha^i|$ pour $i = 1, \dots, s$.

Posons pour $i = 1 \dots s$:

$$\begin{cases} \Lambda^i = \{\lambda \in \Lambda \mid |\lambda - t^i| < |\alpha\} \text{ pour } i = 1, \dots, s; \\ \Lambda' = \{\lambda \in \Lambda \mid |\lambda - t^0| > |\alpha\}; \\ \Lambda^L = \{\lambda \in \Lambda \mid |\lambda - t^0| \leq |\alpha|, |\lambda - t^i| = |\alpha| \text{ pour } i = 1, \dots, s\} \\ \quad\;\, = \{\lambda \in \Lambda \mid r(\lambda) \in L\}. \end{cases}$$

Il est clair que la famille $\Lambda^L, \Lambda', \Lambda^1, \ldots, \Lambda^s$ forme une partition de Λ. L'ouvert U s'écrit donc :

$$U = \{x \in \mathbb{P}^1_K \mid |x - t^0| \leq |\alpha|; |x - t^i| = |x - \lambda| = |\alpha| = \text{ pour } i > 0 \text{ et } \lambda \in \Lambda^L\}.$$

Puisque l'intersection $r(\lambda) \cap U$ est vide on a $f^{-1}(r^{-1}(U))$ qui s'écrit :

$$f^{-1}(r^{-1}(U)) = \{(x, y) \mid |x - t^i| = |\alpha| \text{ pour } i = 0 \ldots s, y^n = \prod_{\lambda \in \Lambda} (x - \lambda)^{m(\lambda)}\}$$

Posons $c^i = (t^i - t^0)/\alpha$, et $c^\lambda = (\lambda - t^0)/\alpha$ pour tout $\lambda \in \Lambda^L$; la somme $\sum_{|\lambda - t^i| \leq |\alpha^i|} m(\lambda) = m(L^i)$ découle de la définition 4.2.1.
Remarquons que si e et e' sont deux éléments distincts du type e^i ou e^λ alors $|e - e'| = 1$; autrement dit e et e' dont "distincts en réduction".

Deux cas se présentent :
soit $\lambda \in \Lambda^i$ et le quotient $(\frac{x-\lambda}{x-t^i})^{m(\lambda)}$ est de la forme $1 + z$ avec $|z| < 1$;
soit $\lambda \in \Lambda'$ et le quotient $(\frac{x-\lambda}{\lambda})^{m(\lambda)}$ est de la forme $1 + z'$ avec $|z'| < 1$.

Posons alors $v = (x - t^0)/\alpha$, en regroupant les termes dans le produit ; $f^{-1}(r^{-1}(U))$ est l'ensemble des couples (v, y) vérifiant les condtions suivantes :

$$c(L) \begin{cases} |v| \leq 1; \\ |v - e^i| = 1 \text{ pour } i = 1, \ldots, s; \\ |v - e^\lambda| = 1 \text{ pour } \lambda \in \Lambda^L; \\ y^n = c(1 + \epsilon(v)) \prod_{i=1\ldots s} (v - e^i)^{m(L^i)} \prod_{\lambda \in \Lambda^L} (v - e^\lambda)^{m(\lambda)}; \\ \quad \text{où } \epsilon(v) \text{ appartient à } K^{\circ\circ} < v > . \end{cases}$$

(4.3.3.1) $f^{-1}(r^{-1}(U))$ est donc analytiquement isomorphe à un produit de couronnes, en nombre $\operatorname{pgcd}(n, m(L^i)_{(i=1\ldots s)}, m(\lambda)_{(\lambda \in \Lambda_0^L)}, m(L))$ avec

$$m(L) = \sum_{i=1\ldots s} m(L^i) + \sum_{i \in \Lambda^L} m(\lambda)$$

(cette dernière égalité découle de la définition 4.2.1).
Par suite $R(f^{-1}(r^{-1}(U))) = \overline{f}^{-1}(U)$ est un produit d'ouvert de Zariski de $\mathbb{A}^1_{\overline{K}}$. Le cas $L = L^\infty$ est analogue au cas précédent. Ceci termine la preuve du lemme 4.3.

Les lemmes 4.2 et 4.3 établissent la proposition 4.4 qui caractérise les revêtements n-cycliques de $\mathbb{P}^1_K$ qui sont des courbes de Mumford (sous l'hypothèse que n est premier à la caractéristique résiduelle de K).

PROPOSITION 4.4. *Soit C un revêtement n-cyclique de $\mathbb{P}^1_K$ vérifiant (4.0.H) dont on reprend les notations; avec les notation de 4.3.3, on définit les nombres $m(L^i)$, (pour $i = 1\dots s$), $m(\lambda)$(pour $r(\lambda) \in L$), $m(L)$ comme en 4.2.1 et 4.3.3; on a alors l'équivalence entre les assertions suivantes.*
(i) C est une courbe de Mumford.
(ii) Pour toute composante irréductible L de Z, l'entier n divise tous les entiers, sauf deux exactement, de la liste suivante :
$m(L^i)$, *pour* $i = 1, \dots, s$;
$m(\lambda)$, *pour* $r(\lambda) \in L$;
$m(L) = \sum_{i=1\dots s} m(L^i) + \sum_{\lambda\in\Lambda^L} m(\lambda).$

Preuve de la proposition 4.4. La courbe C est de Mumford si et seulement si toute composante irréductible de $\overline{C}$ est de genre nul; la proposition 4.4 est prouvée si nous appliquons le lemme 4.5 suivant à la condition $c(L)$ de 4.3.3 :

LEMME 4.5. *Soit C une courbe projective, non singulière, définie sur le corps $\overline{K}$, et de corps de fonctions rationnelles $\overline{K}(x,z)$ avec x et z vérifiant : $z^m = \prod_{\lambda\in\Lambda}(x-\lambda)^{m(\lambda)}$ où $m > 1$ et $(m,\ \mathrm{car}\,\overline{K}) = 1$; soit $F : C \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\overline{K}}$ le morphisme déduit l'inclusion $\overline{K}(x) \subset \overline{K}(x,z)$. Alors la courbe C est de genre nul si et seulement si m divise tous les entiers $m(\lambda)_{(\lambda\in\Lambda)}$ et $\sum_{\lambda\in\Lambda} m(\lambda)$ sauf deux exactement.*

Preuve du lemme 4.5. Si C est de genre nul, alors un automorphisme du revêtement $C \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\overline{K}}$ est un automorphisme de $\mathbb{P}^1_{\overline{K}}$ d'ordre m ; c'est donc une homographie non-triviale h d'ordre fini. Comme $\overline{K}$ est algébriquement clos, c'est que h est représentée par une matrice diagonalisable avec deux valeurs propres distinctes. Une base de $\overline{K}\times\overline{K}$ de vecteurs propres associés définit deux points de $\mathbb{P}^1_{\overline{K}}$ qui sont des points fixes par F de C; ce sont les deux seuls points de ramification de F.

La réciproque découle de la forme d'Hurwitz.

Le lemme 4.5 est prouvé, et avec lui la proposition 4.4.

Preuve (abrégée) du théorème 4. Soit C une courbe de Mumford de groupe de Schottky Γ, qui vérifie les hypothèses et notations de (4.0.H); on désigne par σ un relèvement dans le groupe $N(\Gamma)$ d'un générateur de $\mathcal{G}$ via la surjection : $N(\Gamma) \longrightarrow N(\Gamma)/\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(C)$ ([Ge 1]).

On construit Z et $\overline{C}$ des réductions analytiques de $\mathbb{P}^1_K$ et de la courbe comme dans les lemmes 4.2 et 4.3. On a le diagramme commutatif donné par le lemme 4.3 :

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow[R]{} & \overline{C} \\ \downarrow f & & \downarrow \overline{f} \\ \mathbb{P}^1_K & \xrightarrow[r]{} & Z \end{array}$$

La preuve est en deux temps.

- Nous construisons un graphe fini et connexe G sur lequel agit l'automorphisme σ et dont le groupe fondamental $\pi_1(G)$ est isomorphe à Γ; nous étudions l'action de σ sur les sommets et les arêtes du graphe G qui induit une action sur le groupe fondamental ; cette action est la même - via l'isomorphisme $\pi_1(G) \xrightarrow{\sim} \Gamma$, que l'action par conjugaison de σ sur Γ. L'étude de l'action de σ sur Γ, donc sur le quotient Γ_{ab} (et sur $\mathcal{R}$, les périodes de la courbe), se ramène donc à l'étude de l'action de σ sur $\pi_1(G)$ et sur les lacets du graphe G, c'est-à-dire à une étude combinatoire du graphe G. Cette étude permet d'écrire les périodes comme somme directe des modules monogènes.

- Ensuite, nous montrons que le nombre de tels modules monogènes s'exprime en termes de nombre de points de ramification de C sur $\mathbb{P}^1_K$.

- Pour le vocabulaire et les propriétés principales des graphes, nous renvoyons à la monographie de J.-P. Serre ([S]); pour les généralités sur le groupe fondamental d'un graphe, on peut consulter le livre de Claude Godbillon ([Go]).

Remarque. Dans la suite nous parlerons des lacets et de groupe fondamental (ou d'homologie) sans préciser le point-base; la raison en est qu'une relation du type : $(*)$ $\sigma(\gamma) = \gamma'$, avec $\gamma, \gamma' \in \pi_1(P, G)$ ne dépend du point-base P qu'à conjugaison près dans $\pi_1(P, G)$ (cf. [Go] chap. V 2.5), et donc la relation obtenue à partir de $(*)$ par passage au quotient dans le quotient Γ_{ab} ne dépend pas du point-base P choisi.

NOTATIONS 4.6. *En reprenant les définitions de 4.2.1, on note $I(L)$ le sommet du graphe d'intersection G correspondant. Si P est l'intersection de deux composantes irréductibles de $\overline{C}$, on note $I(P)$ l'arête de G correspondante. Soit $f^* : G \longrightarrow T$ l'application induite par $\overline{f} : \overline{C} \longrightarrow Z$, donc par $f\ : C \longrightarrow \mathbb{P}^1_K$; f^* est en particulier définie par:$f^*(I(L)) = i(f(L))$.*

LEMME 4.7. *L'automorphisme $\overline{\sigma}$ opère sur $\overline{C}$ donc sur G, et par suite sur $\pi_1(G)$. Le graphe G est fini et connexe. L'application $f^* : G \longrightarrow T$ fait du graphe G un revêtement ramifié cyclique de l'arbre T, de groupe $< \sigma >$, le groupe du revêtement $C \longrightarrow \mathbb{P}^A_K$; $\overline{C}/ < \sigma >= Z$. Le groupe fondamental du graphe G est isomorphe au groupe de Schottky Γ de C, cet isomorphisme étant compatible avec les actions de $< \sigma >$ sur Γ et de $< \overline{\sigma} >$ sur $\pi_1(G)$.*

Preuve. Presque tout résulte des définitions, sauf l'isomorphisme de Γ avec $\pi_1(G)$ qui se trouve dans [G-vdP], Chap. III, 2.12.3. page 121.

Conséquence. Il nous suffit donc d'étudier l'action par conjugaison de σ sur le groupe $\pi_1(G)$ pour prouver le théorème 4.
Précisons ce que nous entendons par boucle : une boucle est une arête dont les sommets sont égaux; on a alors le lemme :

LEMME 4.8. *Il n'y a aucune boucle dans le graphe G.*

Preuve du lemme. Les composantes irréductibles de $\overline{\mathcal{C}}$ sont non singulières.

DÉFINITION 4.9. *Soit L une composante irréductible de Z distincte de L^∞. Soit L^0 l'unique composante irréductible de Z telle que l'arête de T, $i(L) \to i(L^0)$ soit orientée positivement. On définit les nombres suivants :*

$$\begin{aligned} A(L) &= \operatorname{card}(l(\overline{f}^{-1}(L \cap L^0))); \\ S(L) &= \operatorname{card}(l(\overline{f}^{-1}(L))); \\ g(L) &= A(L) - S(L); \\ S(L^\infty) &= \operatorname{card}(l(\overline{f}^{-1}(L^\infty))). \end{aligned}$$

Notons $P^\infty = i(L^\infty)$ et soit P un sommet de T différent de P^∞; on définit les entiers : $A(P) = A(L)$, $S(P) = S(L)$, $g(P) = g(L)$, où L est la composante irréductible de Z telle que $i(L) = P$.

Remarque 4.9.1. $A(L)$ [resp. $S(L)$] représente le nombre d'arêtes [resp. de sommets] dans G au dessus de l'arête de $Ti(L) \to i(L^0)$ [resp. du sommet $i(L)$].

Remarque 4.10. Le fait que la réduction $\overline{\mathcal{C}}$ de la courbe de Mumford soit formée de $\mathbb{P}^1_{\overline{K}}$ se coupant en des points doubles ordinaires implique une liaison entre les nombres (cf. déf. 4.2.1 et 4.9), $m(L), S(L), A(L)$ et $g(L)$ lorsque $L \neq L^\infty$. Cette liaison est décrite par le lemme 4.3 et la proposition 4.4 que nous utiliserons constamment dans la preuve du lemme 4.11; le lemme 4.3 donne des équations de la réduction $\overline{\mathcal{C}}$, et la proposition 4.4 traduit sur ces équations le fait que les composantes irréductibles de $\overline{\mathcal{C}}$ soient des $\mathbb{P}^1_{\overline{K}}$.

LEMME 4.11. *Soit L une composante irréductible de Z. Les nombres (cf. définition 4.2.1 et 4.9), $m(L)$, $S(L)$, $A(L)$ et $g(L)$ (lorsque $L \neq L^\infty$), sont donnés par le tableau suivant, dans lequel L' désigne une composante irréductible de Z (lorsqu'elle existe) telle que l'arête de T, $i(L') \to i(L)$ soit positive, et $r(\lambda_1)$ désigne un point de $L \cap r(\Lambda)$ lorsqu'il existe.*

$L \cap r(\Lambda)$	$m(L)$	$A(L)$ $(L \neq L^\infty)$	$S(L)$	$g(L)$ $(L \neq L^\infty)$
$\{r(\lambda_1); r(\lambda_2)\}$	$0 \mod [n]$	n	$(n, m(\lambda_1))$	$n - (n, m(\lambda_1))$
$\{r(\lambda_1)\}$	$0 \mod [n]$	n	$(n, m(\lambda_1))$	$n - (n, m(\lambda_1))$
$\{r(\lambda_1')\}$	$m(\lambda_1)$	$(n, m(\lambda_1))$	$(n, m(\lambda_1))$	0
$\varnothing$	$0 \mod [n]$	n	n	0
$\varnothing$	$m(L')$	$(n, m(L'))$	$(n, m(L'))$	0
$\varnothing$	$0 \mod [n]$	n	$(n, m(L'))$	$n - (n, m(L'))$

Preuve du lemme 4.11.
4.11.1 - Si $L \cap r(\Lambda) = \{r(\lambda_1), r(\lambda_2)\}$, alors la droite projective $\overline{f}^{-1}(L)$ admet un modèle affine singulier d'équation :

$$z^n = (v - e_1)^{m(\lambda_1)}(v - e_2)^{m(\lambda_2)} \prod_{L'/i(L') \to i(L)} (v - e_{L'})^{m(L')};$$

alors n divise chaque $m(L')$ et la somme :

$$m(L) = m(\lambda_1) + m(\lambda_2) + \sum_{L'/i(L') \to i(L)} m(L')$$

donc aussi $m(\lambda_1) + m(\lambda_2)$; en particulier $(n, m(\lambda_1)) = (n, m(\lambda_2))$. L'équation du modèle affine s'écrit après simplification :

$$z^{(n/(n,m(\lambda_1)))} = (v - e_1)^{(m(\lambda_1)/(n,m(\lambda_1)))}(v - e_2)^{(m(\lambda_2)/(n,m(\lambda_1)))}$$

Le nombre de droites projectives de $\overline{C}$ "au-dessus de L" est $S(L) = (n, m(\lambda_1))$; si $L \neq L^\infty$, soit L° définie en 4.2, en utilisant le lemme 4.3 et le passage 4.3.3.1 on obtient que $f^{-1}(r^{-1}(L \cap L^\circ))$ est réunion disjointe de $(n, m(L)) = n$ couronnes ouvertes, c'est à dire $A(L) = n$.

4.11.2 - Si $L \cap r(\Lambda) = \{r(\lambda_1)\}$ alors la droite projective $\overline{f}^{-1}(L)$ admet un modèle affine singulier d'équation :

$$z^n = (v - e_1)^{m(\lambda_1)} \prod_{L'/i(L') \to i(L)} (v - e_{L'})^{m(L')}$$

deux possibilités se présentent :

a) s'il existe une composante irréductible L' de Z, $i(L') \to i(L)$ telle que n ne divise pas $m(L')$ alors pour toute autre composante irréductible L'' telle que $i(L'') \to i(L)$ on a n divise $m(L'')$ et n divise la somme $m(L) = m(\lambda_1) + \sum_{L'/i(L') \to i(L)} m(L')$ donc n divise $m(\lambda_1) + m(L')$; en particulier $(n, m(\lambda_1)) = (n, m(L'))$. Après simplification on est ramené au modèle affine d'équation $z^n = (v - e_1)^{m(\lambda_1)}(v - e_2)^{m(L')}$. Le nombre de composantes irréductibles de $\overline{f}^{-1}(L)$ vaut $S(L) = (n, m(\lambda_1))$ et si $L \neq L^\infty$ on obtient toujours avec le lemme 4.3 et les notations de 4.3.3.1 que $f^{-1}(r^{-1}(L \cap L^\circ))$ est réunion disjointe de $(n, m(L)) = n$ couronnes ouvertes, c'est à dire $A(L) = n$.

b) sinon pour toute composante irréductible L' de Z telle que $i(L') \to i(L)$, n divise $m(L')$; l'équation du modèle affine s'écrit: $z^n = (v - e_1)^{m(\lambda_1)}$. le nombre $m(L)$ a même congruence que $m(\lambda_1)$ modulo n et on obtient de façon analogue à ce qui précède $S(L) = A(L) = (n, m(\lambda_1))$.

4.11.3 - Si $L \cap r(\Lambda) = \varnothing$ la droite projective $\overline{f}^{-1}(L)$ admet un modèle affine singulier d'équation : $z^n = \prod_{L'/i(L') \to i(L)} (v - e_{L'})^{m(L')}$ et trois possibilités se présentent :

a) pour toute composante irréductible L' de Z, $i(L') \to i(L)$, on a n divise $m(L')$ et donc n divise la somme $m(L) = \sum_{L'/i(L') \to i(L)} m(L')$; on a l'égalité : $S(L) = n$; et lorsque $L \neq L^\infty$, $A(L) = n$.

b) il existe une unique composante irréductible L' de Z, $i(L') \to i(L)$, telle que n ne divise pas $m(L')$; alors la droite projective $\overline{f}^{-1}(L)$ admet un modèle affine singulier d'équation $z^n = (v - e_2)^{m(L')}$; on obtient $S(L) = (n, m(L'))$ et $A(L) = (n, m(L'))$ si $L \neq L^\infty$.

c) il existe une unique paire de composantes irréductibles L', L'' de Z, $i(L') \to i(L)$, et $i(L'') \to i(L)$ telle que n ne divise ni $m(L')$, ni $m(L'')$; alors

$\overline{f}^{-1}(L)$ admet un modèle affine singulier d'équation $z^n = (v-e_2)^{m(L')}(v-e_2)^{m(L'')}$ et n divise donc la somme $m(L')+m(L'')$ et la somme $m(L) = \sum_{L'/i(L')\to i(L)} m(L')$; on obtient $S(L) = (n, m(L'))$ et $A(L) = n$ si $L \neq L^\infty$.

Remarque 4.11.4. Si $L \cap r(\Lambda) = \{r(\lambda_1), r(\lambda_2)\}$ on a vu que n divise $m(\lambda_1) + m(\lambda_2)$ et que $g(L) = n - (n, m(\lambda_1))$; alors $g(L)$ représente la contribution au genre de la courbe $\mathcal{C}$ des points $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ comme le montre la formule d'Hurwitz.

Remarque 4.11.5. Quitte à rajouter un recouvrement analytique qui définit la réduction Z, on peut supposer (et on supposera) que $S(L^\infty) = n$.

Remarque 4.12. Nous allons étudier l'homologie du graphe G au-dessus d'une arête a de T. Dans un premier temps nous allons nous ramener au cas d'un graphe G' pour lequel le nombre $g(P)$ (avec $P \neq P^\infty$) est toujours non nul; auquel cas le nombre $A(P)$ vaudra constamment n. Ce changement de graphe revient à supprimer l'homologie triviale dans le graphe G.

NOTATION 4.13. *Soit T le graphe d'intersection de Z (cf. 4.2), f^* et G comme en 4.6; soit $P \neq P^\infty$ un sommet de T; a l'unique arête positive de T, de sommet initial P, Q étant l'autre sommet de a; soit a_0 un antécédent pour f^* (dans le graphe G) de l'arête a, de sommets P_0, Q_0 (avec $P = f^*(P_0)$, $Q = f^*(Q_0)$).*

On note $\mathcal{O}(P_0)$ (resp. $\mathcal{O}(Q_0), \mathcal{O}(a_0)$) l'orbite de P_0 (resp. Q_0, a_0) sous l'action de σ; soit $r =$ card $\mathcal{O}(P_0)$, $s =$ card $\mathcal{O}(Q_0)$ et $N =$ card $\mathcal{O}(a_0)$ (N divise n).

On pose $P_i = \sigma(P_{i-1})$, $i = 1 \dots r, Q_i = \sigma(Q_{i-1})$, $i = 1 \dots s$, et enfin $a_i = \sigma(a_{i-1})$, $i = 1 \dots N$. Les entiers card $\mathcal{O}(P_0)$ et card $\mathcal{O}(Q_0)$ divisent card $\mathcal{O}(a_0)$ et on a avec la déf. 4.9:

(4.14) $$g(P) = N - r.$$

Soit $\Lambda(P)$ le sous-graphe de G formé des sommets $\mathcal{O}(P_0) \cup \mathcal{O}(Q_0)$ et des arêtes $\mathcal{O}(a_0)$ et soit $\lambda(P)$ le sous-arbre de T formé de l'arête a et des sommets P, Q.

Remarque 4.15. Le sous-graphe $\Lambda(P)$ de G est stable sous l'action de σ, et constitue un revêtement cyclique du sous-arbre $\lambda(P)$ de T.

LEMME 4.16. *Si $g(P) = 0$ ou $P = P^\infty$, le graphe $\Lambda(P)$ est réunion disjointe et finie de sous-arbres de G.*

Preuve du lemme. $g(P) = 0$ implique $r = N$ (cf. 4.14), et s divise r; en particulier $\Lambda(P)$ est réunion disjointe des sous-arbres de G, $\Lambda_i(P)$ ($i = 0, \dots, s-1$) formés des arêtes $\sigma^{ks+i}(a_0)$ lorsque $k = 0, \dots, \frac{r}{s} - 1$; l'arête

$\sigma^{ks+i}(a_0)$ ayant pour sommets P_{Ls+i} et Q_i lorsque k parcourt $0, \ldots, \frac{r}{s}-1$. Le cas $Q = P^\infty$ est identique au cas précédent : on obtient $s = N$ et r divise s (remarque 4.9.1); ceci prouve le lemme.

Considérons le graphe quotient $G' = G/\Lambda(P)$ ([S], chap. I, §2); G' est muni d'une action canonique de σ et on définit l'application $\overline{f}^*$ par le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G' = G/\Lambda(P) \\ \Big\downarrow f & & \Big\downarrow \overline{f}^* \\ T = G/<\sigma> & \longrightarrow & T/\lambda(P) = G'/<\sigma> \end{array}$$

LEMME 4.17. *Si $g(P) = 0$ ou $P = P^\infty$, l'application*

$$\textit{Réal}(G) \longrightarrow \textit{Réal}(G/\Lambda(P))$$

est une équivalence homotopique.

Preuve. On renvoie à [S], I, §2, prop. 13.

En appliquant le lemme 4.17 à l'aide d'une récurrence finie, qui correspond à tous les sommets P de G vérifiant $g(P) = 0$ ou $P = P^\infty$, on a montré le lemme 4.18 suivant :

LEMME 4.18. *Il existe un graphe fini $\tilde{G}$ sur lequel agit σ, et un arbre $\tilde{T}$ qui vérifient :*

(i) $\tilde{G}/ <\sigma> \simeq \tilde{T}$.

(ii) $\Gamma \simeq \pi_1(\tilde{G})$ et cet isomorphisme est compatible avec l'action de σ.

(iii) Pour toute orbite $\mathcal{O}$ de sommets de $\tilde{G}$, on a : card $\mathcal{O} < n$.

(iv) Pour toute orbite $\mathcal{O}'$ d'arêtes de $\tilde{G}$, on a : card $\mathcal{O}' = n$.

(v) Le nombre d'orbites de sommets de $\tilde{G}$, i.e. le nombre de sommets de $\tilde{T}$, est égal au nombre de composantes irréductibles L de Z telles que $g(L) \neq 0$.

Notons s le nombre d'orbites de sommets de $\tilde{G}$ et le nombre de sommets de $\tilde{T}$; une étude combinatoire du graphe $\tilde{G}$ permet de définir une base de $\pi_1(\tilde{G})$ de la forme $\bigcup_{h\in H}\{\gamma_{h,K}/K \in J(h)\}$ telle qu'en notant d'une barre l'image dans le quotient $\pi_1(\tilde{G})/[\pi_1(\tilde{G}), \pi_1(\tilde{G})]$ d'un élément de $\pi_1(\tilde{G})$ on ait :

pour tout $h \in H$, il existe $K^\circ \in J(h)$ tel que

$$\{\overline{\gamma_{h,K}}, K \in J(h)\} \subset Z[\tilde{\sigma}].\overline{\gamma_{h,K^\circ}}$$

et card $H = s - 1$.

Ceci montre le point 1 du théorème 4.

Pour montrer le point 2, il suffit de prouver la proposition 4.19, ce qui finira la preuve du théorème 4.

PROPOSITION 4.19.
1 - Il existe une partition de l'ensemble Λ sous la forme :

$$\Lambda = \bigcup_{L \in Z/g(L) \neq 0} \{\lambda_1(L); \lambda_2(L)\}$$

De plus pour toute composante irréductible L de Z qui vérifie $g(L) \neq 0$, n divise la somme $m(\lambda_1(L)) + m(\lambda_2(L))$.
2 - card $(H) = \frac{1}{2}$ card$(\Lambda) - 1$.

Preuve de la proposition 4.19. Il faut montrer les trois points suivants :

A - À toute composante irréductible L de Z vérifiant $g(L) \neq 0$ on peut associer une paire d'éléments de Λ $\{\lambda_1(L), \lambda_2(L)\}$ qui vérifie : n divise $m(\lambda_1(L)) + m(\lambda_2(L))$.
B - Pour un élément λ de Λ il existe une composante irréductible L de Z telle que $g(L) \neq 0$ et qui vérifie $\lambda = \lambda_1(L)$ ou $\lambda_2(L)$.
C - Si l'intersection $\{\lambda_1(L), \lambda_2(L)\} \cap \{\lambda_1(L'), \lambda_2(L')\}$ est non vide, alors $L = L'$.

La démonstration utilise le lemme 4.11 :
On montre le point A :

Trois cas se présentent:
1 - Si $L \cap r(\lambda) = \{r(\lambda_1), r(\lambda_2)\}$ alors $g(L) \neq 0$ comme le montre le tableau du lemme 4.11 ligne 1, et n divise la somme $m(\lambda_1) + m(\lambda_2)$ alors on associe la paire $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ à la composante L.
2 - Si $L \cap r(\Lambda) = \varnothing$ comme $g(L) \neq 0$ le lemme 4.11 ligne 6 nous dit qu'il existe un unique couple de composantes irréductibles L', L'' tel que $i(L') \to i(L)$ et $i(L'') \to i(L)$ et vérifiant : $n|m(L'), n|m(L''), n|m(L') + m(L'')$; on a alors card $(L' \cap r(\Lambda)) < 2$ et card $(L'' \cap r(\Lambda)) < 2$.
Par récurrence, il existe deux entiers K et t, et deux suites de composantes irréductibles de Z : $L^{0,K}, \ldots, L^{0,1}$ et $L^{t,0}, \ldots, L^{1,0}$ telles que :

$$i(L^{0,K}) \to \ldots \to i(L^{0,1}) = i(L') \to i(L)$$

$$i(L^{t,0}) \to \ldots \to i(L^{1,0}) = i(L'') \to i(L).$$

Ces deux suites vérifient de plus :
$L^{0,p} \cap r(\Lambda) = \varnothing,\ m(L^{0,p}) = m(L')$ pour $p = 1, \ldots, K-1$

et $L^{0,K} \cap r(\Lambda) \neq \varnothing,\ m(L^{0,K}) = m(L')$;

$L^{0,p} \cap r(\Lambda) = \varnothing, m(L^{p,0}) = m(L'')$ pour $p = 1, \ldots, t-1$
et $L^{t,0} \cap r(\Lambda) \neq \varnothing,\ m(L^{t,0}) = m(L'')$.

On pose $L^{0,K} \cap r(\Lambda) = \{r(\lambda_1)\}$ et $L^{t,0} \cap r(\Lambda) = \{r(\lambda_2)\}$; on a alors les égalités :
$m(L') = m(\lambda_1) \mod (n)$ et $m(L'') = m(\lambda_2) \mod (n)$ et $n/m(\lambda_1)+m(\lambda_2)$ dans le tableau du lemme 4.11 nous pouvons lire $g(L^{0,K}) = g(L^{t,0}) = 0$ et nous asssocions à L la paire $\{\lambda_1, \lambda_2\}$.

On peut situer "géographiquement" $i(L)$ comme l'intersection des chemins reliant $i(L')$ à (L^∞) et $i(L'')$ à $i(L^\infty)$ dans l'arbre T.

3 - Si $L \cap r(\Lambda) = \{r(\lambda_1)\}$ comme $g(L) \neq 0$ on a nécessairement que n divise $m(L)$ comme on peut le voir dans le tableau du lemme 4.11; une récurrence permet de construire une suite finie de composantes irréductibles de Z : $L_K, L_{K-1}, L_{K-2}, \ldots, L_1$ qui vérifie $i(L_K) \rightarrow i(L_{K-1}) \rightarrow \ldots \rightarrow i(L_1) \rightarrow i(L), L_p \cap r(\Lambda) = \varnothing$ pour $p = 1, \ldots, K-1; L_K \cap r(\Lambda) \neq \varnothing$ et enfin $m(L_p) = -m(\lambda_1) \mod (n)$ pour $p = 1, \ldots, K$.

Nécessairement $\text{card}(L_K \cap r(\Lambda)) = 1$ et on pose $L_K \cap r(\Lambda) = \{r(\lambda_2)\}$; on a alors n qui divise le nombre $m(L) = m(\lambda_1) + m(\lambda_2)$ (cf. tableau 4.11); donc à L on associe la paire $\{\lambda_1, \lambda_2\}$.

Avec les notations 4.2 L_K est avant L.

De plus, ce cas peut être vu comme un cas particulier dégénéré du cas 2 - il suffit de poser $L = L'$ et $L_K = L''$. On a donc montré le point A.

Remarque 4.19.A. Dans tous les cas $r(\lambda_1(L))$ et $r(\lambda_2(L))$ sont placés sur des composantes irréductibles de Z situées avant L (cf. déf. 4.2).

Montrons le point B :

Soit $\lambda_1 \in \Lambda$ et soit L la composante irréductible de Z qui contient $r(\lambda_1)$. Si $g(L) \neq 0$ c'est que λ_1 est de la forme $\lambda_1(L)$ ou $\lambda_2(L)$, sinon $g(L) = 0$. En appliquant la troisième ligne du tableau 4.11 on a nécessairement $n|m(L)$; soit K le plus petit entier réalisant :

"il existe: $i(L) \rightarrow i(L') \rightarrow \ldots \rightarrow i(L^K)$ avec les conditions
$m(L) = m(L') = \ldots = m(L^{K-1}) \neq 0 \ (\mod [n])$;
$m(L^K) = 0(\mod [n])$;
$LP \cap r(\Lambda) = \varnothing$ pour $p = 1, \ldots, K-1$".

Un tel entier K existe car la courbe n'est pas ramifiée à l'infini et n divise $m(L^\infty)$ qui est égal à la somme $\sum_{\lambda \in \Lambda} m(\lambda)$. Deux cas se présentent alors :

– soit $L^K \cap r(\Lambda) \neq \varnothing$; nécessairement $L^K \cap r(\Lambda)$ est de la forme $\{r(\lambda_2)\}$ et on a $g(L^K) \neq 0$; en particulier n divise $m(\lambda_1) + m(\lambda_2)$; on associe à L^K la paire $\{\lambda_1, \lambda_2\}$; donc $\lambda_1 = \lambda_1(L^K)$.
– soit $L^K \cap r(\Lambda) = \varnothing$; la cinquième ligne du tableau permet par récurrence de construire une suite finie de composantes irréductibles de Z telle que $i(L_q) \to i(L_{q-1}) \to \ldots \to i(L_1) \to i(L^K)$ et qui vérifie de plus : $L_t \cap r(\Lambda) = \varnothing$ pour $t = 1, \ldots, q-1, L_q \cap r(\Lambda) \neq \varnothing$ et $m(L_q) = m(L_{q-1}) = \ldots = m(L_1) \neq 0 \mod [n]$; on pose alors $L_q \cap r(\Lambda) = \{r(\lambda_2)\}$ et on a $g(L^K) \neq 0, g(L) = g(L_q) = 0$ et n divise la somme $m(\lambda_1) + m(\lambda_2)$; de plus $\lambda_1 = \lambda_1(L^K), \lambda_2 = \lambda_2(L^K)$.
Ceci montre le point B.

Montrons le point C.

Soit $\lambda \in \{\lambda_1(L), \lambda_2(L)\} \cap \{\lambda_1(L'), \lambda_2(L')\}$; la remarque 4.19. A dit que $r(\lambda)$ est placé sur une composante irréductible de Z avant L et L', or L et L' sont avant la composante L^∞ : si L et L' étaient distinctes on pourrait construire une boucle non triviale dans l'arbre T, ce qui est exclu.
Ceci achève de prouver la proposition 4.19 et le théorème 4.

5 - Le module libre

Nous voulons savoir quand est-ce que Γ_{ab} est un $Z[\tilde{\sigma}]/Tr(\tilde{\sigma})$-module libre, et, si c'est le cas, connaître son rang. Nous avons le théorème 5 :

THÉORÈME 5. *Soit n premier à la caractéristique résiduelle du corps K, $\mathcal{C}$ une courbe de Mumford de groupe de Schottky Γ. On suppose que $\mathcal{C}$ est un revêtement cyclique de $\mathbb{P}^1_K$ d'ordre n; on note r le nombre de points de ramification de $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{P}^1_K$. Alors on a :*
A - Le rang du $Z[\tilde{\sigma}]/Tr(\tilde{\sigma})$-module projectif Γ_{ab} est défini si et seulement si $\Gamma_{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est un $\mathbb{Q}[\tilde{\sigma}]/Tr(\tilde{\sigma})$-module libre, et si c'est le cas, les rangs sont les mêmes.
B - La ramification de la courbe $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{P}^1_K$ est totale si et seulement si Γ_{ab} est un $Z[\tilde{\sigma}]/Tr(\tilde{\sigma})$-module libre de rang $\frac{r-2}{2}$.

Preuve du théorème 5.
A - Si Γ_{ab} est un $Z[\tilde{\sigma}]/Tr(\tilde{\sigma})$-module projectif de rang défini, alors $\Gamma_{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est aussi un $\mathbb{Q}[\tilde{\sigma}]/Tr(\tilde{\sigma})$-module projectif de rang défini, et les rangs sont les mêmes. Comme Γ_{ab} est un type fini et que l'anneau $\mathbb{Q}[\tilde{\sigma}]/Tr(\tilde{\sigma})$ est un semi-local (comme produit de corps), on a que $\Gamma_{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est libre de rang le rang commun aux deux modules projectifs. La réciproque est triviale.
B - Si la ramification de la courbe $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{P}^1_K$ est totale, la formule du lemme 3.8 et le couplage des points de ramification de la proposition 4.19 nous

donnent :

$$\sum_{d/n,d>1} \varphi(d)N(d) = -(n-1) + \frac{r}{2}(n-1) = \frac{r-2}{2}(n-1).$$

Comme $\sum_{d|n,d>1} \varphi(d) = n-1$ et $N(d) \leq \frac{r-2}{2}$ pour tout diviseur d de n, $d>1$ c'est que $N(d) = \frac{r-2}{2}$ pour tout diviseur d de n, avec $d>1$. Le rang du $Z[\tilde{\sigma}]/Tr(\tilde{\sigma})$-module projectif, Γ_{ab}, est donc défini égal à $\frac{r-2}{2}$. On voit qu'un système générateur de Γ_{ab}, de cardinal $\dfrac{r-2}{2}$, donné par le théorème 4 fournit une base de $\Gamma_{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}[\tilde{\sigma}]/Tr(\tilde{\sigma})$. Cette famille est donc une base de Γ_{ab} puisque l'anneau $Z[\tilde{\sigma}]/Tr(\tilde{\sigma})$ est sans Z-torsion.

Réciproquement, la formule du lemme 3.8 et la proposition 4.19 montrent que pour tout $\lambda \in \Lambda$, $pgcd(n, m(\lambda)) = 1$; ce qui montre que la ramification de la courbe $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{P}^1_K$ est totale.

6 - Complément : Action de Galois sur $H^1_{DR}(\mathcal{C})$

Nous considérons ici la cohomologie de de Rham analytique rigide; selon les travaux de R. Kiehl ([Ki]) et aussi F. Baldassari ([Ba]) on sait que dans notre situation les cohomologies de de Rham, analytique rigide et algébrique, sont canoniquement isomorphes. Ainsi notre résultat concerne aussi l'action du groupe de Galois sur un réseau de ${H^1_{DR}}^{alg}(\mathcal{C})$. On rappelle que le degré du revêtement est premier à la caractéristique résiduelle du corps K; on suppose ici en outre que la caractéristique de K est nulle.

On identifie le quotient Γ_{ab} au réseau des périodes $\mathcal{R}$ de $(K^*)^g$ et nous identifierons de la même façon $\mathrm{Hom}_Z(\Gamma/[\Gamma,\Gamma], Z)$ à un réseau de $(K^*)^g$ que nous noterons $\mathcal{R}^*$ et qui est le réseau dual de $\mathcal{R}$.

En utilisant des résultats de L. Gerritzen ([Ge 3]) nous obtenons le :

THÉORÈME 6. *Soit n premier à la caractéristique résiduelle du corps K. On suppose que la caractéristique de K est nulle.*

Soit C une courbe de Mumford de groupe de Schottky Γ qui est un revêtement cyclique de $\mathbb{P}^1_K$ d'ordre n et de groupe de revêtement $< \sigma >$. On note r le nombre de points de ramification de C sur $\mathbb{P}^1_K$, $\mathcal{R}$ le réseau des périodes de C, puis $\mathcal{R}^* = Hom_Z(\mathcal{R}, Z)$ et $\mathcal{H} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{R}^*$. Alors :
1 - Il existe un isomorphisme $H^1_{DR}(C) \simeq \mathcal{H} \underset{Z}{\otimes} K$ compatible avec l'action de σ.
2 - Le $Z[\tilde{\sigma}]/Tr(\tilde{\sigma})$-module $\mathcal{H}$ est projectif et s'écrit comme somme directe de $Z[\tilde{\sigma}]/Tr(\tilde{\sigma})$-modules monogènes en nombre égal à $r-2$.
3 - La ramification de la courbe C sur $\mathbb{P}^1_K$ est totale si et seulement si $\mathcal{H}$ est un $Z[\tilde{\sigma}]/Tr(\tilde{\sigma})$-module libre de rang $r-2$.

4 - Le rang du $Z[\tilde{\sigma}]/Tr(\tilde{\sigma})$-module projectif $\mathcal{H}$ est défini si et seulement si $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est un $\mathbb{Q}[\hat{\sigma}]/Tr(\hat{\sigma})$-module libre, et, si c'est le cas, les rangs sont les mêmes.

Preuve abrégée. Je donne les idées générales de la preuve.
Une fois montré l'isomorphisme (1), tout découle de la proposition 3.5 et des théorèmes 4 et 5. Avec les notations de [Ge 3] que l'on rappelle :

I le K-espace vectoriel des fonctions méromorphes sur $\Omega_\Gamma = \mathbb{P}^1_K \mathcal{C}_\Gamma$ pour lesquelles $f(y(z)) - f(z)$ est une fonction constante sur Ω_Γ (dépendant de $y \in \Gamma$),

$K(\mathcal{C})$ le corps des fonctions rationnelles sur la courbe, $K(\mathcal{C}) \subset I$,

Ω_1 le K-espace vectoriel des différentielles analytiques sur Ω_Γ, Γ-invariantes,

Ω_2 le K vectoriel des différentielles Γ-invariantes de deuxième espèce sur Ω_Γ,

il est facile d'établir (toujours en utilisant les résultats de [Ge 3]) la somme directe:

$$H^1_{DR}(\mathcal{C}) = \Omega_1 \oplus dI/dK(\mathcal{C})$$

On montre l'isomorphisme :

$$dI/dK(\mathcal{C}) \simeq Hom_Z(\Gamma, Z) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} K = Hom_Z(\Gamma_{ab}, Z) \otimes_{\mathbb{Z}} K$$

à l'aide de la suite exacte

$$0 \longrightarrow K(\mathcal{C}) \longrightarrow 1 \longrightarrow Hom_Z(\Gamma, K) \otimes_{\mathbb{Z}} K \longrightarrow 0,$$

et de l'isomorphisme

$$I/K(\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} dI/dK(\mathcal{C}) \qquad \text{(la caractéristique de } K \text{est nulle).}$$

Enfin, on utilise que Ω_1 est engendré sur K par $\{\frac{du_\alpha}{u_\alpha}; \alpha \in \Gamma\}$ où $u_\alpha(z) = \theta(a, \alpha a, z)$ (cf. les notations du §2) (Ceci est prouvé dans [G-vdP] chap. VI, §4 pp. 208–212). On a donc prouvé que $H^1_{DR}(\mathcal{C}) \simeq [\mathcal{R} \oplus \mathcal{R}^*] \otimes_{\mathbb{Z}} K$.

On peut consulter la preuve en détail dans [Br1].

BIBLIOGRAPHIE

[Ba] F. Baldassari, *Comparaison entre la cohomologie algébrique et la cohomologie p-adique rigide à coefficients dans un module différentiel.I. Cas des courbes*, Invent. Math. **87 n° 1** (1987), 83–99.

[Bourb.] Bourbaki, *Elements de mathématique*, Hermann, Paris, 1962.

[B-G-R] S. Bosch, U. Güntzer, R.Remmert, *Non Archimedean Analysis*, Springer (1984).

[BR 1] C. Brouillard, *Action du groupe de Galois sur les périodes de certaines courbes de Mumford*, Thèse de l'Université Paul Sabatier, Toulouse, 1992.

[BR 2] C. Brouillard, *Action du groupe de Galois sur les périodes de certaines courbes de Mumford*, C.R. Acad. Sci. Paris **t. 315, Série I** (1992), 567–570.

[F-M] J.-M. Fontaine et W. Messing, *p-adic periods and p-adic cohomology*, Cont. Math **67 AMS** (1987), 179–207.

[F-vdP] J. Fresnel et M. van der Put, *Géométrie analytique rigide et applications*, Boston, Birkhäuser, 1981.

[Ge 1] L. Gerritzen, *On automorphism groups of p-adic Schottky curves*, Groupe d'Etude d'Analyse Ultram. 1976/1977, exp. n° 17 Secrét. Math., Paris, 1977.

[Ge 2] L. Gerritzen, *Periods and Gauss-Manin connection for families of p-adic Schottky groups*, Math. Ann. **275** (1990), 425–453.

[Ge 3] L. Gerritzen, *Integrale zweiter Gattung auf Mumfordkurven*, Math. Ann. **270** (1985), 381–392.

[Ge 4] L. Gerritzen, *On the Jacobian variety of a p-adic Schottky curve*, Proceedings on the Conference on p-adic Analysis, Nijmegen, 1978.

[G-vdP] L. Gerritzen - M. van der Put, *Schottky groups and Mumford curves*, Lect. Notes in Math. **817**, Springer, 1980.

[Go] C. Godbillon, *Elements de topologie algébrique*, Hermann, Paris, 1985.

[He] F Herrlich, *Die Ordnung der Automorphismengruppe ciner p-adischen Schottky Kurve*, Math. Ann. **246** (1980), 125–130.

[M-D] Y. Manin et V.G. Drinfeld, *Periods of p-adic Schottky groups*, J. reine angew. Math. **262/263** (1973), 239–247.

[M] M. Matignon, *Genre résiduel des corps de fonctions valués*, Manuscripta math. **58** (1987), 179–214.

[Mum] D. Mumford, *An analytic constrcution of degenerating curves over complete local fields*, Compositio Math. **24** (1972), 129–174.

[My] J.F. Myers, *p-adic Schottky groups*, Thesis, Harvard Univ., 1973.

[S] J.-P. Serre, *Arbres, Amalgames, SL_2*, Astérisque 46, Soc. Math. de France, Paris, 1977.

[vS] G. van Steen, *Hyperelliptic Curves defined by a Schottky Group*, Thèse de l'Univ. d'Anvers, 1981.

[T] J. Teitelbaum, *p-adic periods of genus two Mumford - Schottky Curves*, J. reine angew. Math. **385** (1988), 117–151.

[W] A. Weil, *Sur les périodes des intégrales abéliennes*, Comm. on Pure and Applied Math. **29** (1976), 813–819 et Oeuvres Scientifiques **III**, 391–397.

Christophe Brouillard
Laboratoire de Topologie et Géométrie
U.R.A.-C.N.R.S. 10 408, Université de Toulouse III
118, rte de Narbonne
31062 TOULOUSE Cedex