JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ROBERT GERBER

Observations sur un travail récent de M. Miche

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 32 (1953), p. 79-84.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1953_9_32__79_0>

Observations sur un travail récent de M. Miche ;

PAR ROBERT GERBER.

Dans un travail récent [1], M. R. Miche a cherché à déduire d'un principe variationnel les équations du mouvement non lent d'un fluide visqueux incompressible.

L'auteur a fondé ses conclusions sur une identité qu'il a justifiée pour chaque élément d'un certain ensemble de mouvements virtuels du liquide, dont le mouvement réel (comme nous le montrerons plus loin) ne fait généralement pas partie.

Nous nous proposons de discuter l'interprétation variationnelle que l'auteur donne de ces résultats.

1. Rappelons brièvement l'essentiel des raisonnements de M. Miche.

M. Miche considère le champ du potentiel vecteur $\vec{\Psi}$ du vecteur vitesse $\vec{V}$; la condition d'incompressibilité est alors identiquement satisfaite. Il transforme ensuite les équations indéfinies du mouvement en effectuant sur celles-ci l'opération $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$ de façon à obtenir les équations classiques, dites de compatibilité, portant sur $\vec{\Psi}$. Sous forme vectorielle, ces équations s'écrivent

$$(1)\quad \vec{G} \equiv -\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, V\right) - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, V \wedge \vec{V}\right) + \frac{\mu}{\rho}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\Delta V}\right) = 0, \quad \vec{V} \equiv \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\Psi.$$

Soit alors $\mathcal{E}$ l'ensemble des vecteurs $\vec{\Psi}$ définis sur un domaine $\mathcal{D}$ de

[1] *J. de Math.*, **28**, [9], 1949, p. 151-179.

l'espace et sur un intervalle du temps t, assujettis à vérifier des conditions de continuité et aux limites qui seront à préciser.

L'auteur tente de construire une fonctionnelle $\mathcal{L}$ de $\vec{\Psi}$ définie sur $\mathcal{E}$, telle que les équations d'Euler qui expriment que $\mathcal{L}$ est stationnaire pour un élément particulier $\vec{\Psi}_1 \in \mathcal{E}$ coïncident avec les équations (1).

Des considérations énergétiques suggèrent de faire figurer dans $\mathcal{L}$ l'intégrale,

$$\int_{\mathcal{D}} (T + 2\Phi)\, d\tau, \tag{2}$$

où :

Φ est la fonction de dissipation de Rayleigh;
T, la variation d'énergie cinétique dans l'unité de temps.

On sait, d'autre part, que M. Millikan dans ses recherches sur ce même sujet [2], introduit dans la fonction de Lagrange le produit par un multiplicateur de la quantité div V qui est nulle pour un fluide incompressible [3]. L'auteur traite les premiers membres des équations (1) d'une façon analogue [4] et il prend une fonctionnelle $\mathcal{L}$ de la forme :

$$\mathcal{L} = \int_{\mathcal{D}} \left(T + 2\Phi + \vec{\lambda}.\vec{G}\right) d\tau, \tag{3}$$

---

[2] Ces recherches sont exposées dans : *Les leçons sur le fluide visqueux*, de M. Henri Villat, chap. III, p. 103.

[3] L'emploi de la méthode des multiplicateurs est classique dans le cas de fonctions d'une seule variable, même lorsqu'elles sont astreintes à satisfaire sur le champ variationnel à des conditions non holonomes. Il est hors de doute que la méthode des multiplicateurs s'étend au cas des fonctions de plusieurs variables indépendantes assujetties à vérifier les équations aux dérivées partielles non intégrables. A ma connaissance, la justification rigoureuse et générale de ce point n'a pas été faite jusqu'à ce jour [*voir* R. Courant, *Methoden der Mathematischen.* (*Mathematischen Physik*, t. 1 chap. IV, § 7)].

[4] *Loc. cit.*, p. 153 : « or cette valeur de θ (div V) n'est pas la seule condition à laquelle doivent satisfaire les quatre inconnues de base du problème ..., il y en a trois autres qui sont les équations de Navier ... et il n'y a *a priori*, aucune raison de ne pas introduire également à titre additif ces trois expressions dans la fonction de Lagrange en les affectant de multiplicateurs convenables ».

$\vec{\lambda}$ étant un vecteur, fonction des coordonnés et du temps qui devra être déterminé de façon que $\mathcal{L}$ admette les équations (1) pour équations d'Euler.

M. Miche est alors conduit au résultat suivant :

Si dans l'expression de la variation $\delta\mathcal{L}$ on fait

$$\vec{\lambda} = \rho\vec{\Psi}, \tag{4}$$

cette variation a pour valeur

$$(\delta\mathcal{L})_{\vec{\lambda}=\vec{\Psi}} = -\int_{\mathcal{O}} \rho\vec{G}.\delta\vec{\Psi}\,d\tau. \tag{5}$$

Dans le calcul conduisant à cette dernière relation, le vecteur $\vec{\lambda}$ est traité comme un vecteur donné et qui n'est donc pas soumis à la variation.

Ce résulat peut se traduire analytiquement par l'identité

$$\int_{\mathcal{O}} \left[\delta(T + 2\Phi) + \rho\vec{\Psi}.\overrightarrow{\delta G}\right] = -\int_{\mathcal{O}} \rho\vec{G}.\delta\vec{\Psi}, \tag{6}$$

ou encore par

$$\delta\left[\int_{\mathcal{O}} \left(2\Phi + T + \rho\vec{G}.\vec{\Psi}\right) d\tau\right] = 0. \tag{7}$$

Ainsi l'intégrale figurant dans cette dernière identité est constante pour tous les éléments de l'ensemble $\mathcal{E}$ ([5]). C'est en cela que consiste l'identité établie par M. Miche.

([5]) Ce résultat peut-être retrouvé en partant des équations de compatibilité. Par exemple en se limitant aux mouvements permanents

$$-\rho\vec{G} = \rho\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,V \wedge \vec{V}\right) + \mu\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}_3 V. \tag{a}$$

Dans le cas des fluides incompressibles, la fonction de dissipation peut se mettre sous la forme (*voir* : *Leçons sur les fluides visqueux*, de M. H. Villat, p. 74) :

$$2\Phi = \mu\left[\mathrm{div.grad}\,V^2 + 2\,\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,V \wedge \vec{V}\right) + \left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,V\right)^2\right]. \tag{b}$$

Considérons l'expression :

$$\mathcal{L} = \int_{\mathcal{O}} \left(2\Phi + \rho.\vec{\Psi}.\vec{G}\right) d\tau \tag{c}$$

et transformons-là en tenant compte des expressions (a) et (b) de $\vec{G}$ et de $\vec{\Phi}$ et

L'égalité (5) montre que la variation $(\delta\mathcal{L})_{\vec{\lambda}=\vec{\Psi}}$ calculée comme il vient d'être dit est nulle quand $\vec{\Psi}$ satisfait aux équations (1). De ce résultat formel, M. Miche semble conclure à l'existence d'un principe variationnel pour les écoulements des fluides visqueux incompressibles les plus généraux.

2. La forme que l'auteur donne à la fonctionnelle $\mathcal{L}$ appelle les observations suivantes :

Tandis que la condition div V = o est identiquement vérifiée sur le champ fonctionnel, les équations (1) ne le sont que pour les éléments du champ $\mathcal{E}$ rendant $\mathcal{L}$ stationnaire. Ces équations ne sont pas des conditions de liaisons comme l'est la condition d'incompressibilité et il n'est donc pas *a priori* légitime de les traiter d'une façon analogue.

---

de l'identité vectorielle classique :

(*d*) $$\vec{A}.\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mathrm{div}\left(\vec{B}\wedge\vec{A}\right) + \vec{B}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,A,$$

alors

$$\begin{aligned}\vec{\Psi}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,V\wedge\vec{V}\right) &= -\,\mathrm{div}\left[\vec{\Psi}\wedge\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,V\wedge\vec{V}\right)\right] + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\Psi\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,V\wedge\vec{V}\right)\\ &= -\,\mathrm{div}\left[\vec{\Psi}\wedge\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,V\wedge\vec{V}\right)\right]\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\vec{\Psi}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}_3\,V &= \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}_2\,V\wedge\vec{\Psi}\right) + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\Psi\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}_2\,V\right)\\ &= \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}_2\,V\wedge\vec{\Psi}\right) + \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,V\wedge\vec{V}\right) + \left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,V\right)^2,\end{aligned}$$

les termes $\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,V\right)^2$ disparaissent dans l'intégrale (*c*) et celle-ci porte uniquement sur une somme de divergences

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \int_{\varpi}\mathrm{div}\Big\{ & 2\mu\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,V\wedge\vec{V}\right) + 2\mu\,\mathrm{grad}\,V^2\\ & + \rho\left[\vec{\Psi}\wedge\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,V\wedge\vec{V}\right)\right] - \rho\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}_2\wedge\vec{\Psi}\right) - \rho\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,V\wedge\vec{V}\right)\Big\}d\tau.\end{aligned}$$

$\mathcal{L}$ sera donc constant pour l'ensemble des mouvements pour lesquels $\vec{V}$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,V$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}_2\,V$ prennent des valeurs données à la frontière ($\vec{\Psi}$ est défini à un $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ près qui peut-être choisi pour que les valeurs de $\vec{\Psi}$ à la frontière soient également données).

Mais il y a plus; en introduisant les premiers membres des équations d'Euler dans la fonction de Lagrange, cette dernière est du même ordre différentiel que ses équations d'Euler. On se trouve dans un cas singulier du calcul des variations où les équations d'Euler sont d'un ordre différentiel inférieur à $2n$, n étant de l'ordre de la fonction de Lagrange. Un tel cas singulier n'a généralement pas de solution.

3. M. Miche n'énonce pas explicitement les conditions aux limites que vérifie $\vec{\Psi}$ sur l'ensemble $\mathcal{E}$; mais il semble dans le cas des mouvements permanents que les calculs conduisant à la formule (5) supposent que $\vec{\Psi}$ et ses trois premiers rotationnels prennent des valeurs données à la frontière.

Or on sait que dans le cas du mouvement permanent il existe, en général, un écoulement bien défini pour des valeurs de $\vec{V} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\Psi$ données à la frontière ([6]). Les données précédentes sont surabondantes et généralement il n'existera pas de mouvement réel appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}$.

Au surplus, la vérification de ce point dans le cas des mouvements lents est élémentaire ([7]).

4. Il semble que si l'on voulait interpréter la relation (5) par une propriété extrémale pour chaque solution des équations (1), il serait

---

([6]) *Cf.* LERAY, *Thèse* (*J. de Math.*, 1933, t. **12** p. 1-82.

([7]) Pour ce qui est du cas des mouvements non permanents, la façon dont M. Miche pose le problème suggère que l'auteur croit pouvoir définir un écoulement au moyen des données limites suivantes : celles du cas du mouvement permanent plus les valeurs de $\frac{\vec{V}}{t}$ à la frontière. Nous nous dispensons de discuter de l'éventuelle équivalence de ces conditions avec les conditions classiques [donnée de $\vec{V}(x, y, z, o,)$dans $\mathcal{D}$ et de $\vec{V}(x, y, z, t)$ sur Σ].

Cf. LERAY. *Acta Mathematica*, t. **63**, 1934, p. 193-248;

DOLIDZE, *Rev. de Math. appliquées et de Mécanique* (en russe), t. **11**, 1947, p. 238-250; t. **12**, 1948, p. 165-180;

OSEEN, *Hydrodynamik*, Leipzig, 1927 p. 66, § 7.

nécessaire d'introduire la fonctionnelle $I_{(\vec{\Psi}_1,\vec{\Psi}_2)}$ définie sur l'ensemble $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ par :

$$I_{(\vec{\Psi}_1,\vec{\Psi}_2)} = \int_{\mathcal{D}} \left[T_{(\vec{\Psi}_1)} + 2\Phi_{(\vec{\Psi}_1)} + \rho \vec{\Psi}_2 . \vec{G}_{(\vec{\Psi}_1)} \right] d\tau \tag{8}$$

$\mathcal{E}$ étant supposé contenir un élément $\vec{\Psi}_0$ vérifiant les équations (1), on voit que $I_{(\vec{\Psi},\vec{\Psi}_0)}$ prise à $\vec{\Psi}_0$ constant est stationnaire pour

$$\vec{\Psi} = \vec{\Psi}_0.$$

Mais dans cette interprétation de (5), les équations (1) n'apparaissent pas comme les équations d'Euler d'une certaine fonctionnelle $\mathcal{L}$. D'ailleurs, comme nous l'avons montré, l'ensemble $\mathcal{E}$ ne contient généralement pas d'élément satisfaisant aux équations (1).

Dès lors, il ne semble pas qu'on puisse déduire d'un principe variationnel les équations générales du mouvement au moyen de la méthode suivie par Mr Miche.

5. Rappelons pour finir les résultats négatifs obtenus déjà dans cette voie.

M. Millikan dont les travaux ont été exposés par M. H. Villat [8] a montré que dans le cas des mouvements permanents non lents, on ne pouvait espérer déduire les équations de Navier comme équations d'Euler d'une fonction de Lagrange constituée avec les vitesses et leurs dérivées premières d'espace.

Nous avons nous-même cherché à faire cette réduction à un principe variationnel en suivant une masse du fluide dans son mouvement et nous sommes également par cette méthode arrivés à un résultat négatif [9].

---

(8) *Voir* note (2).

(9) *Ann. de l'Institut Fourier* t. **1**, 1949, p. 157-162.