

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. TORTRAT

Les processus strictement stationnaires de Markoff et leurs corrélations

Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 32 (1953), p. 281-333.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1953_9_32_281_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Les Processus strictement stationnaires de Markoff
et leurs corrélations;*

PAR A. TORTRAT.

SOMMAIRE. — Ce travail a, d'après les suggestions de M. Robert Fortet, été orienté vers l'étude des fonctions de corrélation des processus strictement stationnaires de Markoff; les nombreux travaux au sujet de ces processus (*cf.* plus loin) ont surtout porté sur leur comportement asymptotique, c'est-à-dire sur l'itération de l'opérateur linéaire $A(1)$ qui représente les probabilités de passage d'un état à un autre dans le temps unité. L'étude de la fonction de corrélation $\rho(t)$ ne permet plus de se limiter à ce point de vue, et toutes les propriétés du demi-groupe constitué par les opérateurs $A(t)$ doivent intervenir; il est naturel d'utiliser pleinement les progrès récents de la théorie des opérateurs linéaires et de l'analyse fonctionnelle respectivement dans un espace de Banach et une algèbre de Banach et ceci permet la plus grande généralité et plus de simplicité dans l'étude des problèmes.

Nous nous servons constamment des résultats de cette sorte exposés dans le traité de Hille (*cf.* plus loin) et, en particulier, de la notion de générateur du demi-groupe $A(t)$ (c'est-à-dire dans le cas le plus simple, de $\frac{dA(t)}{dt}$ pour $t=0$). Les propriétés de $\rho(t)$ sont liées de très

Nota. — Les résultats du chapitre III ont fait l'objet, partiellement, d'une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, présentée par M. Jacques Hadamard le 16 mai 1949.

Journ. de Math., tome XXXI, fasc. 4, 1953.



près à celles de ce générateur a , à sa structure géométrique, et à beaucoup de problèmes importants de la théorie des opérateurs linéaires. Des résultats précis nécessitent des hypothèses restrictives et bien des problèmes que nous posons sont encore à résoudre.

C'est pourquoi nous consacrons le premier chapitre à un exposé des propriétés les plus simples et des résultats les plus importants de la théorie spectrale des opérateurs linéaires, ainsi qu'à celui de quelques théorèmes concernant le générateur d'un demi-groupe additif et la transformée de Laplace de ce demi-groupe; tout ceci, à quelques remarques près, d'après les travaux cités plus loin de Hille et N. Dunford.

Au deuxième chapitre, nous étudions les propriétés de $A(1)$ et a dues aux conditions particulières aux problèmes de probabilités, c'est-à-dire principalement au fait que $A(t)$ transforme toute fonction ≥ 0 en une fonction de même type : la propriété qui en découle immédiatement pour a est suffisante, dans le cas d'un nombre fini d'états possibles, ou dans le cas dénombrable et uniforme pour que $A(t)$ soit du type indiqué.

Étude de la construction de $A(t)$ à partir de $A(1)$.

Propriétés de $A(1)$ et, en particulier, des points du spectre, de module 1, importants pour l'étude asymptotique et qui ont déjà donné lieu à de nombreux travaux.

Le troisième chapitre traite de la forme générale de la corrélation $\rho(t)$. Le résultat principal est le suivant :

$$\rho(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x), \quad F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \mathcal{R}[R(a, ix)Jf, g] dx,$$

$R(a, \lambda)$ étant la résolvante de a ; lorsque ix_0 (x_0 réel) est pôle pour a , R n'est pas défini, mais l'intégrale a un sens, lorsque x tend d'un côté vers x_0 , et subit une discontinuité en ce point. Cette formule implique les hypothèses suivantes : $A(t)$ est mesurable au sens fort pour $t \geq 0$, converge fortement vers J quand $t \rightarrow 0$ et a n'a sur l'axe imaginaire qu'un nombre fini de points singuliers isolés, pôles de la résolvante. Ceci entraîne, en particulier, l'analyticité de la partie continue du spectre de Fourier de $\rho(t)$. D'autres propriétés en résultent pour A et a relativement aux points ix_0 pôles de a , lorsque ceux-ci existent.

Nous donnons comme exemple de toutes ces notions, celui du mouvement brownien étudié par M. Paul Lévy.

Au chapitre IV, nous précisons les propriétés précédentes dans le cas fini.

La construction de $A(t)$ à partir de $A(1)$ nous permet de retrouver de façon naturelle la forme canonique de Jordan des matrices dans un espace euclidien projectif, et l'expression canonique exacte de toutes les solutions de l'équation $A(s)A(t) = A(s+t)$. Nous l'utilisons pour donner des exemples particuliers des propriétés exprimées auparavant et préciser la forme de $\rho(t)$, ainsi que le problème réciproque.

L'examen détaillé des chaînes à trois états possibles conduit à la conclusion, non évidente *a priori*, que

$$\rho(t) = s^t + T t s^{t-1}, \quad \text{avec } 0 \leq \rho(t) \leq 1 \quad (0 < s < 1),$$

n'est pas toujours corrélation d'une telle chaîne, en particulier que $\frac{T}{sL\frac{1}{s}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors que $\frac{T}{sL\frac{1}{s}} \leq 1$ suffit aux conditions écrites ci-dessus et imposées à toute fonction de corrélation.

INTRODUCTION.

Le problème des chaînes simples constantes de Markoff, suivant l'expression de Doblin, a été étudié par un très grand nombre d'auteurs et dans des cas très variés. Dans le livre de M. Fréchet (Collection Borel, *Recherches théoriques modernes*), on trouvera une importante bibliographie pour les travaux antérieurs à 1938. Nous citerons en cours de route différents auteurs, donnant à ce moment des références, mais ne prétendons pas à être complet sur ce sujet.

Ce problème a d'abord été étudié dans le cas fini, c'est-à-dire d'un nombre fini d'états possibles, puis dans celui où il existe une densité de probabilité sur un ensemble borné, avec certaines restrictions (un des cas de M. Fréchet), dans le cas dénombrable [M. R. Fortet ⁽¹⁾,

(¹) M. R. FORTET, *Thèse (Revista de Ciencias, Lima, 1938)*.

M. Doob ⁽²⁾]. Doblin ⁽³⁾ a étudié le cas général par une méthode directe. Nous posons ici le problème dans les mêmes conditions, en vue de lui appliquer la théorie générale des opérateurs linéaires; une telle façon de procéder a été utilisée par Yosida et Kakutani ⁽⁴⁾ pour une étude asymptotique et sous des conditions qui rentrent dans les cas étudiés par M. R. Fortet (chap. III, réf. citée).

POSITION DU PROBLÈME. — Ω est un ensemble abstrait, x désigne un point de cet ensemble : $x \in \Omega$. On ne considère dans la suite que certains sous-ensembles E de Ω , dits mesurables, formant un corps de Borel B ; c'est-à-dire B admet les deux opérations suivantes :

F_1 , addition d'un nombre fini, ou d'une infinité dénombrable d'ensembles disjoints;

F_2 , soustraction de deux ensembles dont l'un contient l'autre.

On peut compléter ces hypothèses par la troisième suivante : la réunion de deux ensembles (disjoints ou non) est permise, pour que la probabilisation ultérieure de ces ensembles soit tout à fait satisfaisante [cf. P. Lévy ⁽⁵⁾]; celle-ci sera, par exemple, réalisée par partition.

Les définitions de quelques-uns des termes employés ci-dessous seront rappelées et précisées au chapitre I.

Nous considérerons deux types de fonctions sur Ω :

1° $f(x)$ est une fonction mesurable sur Ω , c'est-à-dire que $\mathcal{E}[a < f(x) < b]$, ensemble des points où $a < f(x) < b$ est mesurable, ou $\mathcal{E} \in B$ { les postulats F_1 et F_2 entraînent alors que $\mathcal{E}[f(x) = a]$ est mesurable }; en outre, $f(x)$ est bornée sur Ω ; si $f(x)$ est à valeurs complexes, ses parties réelle et imaginaire sont chacune fonction mesurable sur Ω .

Ces fonctions constituent un espace de Banach \mathcal{B} , la norme de $f(x)$

⁽²⁾ DOOB, *Trans. Amer. Math. Soc.*, july, 1942-1943.

⁽³⁾ DOBLIN, *Ann. de l'Éc. norm. sup.*, t. LVII, fasc. II.

⁽⁴⁾ YOSIDA et KAKUTANI, *Ann. of Math.*, 1941.

⁽⁵⁾ P. LÉVY, *Addition des variables aléatoires* (Collection Borel), Chap. II, § 10.

y étant la borne supérieure du module de $f(x)$ sur Ω . Le seul point délicat est de démontrer que cet espace est complet, nous admettrons cette proposition affirmée dans Yosida (réf. citée).

La restriction que f soit bornée n'est pas essentielle en ce sens qu'on pourra modifier la définition de \mathcal{B} pour l'adapter à un cas particulier (cf. chap. III, l'exemple du mouvement brownien).

2° $g(E)$ est une fonction complètement additive d'ensemble, c'est-à-dire que si $E = \sum_1^\infty e_i$, les e_i , disjoints et E étant des ensembles de B ,

$$g(E) = \sum_1^\infty g(e_i).$$

Ces fonctions forment un espace de Banach \mathcal{B}' , la norme y étant la variation totale de $|g(E)|$ sur Ω , soit $\int_\Omega |g(dx)|$; il est facile ici de démontrer que \mathcal{B}' est complet

$$\int_\Omega |g_n(dx) - g_m(dx)| < \varepsilon \quad \text{si } m, n, \text{ sont } > N(\varepsilon),$$

donc pour tout $\mathcal{E} \in B$, $|g_n(\mathcal{E}) - g_m(\mathcal{E})| < \varepsilon$ dans les mêmes conditions et $g_m(\mathcal{E}) \rightarrow g(\mathcal{E})$, la convergence étant uniforme par rapport à \mathcal{E} . Alors la complète additivité de g résulte de celle des g_m . \mathcal{B}' appartient au dual ou espace adjoint de \mathcal{B} (espace des fonctionnelles linéaires continues sur \mathcal{B}), $\int_\Omega g(dy)f(y) = (g^*, f)$ étant la fonctionnelle de f définie par g (produit scalaire de $f \in \mathcal{B}$ par la conjuguée g^* de g qui comme $g \in \mathcal{B}'$).

Ici, comme dans tout ce qui suit, les intégrales sont prises au sens de Lebesgue-Stieltjès généralisé, c'est-à-dire

$$\int_\Omega g(dy)f(y) = \lim \sum g(e_i)f(x_i) \quad (e_i \in \mathcal{B}),$$

les e_i étant des ensembles de Ω dans lesquels l'oscillation de f est petite (par exemple en module et en argument, x_i étant un point arbitraire de e_i ; la limite est prise lorsque cette oscillation tend vers zéro, le nombre des e_i augmentant indéfiniment).

Les points de Ω forment les états possibles du système aléatoire considéré, dépendant du temps; à un instant t , la probabilité de E est $p(E, t) \geq 0$, $p \in \mathcal{B}'$. La norme $\int_{\Omega} p(dx, t)$ vaut 1. On suppose bien définies les probabilités de passage du temps s au temps t , de l'état x , à un état appartenant à E , et que $P(x, E, s, t)$ est mesurable par rapport à x pour tout $E \in \mathcal{B}$ et, bien entendu, complètement additive en E . Sur \mathcal{B}' , la norme de P est 1, car

$$\int_{\Omega} P(x, dy) = P(x, \Omega) = 1, \quad \text{quels que soient } s \text{ et } t.$$

et

$$0 \leq P(x, E, s, t) \leq 1;$$

elle est ≤ 1 sur \mathcal{B} .

Ce processus constitue une chaîne simple de Markoff si

$$P(x, E, s, t) = \int_{\Omega} P(x, dy, s, u) P(y, E, u, t) \quad (0 \leq s \leq u \leq t);$$

c'est-à-dire qu'il n'y a pas hérédité, $P(x, E, u, t)$ ne dépend pas de ce que l'on sait s'être produit à l'instant antérieur s , alors que dans le cas général (chaîne non markoffienne), il faudrait mettre dans la formule ci-dessus une probabilité conditionnelle $P(y, E, u, t/x_s)$.

Si $p(E, s)$ est la distribution de probabilité à l'instant s , à l'instant t elle est

$$p(t) = A'p(s), \quad p(E, t) = \int_{\Omega} p(dx, s) P(x, E, s, t).$$

Si $X(x)$ est la valeur de la variable aléatoire pour l'état x , la valeur moyenne de $X(t)$, sachant qu'au temps s on était à l'état x_0 , est

$$\int_{\Omega} P(x_0, dx, s, t) X(x) = f(x_0), \quad AX = f.$$

On voit que P définit deux opérateurs linéaires, A et A' opérant respectivement dans \mathcal{B} et \mathcal{B}' , transformant chacun de ces espaces en tout ou partie de lui-même. Les opérateurs $A(s, t)$ appartiennent à l'algèbre de Banach \mathcal{A} des opérateurs linéaires bornés sur \mathcal{B} .

Le produit scalaire de $g \in \mathcal{B}'$ et $f \in \mathcal{B}$ est

$$(g, f) = \int_{\Omega} g^*(dx) f(x)$$

(g^* est la quantité conjuguée de g). L'opérateur T tel que $T\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ sera dit hermitien si ($T \in \mathcal{T}$ si $T\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$)

$$(Tf, g) = (f, Tg) \quad (f, g \in \mathcal{B}).$$

C'est le cas de p considéré comme opérateur multiplicatif

$$pf(x) = g, \quad g(E) = \int_E p(dx) f(x).$$

L'opérateur A vérifie la relation fondamentale des processus markoffiens

$$A(s, t) = A(u, t)A(s, u) \quad (\text{lire le produit de droite à gauche}).$$

de même A' (A' est d'ailleurs l'opérateur adjoint de A).

La chaîne est complètement définie par $A(s, t)$, $p(E, t_0)$, et $f(x)$ qui fixe les valeurs prises (et ceci indépendamment du temps) dans chacun des états possibles.

Dans le cas strictement stationnaire dont, seul, nous nous occupons dans ce qui suit, tout le processus ne dépend que de $t - s$; les données sont $A(t)$, $p(E)$ ne dépendant plus du temps, et $X(x)$. Conditions nécessaires, puisque la loi à deux variables $X(s)$, $X(t)$ est $\mathcal{P}(E, E', t - s)$ et que $p(E, s) = \int_{\Omega} \mathcal{P}(E, dy, t - s)$ ne peut donc dépendre de s .

Les $A(t)$ ($0 \leq t < \infty$) forment alors un demi-groupe \mathcal{O} à un paramètre, c'est-à-dire que leur ensemble admet l'opération $A(t)A(s)$ associative; \mathcal{O} est même ici additif abélien

$$(1) \quad A(s)A(t) = A(t)A(s) = A(s + t).$$

On a de plus

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|A(t)\| = 1, \quad \text{c'est-à-dire } \|Af\| \leq \|A\| \cdot \|f\| = \|f\|, \\ \text{la borne } 1 \text{ étant atteinte pour } f = \text{const.}, \text{ ce que nous noterons } A1 = 1, \text{ et} \\ A(t) \text{ de type } \geq 0, \quad \text{c'est-à-dire } f(x) \geq 0 \\ \text{pour tout } x \text{ entraîne } Af \text{ partout } \geq 0 \end{array} \right.$$

[ou ce qui est équivalent, $P(x, E, t) \geq 0$ pour tous x, E, t].

CHAPITRE I.

OPÉRATEURS LINÉAIRES ET DEMI-GROUPES.

A. DÉFINITIONS. — \mathcal{B} est un espace de Banach, complexe, s'il est :

Vectoriel sur le corps Γ des nombres complexes ou : f, g appartenant à \mathcal{B} , $\alpha f + \beta g$, α et β étant deux nombres complexes quelconques, appartient aussi à \mathcal{B} ;

Normé : $\|f\|$ est un nombre > 0 , fonction de f , qui satisfait à l'inégalité triangulaire

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad \text{et} \quad \|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$$

la distance de f et g est $\|g - f\|$;

Complet : le critère de Cauchy de convergence d'une suite est valable ou : $\|f_n - f_m\| \leq \varepsilon$ pour n, m assez grand entraîne l'existence d'un f , unique avec

$$\|f - f_n\| \rightarrow 0 \quad \text{ou} \quad f_n \rightarrow f \quad (\text{convergence forte}),$$

une topologie (forte) est par suite bien définie dans \mathcal{B} .

A est un opérateur linéaire de $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$ sur \mathcal{R} (en anglais « range ») si : Af est défini pour tout f appartenant au domaine \mathcal{D} de A , et c'est un point (ou vecteur) g du domaine \mathcal{R} ; nous supposons ici que A opère dans \mathcal{B} , c'est-à-dire que $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}$. De plus, $A(f + g)$ existe et égale $Af + Ag$ si Af et Ag existent.

A est borné si $\|Af\| \leq M \|f\|$ pour tout f de \mathcal{D} . La norme de A , $\|A\|$, est le plus petit membre M satisfaisant à cette inégalité; il est équivalent de dire que A est continu à l'origine, donc partout. A est alors défini (et borné) sur la fermeture $\overline{\mathcal{D}}$ de \mathcal{D} (ensemble des points de \mathcal{D} et des points limites de points de \mathcal{D}). Au contraire, si, seulement

A est fermé : si les f_n de \mathcal{D} ont une limite f dans \mathcal{B} , si les Af_n ont aussi une telle limite, g , alors $f \in \mathcal{D}$, et $Af = g$. On étend donc la définition de A à tous les points f pour lesquels cela est possible.

A admet un inverse A^{-1} , si la correspondance qu'il établit entre \mathcal{D} et \mathcal{R} est biunivoque

$$\mathcal{D} \leftrightarrow \mathcal{R} \quad \text{ou} \quad Af = 0 \quad \text{entraîne} \quad f = 0.$$

Notons les propriétés simples suivantes :

A^{-1} borné équivaut à $\|A f\| \geq m \|f\|$ pour tout f , et $\|A^{-1}\|$ est l'inverse du plus grand m satisfaisant à cette inégalité;

A borné est fermé;

A fermé entraîne : si A^{-1} existe, il est aussi fermé; si A est partout défini dans \mathcal{B} , il est borné.

Algèbre \mathcal{A} des opérateurs A linéaires bornés sur \mathcal{B} . — L'ensemble de ces opérateurs, supposés bornés et définis sur tout \mathcal{B} ($\mathcal{O} = \mathcal{B}$), ou endomorphismes, forme en effet un espace vectoriel, normé (norme définie ci-dessus); une multiplication y est définie, associative et distributive par rapport à l'addition, au sens du produit de deux transformations (à lire de droite à gauche), enfin il est immédiat que cet espace est complet, avec la topologie, dite uniforme, définie par la norme.

On définit dans \mathcal{A} :

Une topologie forte, $A_n \rightarrow A$, au sens fort si $A_n f \rightarrow A f$ pour tout $f \in \mathcal{B}$;

Une topologie faible, $A_n \rightarrow A$, au sens faible si $(g, A_n f) \rightarrow (g, A f)$ pour tout f et tout g [*cf.* Introduction, g est une fonctionnelle de f , appartenant à l'espace adjoint \mathcal{B}^* , (g, f) est le produit scalaire $g(f)$].

On démontre que \mathcal{A} est complet avec la topologie forte, mais non forcément avec la topologie faible.

Nous renvoyons pour les démonstrations aux paragraphes 2.12 à 2.16 du traité de Hille ⁽⁶⁾.

B. RÉSOLVANTE ET SPECTRE (*cf.* Hille, chap. V). — La décomposition de l'espace (\mathcal{B}) en sous-espaces invariants par A est intimement liée aux propriétés de la résolvante

$$R_\lambda = R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1},$$

I étant l'opérateur identité ou unité.

⁽⁶⁾ HILLE, *Functional analysis and semi-groups* (*Ann. Math. Soc.*, Colloquium XXXI).

Si R_λ n'existe pas (pour une valeur particulière de λ) c'est que $(\lambda I - A)f = 0$ a au moins une solution; dans le cas contraire, on distingue, avec $(\lambda I - A)\mathcal{O} = \mathcal{R}_\lambda$, suivant que \mathcal{R}_λ est dense sur \mathcal{B} et R_λ borné ou non, ou que \mathcal{R}_λ est non dense sur \mathcal{B} , les éventualités complémentaires suivantes : λ appartient à

$\rho(A)$ ou ensemble résolvant : R_λ est défini sur \mathcal{R}_λ dense sur \mathcal{B} , et borné; donc si A est fermé (R_λ l'est alors aussi), R_λ est partout défini et $R_\lambda \in \mathcal{A}$;

$\sigma_c(A)$ spectre continu : \mathcal{R}_λ dense sur \mathcal{B} , mais R_λ non borné;

$\sigma_R(A)$ spectre résiduel : \mathcal{R}_λ non dense sur \mathcal{B} ; ajoutons le 1^{er} cas;

$\sigma_p(A)$ spectre ponctuel : R_λ n'existe pas, $Af = \lambda f$ a des solutions.

On a les propriétés fondamentales suivantes :

1° $\rho(A)$ est un ensemble ouvert du plan complexe, car

$$\lambda I - A = B_\lambda = \lambda - \lambda_0 + B_{\lambda_0}, \quad \text{d'où} \quad R_\lambda = R_{\lambda_0} [I + (\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0}]^{-1}$$

et si $R_{\lambda_0} \in \mathcal{A}$, $R_\lambda \in \mathcal{A}$ pour $\lambda - \lambda_0$ assez petit, donc σ (ensemble du spectre) est fermé;

2° $R_\lambda - R_\mu + (\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu = 0$ pour tous λ et $\mu \in \rho(A)$, ce qui résulte immédiatement de la définition. Ceci fait de R_λ une fonction vectorielle de λ qui est analytique, du moins localement, c'est-à-dire dans chaque portion connexe de ρ

$$R_\lambda = R_{\lambda_0} + \dots + (\lambda_0 - \lambda)^n R_{\lambda_0}^{n+1} + \dots,$$

et réciproquement toute fonction (opérateur) de λ satisfaisant à 2° et régulière en un point λ_0 de son domaine ρ (c'est-à-dire $R_{\lambda_0} \in \mathcal{A}$) est résolvante de $A = \lambda_0 I - R_{\lambda_0}^{-1}$;

3° D'après les définitions

$$(\lambda I - A)R_\lambda = I, \quad R_\lambda(\lambda I - A)f = f \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{O}(A).$$

Toute la théorie classique de Cauchy des fonctions de variable complexe s'applique alors à ces opérateurs; les intégrales sur un contour formé de courbes de Jordan peuvent être prises au sens de Riemann dans tout $\rho(A)$ (cf. Hille, § 5.8 et 3.10).

Notons que σ se trouve dans $|\lambda| \leq \|A\|$ et que le développement

de R_λ , autour du point à l'infini et valable à l'extérieur de tout cercle $|\lambda| \leq M$ qui contient tout σ à son intérieur, est

$$R_\lambda = \frac{I}{\lambda} + \frac{A}{\lambda^2} + \dots + \frac{A^n}{\lambda^n} + \dots$$

(nous supposons ici A borné).

Décomposition spectrale. — Supposons A borné.

On appelle « spectral set » un sous-ensemble de σ , fermé, et disjoint du reste de σ ; ce complémentaire étant fermé, le spectral set est à la fois fermé et ouvert relativement à σ . Soit

$$\sigma = \Sigma \sigma_i$$

une décomposition de σ en une somme finie de tels sous-ensembles fermés disjoints; on peut les entourer de contours C_i , ne se coupant pas et entièrement situés dans $\rho(A)$ et définir alors

$$J_i = \frac{I}{2\pi i} \int_{C_i} R_\lambda d\lambda, \quad A_i = J_i A = A J_i = \frac{I}{2\pi i} \int_{C_i} \lambda R_\lambda d\lambda, \quad R_i = J_i R = R J_i,$$

tous opérateurs bornés, permutant entre eux, orthogonaux deux à deux si les indices sont différents. Les J_i sont des projecteurs $J_i = J_i^2$ et définissent une décomposition de l'unité, donc de \mathcal{B}

$$I = \Sigma J_i, \quad E_i = J_i \mathcal{B};$$

A et R induisent dans les E_i les opérateurs A_i et R_i ; E_i est invariant par A (c'est-à-dire $A E_i \subset E_i$).

Plus généralement (cf. Nelson Dunford, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1943), soit $f(\lambda)$ fonction holomorphe sur un domaine contenant σ , donc sur un contour C entièrement dans ρ et contenant σ à son intérieur, on a

$$f(A) = \frac{I}{2\pi i} \int_C f(\lambda) R_\lambda d\lambda \quad \text{et si} \quad f(\lambda) = \sum_0^\infty a_i \lambda^i, \quad f(A) = \sum_0^\infty a_i A^i.$$

[Le développement de $f(\lambda)$ étant supposé valable pour $|\lambda| \leq \rho$, $\rho > \|A\|$] et il y a isomorphie entre l'algèbre des $f(A)$, ainsi définis et celle des $f(\lambda)$. De plus, la décomposition spectrale de $f(A)$ est en correspondance parfaite avec celle de A , correspondance qui conserve

les espaces propres E_i et le caractère spectral d'un point λ de σ :

$$\sigma(A) \xleftrightarrow{f} \sigma[f].$$

Noter que, en particulier, tous ces opérateurs permutent entre eux.

Application à un pôle d'ordre ν :

$$(1) \quad R_\lambda = C(\lambda) + \frac{J_0}{\lambda - \lambda_0} + \frac{C_2}{(\lambda - \lambda_0)^2} + \dots + \frac{C_\nu}{(\lambda - \lambda_0)^\nu};$$

au produit des deux fonctions $f_1 = (\lambda_0 - \lambda)^\nu$ et $f_2 = 1$ sur un voisinage de λ_0 , (λ_0 est point isolé de σ), $f_2 = 0$ ailleurs, correspond le produit des opérateurs $(\lambda_0 I - A)^\nu$ et J_0 , d'où

$$(\lambda_0 I - A)^\nu J_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} (\lambda_0 - \lambda)^\nu R_\lambda d\lambda = 0$$

[$C(\lambda)$ est régulier au voisinage de λ_0 , C_0 entoure λ_0], tandis que $(\lambda_0 I - A)^\nu J_0 \neq 0$ si $n < \nu$. D'ailleurs $(\lambda_0 I - A) C_\nu = 0$, il existe des vecteurs propres et $\lambda_0 \in \sigma_p$.

Ainsi, si $B_{\lambda_0} = \lambda_0 I - A$,

$$B_{\lambda_0}^\nu E_{\lambda_0} = 0, \quad B_{\lambda_0}^{\nu-1} E_{\lambda_0} \neq 0.$$

Réciproquement, soit $(\lambda_0 I - A)^n f = 0$, de

$$R_\lambda = -[\lambda_0 - \lambda - (\lambda_0 I - A)]^{-1} = -\sum_0^\infty \frac{B_{\lambda_0}^n}{(\lambda_0 - \lambda)^{n+1}}$$

résulte

$$R_\lambda f = -\sum_0^{n-1} \frac{B_{\lambda_0}^i f}{(\lambda_0 - \lambda)^{i+1}}, \quad \text{donc } f = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} R_\lambda f d\lambda \in E_{\lambda_0}$$

et l'on a

$$(\lambda_0 I - A)^n f = 0 \quad \text{pour tout } n \geq \nu.$$

Soit alors $\mathcal{R}_{\lambda_0}^{(\nu)}$ la variété que $B_{\lambda_0}^\nu$ annule (c'est-à-dire E_{λ_0}) et $\mathcal{R}_{\lambda_0}^{(\nu)} = B_{\lambda_0}^\nu \mathcal{B}$ (« range » ou domaine des valeurs de $B_{\lambda_0}^\nu$) et $\sigma = \lambda_0 + \sigma'$; nous avons

$$\mathcal{B} = E_{\lambda_0} + E_{\sigma'}.$$

Or B_{λ_0} réalise une transformation bicontinue de $E_{\sigma'}$ sur E_{σ} , tout entier, car dans $E_{\sigma'}$,

$$B_{\lambda_0}^{-1} = f(A)$$

avec $f = \frac{1}{\lambda_0 - \lambda}$ sur σ' et en son voisinage, $f = 0$ en λ_0 et autour de λ_0 , donc

$$\mathcal{R}_{\lambda_0}^{(\nu)} \supset B_{\lambda_0}^{\nu} E_{\sigma'} = E_{\sigma'},$$

mais $\mathcal{R}_{\lambda_0}^{(\nu)}$ n'a aucun point commun avec E_{λ_0} , car si $g = B_{\lambda_0}^{\nu} f \in E_{\lambda_0}$, $B_{\lambda_0}^{2\nu} f = 0$, donc $B_{\lambda_0}^{\nu} f = g = 0$, finalement

$$(2) \quad \mathcal{R}_{\lambda_0}^{(\nu)} + \mathcal{U}_{\lambda_0}^{(\nu)} = \mathcal{B},$$

en particulier, $\mathcal{R}_{\lambda_0}^{(\nu)}$ est une variété linéaire *fermée* (pour $\mathcal{U}_{\lambda_0}^{(\nu)}$, c'est évident). La relation (2) est caractéristique d'un pôle d'ordre ν et généralise une décomposition analogue dans le cas où \mathcal{B} est l'espace projectif ordinaire à un nombre fini de dimensions. Cependant, la décomposition canonique de Jordan de A dans E_{λ_0} ne vaut plus, en général, quand E_{λ_0} a un nombre infini de dimensions (*cf.* Note présentée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, par M. Julia, le 21 février 1949).

Cas où A n'est pas borné. — Appelons a un tel opérateur, fermé mais non borné, comme celui dont nous aurons besoin par la suite, et soit σ_2 un « spectral set » borné de $\sigma(a)$; on définit comme plus haut J_2, a_2, R_2 , ces opérateurs, bornés, permutant entre eux, et nous aurons (Hille, § 5.14)

$$(\lambda J_2 - a_2) R_2(\lambda, a) = R_2(\lambda, a) (\lambda J_2 - a_2) = J_2.$$

Ajoutons ceci : soit

$$I = J_1 + J_2, \quad a = a_1 + a_2, \quad R = R_1 + R_2,$$

$a_2 = J_2 a = a J_2$, donc J_1 permute avec a , puis a_1

$$a_1 = a J_1 = J_1 a$$

[cette dernière égalité dans $\mathcal{D}(a)$ seulement]

$$R_2 = J_2 R = R J_2 \quad \text{entraîne} \quad J_2 R_1 = R_1 J_2 = 0,$$

d'où

$$R_1 J_1 = J_1 R_1 = R_1 \quad \text{et} \quad R_1 = R J_1 = R(a_1) J_1$$

résulte de la relation 3° du début de ce chapitre.

Cas particulier de l'espace de Hilbert. — Il est utile de rappeler ce cas, devenu classique par son importance en Physique théorique :

Par définition de l'espace \mathcal{H}

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + 2\mathcal{R}(f, g) + \|g\|^2,$$

le deuxième terme étant une forme bilinéaire qui définit le produit scalaire (f, g) ;

A est hermitien s'il égale son adjoint A^* défini par $(Af, g) = (f, A^*g)$. Le spectre σ est alors situé sur l'axe réel Ox et, de plus, tout segment de cet axe définit un projecteur, et non plus seulement une portion disjointe du spectre

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dJ(\lambda), \quad A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dJ(\lambda);$$

$E(\lambda) = J(\lambda) \mathcal{H}$ peut-être défini comme l'ensemble des f tels que $\|A^k f\| \leq |\lambda^k| \cdot \|f\|$ pour tout $k \geq 1$. C'est le remarquable théorème de décomposition spectrale des opérateurs hermitiens d'un espace de Hilbert (*cf.* Lengyel et Stone, *Ann. of Math.*, 1936).

Demi-groupes d'opérateurs. — Il s'agit d'opérateurs dépendant d'un paramètre $t \geq 0$, variant de 0 à ∞ et satisfaisant à

$$A(s) A(t) = A(s + t).$$

Nous citerons (Hille, chap. VIII, IX et XI) trois groupes de théorèmes :

1. Mesurabilité entraîne continuité. — La mesurabilité de $A(t)$ pour tout $t \geq 0$ entraîne la continuité pour $t > 0$.

Les deux termes s'entendent au sens uniforme ou au sens fort :

a. $A(t)$ est uniformément mesurable s'il existe une suite $A_n(t)$ qui converge uniformément (relativement à t , et sauf sur un ensemble de mesure nulle) vers $A(t)$, au sens de la topologie uniforme dans \mathcal{C} ;

les $A_n(t)$ ne prenant chacun qu'un nombre dénombrable de valeurs distinctes, chacune sur un ensemble mesurable de valeurs de t ;

b. $A(t)$ est fortement mesurable si, pour tout f , il existe une suite $\varphi_n(t)$ qui converge presque uniformément (c'est-à-dire uniformément, sauf sur un ensemble de mesure aussi petite que l'on veut) vers $A(t)f$, les $\varphi_n(t)$ étant à valeurs dénombrables, dans le même sens qu'en *a*.

Dans *b* on suppose $\|A(t)\|$ borné dans $0 < \varepsilon \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon}$. Si \mathcal{B} est séparable, on peut remplacer ces deux hypothèses par : $A(t)$ est faiblement mesurable {c'est-à-dire $f^*[A(t)f]$ est mesurable en t (Lebesgue) pour tout $f^* \in \mathcal{B}^*$ (espace adjoint à \mathcal{B}) et tout $f \in \mathcal{B}$ }.

Remarquons que dans le cas où \mathcal{B} est à un nombre fini de dimensions, ce problème avait été résolu par Doblin (*Bull. des Sc. math.*, 1938).

2. Générateur. — Sous l'une des deux hypothèses ci-dessus, nous supposons, en outre la continuité en 0 :

$$A(t) \rightarrow J \text{ au sens uniforme ou fort;}$$

alors $J = J^2$ est un projecteur et :

$$\text{Cas uniforme } \frac{A(t) - J}{t} \rightarrow a, \text{ uniformément}$$

$$a = Ja = aJ, \quad A(t) = J e^{at}.$$

Nous sommes dans le cas borné et e^{at} est la fonction exponentielle de a au sens où nous l'avons envisagé dans la théorie spectrale; en particulier si $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$,

$$a = a_1 + a_2, \quad I = J_1 + J_2, \quad e^{at} = J_1 e^{a_1 t} + J_2 e^{a_2 t}.$$

Cas de convergence forte :

$$a = \lim_{\eta \rightarrow 0} A_\eta = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{A(\eta) - I}{\eta}$$

n'est pas un opérateur borné dans J , mais fermé, non borné, défini dans $\mathcal{D}(a)$ dense sur J et

$$A(t)f = \lim_{\eta > 0} e^{tA_\eta} Jx.$$

La correspondance entre $\sigma(a)$ et $\sigma[A(t)]$ n'est plus aussi parfaite; retenons qu'elle est rigoureuse entre $\sigma_p(a)$ et $\sigma_p[A(t)]$, au point o près de Σ_p [qui correspond à $-\infty$ pour $\sigma(a)$] et les vecteurs propres. Dans le cas d'un pôle d'ordre 1, les espaces propres sont donc les mêmes, puisqu'ils se composent des vecteurs propres. Ceci nous suffira pour assurer la décomposition de $A(t)$ en deux demi-groupes orthogonaux dont l'un correspond à des pôles de module 1 de $A(t)$.

5. Transformée de Laplace et résolvante. —

$$S(\lambda, a) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} A(t) dt$$

est défini pour

$$\Re(\lambda) > \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|A(t)\| = \alpha,$$

comme transformation linéaire bornée.

C'est, dans $J\mathcal{B}$, la résolvante $R(\lambda, a)$. En effet, soit d'abord : a borné :

$$A(t) = e^{at} J, \quad S = \sum \int_0^\infty J e^{-\lambda t} \frac{a^n}{n!} t^n = \sum \frac{a^n J}{\lambda^{n+1}} = R(\lambda, a) J;$$

c'est vrai pour $|\lambda| \geq \|a\|$ et cette égalité entre fonctions analytiques se prolonge dans tout $\rho(a)$ [par exemple si $\|A(t)\| = 1$, pour tout $\lambda > 0$]; a non borné : S est uniformément borné pour $\Re(\lambda) \geq \alpha + \varepsilon$ et

$$A_\eta S(\lambda, a) f = \frac{1}{\eta} \int_\eta^\infty e^{-\lambda t} (e^{\lambda \eta} - 1) A(t) f dt - \frac{1}{\eta} \int_0^\eta e^{-\lambda t} A(t) f dt \rightarrow -Jf + \lambda S_\lambda f,$$

donc

$$S_\lambda f \in \mathcal{D}(a) \quad \text{et} \quad (\lambda J - a) S_\lambda = J,$$

de même comme

$$f \in \mathcal{D}(a) \quad \text{entraîne} \quad \frac{d}{dt} A(t) f = a A(t) f = A(t) a f,$$

$$S_\lambda a f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} A(t) f dt = \lambda S_\lambda f, \quad S_\lambda (\lambda I - a) = I \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}(a) \subset J.$$

C. Q. F. D.

Remarque. — On a d'ailleurs

$$\int_0^\infty e^{\lambda-t} A(t) dt [e^\lambda I - A(1)] = [e^\lambda I - A(1)] \int_0^\infty e^{-\lambda t} A(t) dt = e^\lambda \int_0^1 e^{-\lambda t} A(t) dt$$

et dans le cas borné, la théorie spectrale redonne le résultat ci-dessus.

CHAPITRE II.

GÉNÉRATEUR D'UNE CHAÎNE SIMPLE CONSTANTE DE MARKOFF.

Comme il a été vu dans l'introduction, nous aurons dans ce cas :

a. $\|A(t)\| = 1$ pour tout t :

$A1 = 1$, c'est-à-dire que $f(x) = \text{const.}$ est par $A(t)$ transformée en elle-même;

$A'(t)p = p$, c'est-à-dire que l'opérateur adjoint $A^*(t)$ admet aussi le point $\lambda = 1$ dans son spectre ponctuel, la fonction $p(E)$ de \mathcal{B}' étant une fonction propre correspondant à cette valeur;

b. $f(x) \geq 0$ entraîne Af partout ≥ 0 . C'est la condition principale, et la plus difficile à manier, propre au caractère probabiliste de notre problème.

FORMATION D'UN PROCESSUS DE MARKOFF À PARTIR DE $A(1)$. — Dans le cas fini, il est facile de former les chaînes les plus générales égales à $A(1)$ pour $t=1$. Il reste ensuite à les déterminer pour qu'elles soient de type > 0 (cf. chap. IV).

Dans le cas général, une même méthode, mais de portée plus restreinte est applicable. On a $A(n) = A^n$, peut-on définir $A^{\frac{1}{n}}$?

D'après la théorie spectrale, nous pourrions prendre $\int_C \lambda^{\frac{1}{n}} R_\lambda(A) d\lambda$,

C entourant Σ , dans $\rho(A)$, $\lambda^{\frac{1}{n}}$ étant une détermination uniforme et analytique sur un ensemble contenant Σ , soit :

a. Σ n'entoure pas 0 ;

b. 0 n'appartient pas à Σ , restriction peu importante, car, sous les hypothèses que nous ferons plus loin, 0 est un pôle si $0 \notin \rho(A)$. $A = JA = A$ et il existe C , ayant un inverse tel que $A = JC$. On opérera sur C au lieu d'opérer sur A .

On peut même prendre des déterminations variant suivant le spectral set de Σ envisagé; si les arguments extrêmes pris pour λ diffèrent au plus de $2N\pi$, on pourra représenter $\Sigma(A)$ sur une surface

de Riemann à $N + 1$ feuillets, la fermeture se faisant suivant un rayon issu de 0. Sur chaque feuillet, on contournera les spectrales sets (en nombre fini) choisis, et ceux-là seulement, chacun d'eux étant contourné une fois et une seule; alors la théorie de N. Dunford s'étend sans difficultés et $\left[\int_c \lambda^{\frac{1}{n}} R_\lambda d\lambda \right]^n = A$. Mais on n'obtient pas ainsi toutes les solutions possibles; en particulier, si $\lambda = \lambda_0$ admet plusieurs vecteurs propres [pour $A(\mathbf{1})$], ceux-ci peuvent correspondre à des $\lambda_0^{\frac{1}{n}}$ différents pour $A^{\frac{1}{n}}$ et la méthode ci-dessus ne permet pas de décomposer ainsi l'espace propre $E_{\lambda_0}(A)$ (cf. en particulier le cas fini au chapitre IV).

Ce choix des déterminations une fois fait, faisons tendre $\frac{1}{n}$ vers zéro, $A^{\frac{1}{n}}$ tend uniformément vers I (le spectre se ramassant sur $\lambda = 1$). $A(t)$ se définit comme limite uniforme de $A\left(\frac{p}{q}\right)$; ceci revient d'ailleurs à prendre une détermination de $\log \lambda$ et définir $A(t)$ par e^{at} , $a = \int_c \log \lambda R_\lambda(A) d\lambda$ (cf. chap. I).

Il se pose alors le problème suivant, totalement irrésolu :

Sous quelles conditions $A(\mathbf{1}) \geq 0$ peut, par le procédé ci-dessus, donner naissance à $A(t) \geq 0$, c'est-à-dire à un processus probabiliste de Markoff.

PROPRIÉTÉS DU GÉNÉRATEUR POUR $A(t)$ DE TYPE ≥ 0 . — Comme vu au chapitre I, nous supposons $A(t)$ mesurable au sens fort pour $t \geq 0$, ce qui entraîne la continuité de $A(t)f$ pour tout f et tout $t > 0$ et, en outre, que lorsque t tend vers zéro, $A(t)$ tend vers une limite J , au sens uniforme ou fort auxquels correspondent les deux cas qui nous occuperont par la suite; le cas uniforme et le cas de convergence forte.

Notons tout d'abord que $A \mathbf{1} = \mathbf{1}$, $A'p = p$ sont équivalents à $a \mathbf{1} = 0$, $ap = 0$.

$\eta A_\eta = A(\eta) - I$ correspond à

$$\begin{aligned} P(x, E, t) &\geq 0 && \text{si } x \notin E, \\ P(x, E, t) - 1 &\leq 0 && \text{si } x \in E, \end{aligned}$$

à la limite

$$af = \int \pi(x, dy) f(y) dy \begin{cases} \geq 0 & \text{si } x \notin E, \\ \leq 0 & \text{si } x \in E, \end{cases}$$

soit a de type diagonal, mais a n'est défini que dans $\mathcal{D}(a)$ et $\pi(x, E)$ que pour certains ensembles formant une famille $\mathcal{F}(a)$ appartenant à $B[\mathcal{D}(a) \subset J]$.

Dans le cas uniforme et ou $J = I$, $\pi(x, E)$ est défini pour tout $E \in B$. Dans ce cas, démontrons quelques propriétés réciproques : est-il suffisant que a soit du type diagonal ?

Cas fini (d'un nombre fini d'états possibles) :

$$e^{at} = \sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} a^n \quad \text{ou} \quad p_{ij} = \sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} a_{ij}^{(n)};$$

tous les termes $a_{ij} \neq 0$ ont un module minimum ε et si r est la norme de a , les $\sum_2^\infty \frac{t^n}{n!} a_{ij}^{(n)}$ sont bornés par $e^{rt} - 1 - rt$, donc (uniformément c'est-à-dire quels que soient i, j) plus petits que εt pour t assez petit, donc :

$a_{ij} \neq 0$: si $i \neq j$, p_{ij} a le signe de a_{ij} , soit $+$; si $i = j$, $p_{ij} = 1 - ta_{ij} + \dots$ est aussi > 0 pour t assez petit.

$a_{ii} = 0$ entraîne $a_{ij} = 0$ et $p_{ii} = 0$.

$a_{ij} = 0$: $j \neq i$, $a_{ij}^{(2)} = a_{ik} a_{kj}$ est ≥ 0 ; si > 0 , le premier raisonnement est valable ; si $a_{ij}^{(2)} = 0$, $a_{ij}^{(3)} = a_{ik}^{(2)} a_{kj}$, les termes $\neq 0$ sont $k \neq i, j$ et $a_{kj} \neq 0$, soit $a_{ik} = 0$, d'après $a_{ij}^{(2)} = 0$ et $a_{ik}^{(2)}$ n'a que des termes > 0 , donc $a_{ij}^{(3)} \geq 0$, et ainsi de suite ; le premier terme différent de zéro est > 0 et le raisonnement ci-dessus valable.

$A(t) \geq 0$, dans $(0, \varepsilon)$ entraîne $A(t) \geq 0$ dans $(0, \infty)$.

Mais ceci ne vaut plus dans le général, car $\sum_2^\infty \pi^{(n)}(x, \mathcal{E})$ borné par $t^2 K$ n'est pas $< t |\pi(x, \mathcal{E})|$ uniformément par rapport à \mathcal{E} , pour t assez petit.

Démonstration pour le cas dénombrable. — Le raisonnement ci-dessus

vaut pour démontrer que $p_{ii} \geq 0$ (car c'est 1 moins un terme de l'ordre de rt).

Soit maintenant $i_0 \neq i_f$

$$p_{i_0, i_f} = \sum_1^{\infty} \frac{t^n}{n!} \pi_{i_0, i_f}^{(n)}, \quad \pi_{i_0, i_f}^{(n)} = \sum \pi_{i_0, i_1} \pi_{i_1, i_2} \dots \pi_{i_{n-1}, i_f}$$

enlevons d'un terme < 0 de cette dernière somme un facteur < 0 , on obtient un terme > 0 de $\pi^{(n-1)}$ (car un terme $\pi < 0$ a ses deux indices égaux) et on les obtient tous, ce qui importe peu, une ou plusieurs fois, au plus n fois, car réciproquement, d'un terme ≥ 0 de $\pi^{(n-1)}$. On peut déduire n termes ≤ 0 de $\pi^{(n)}$ en le multipliant par π_{i_0, i_0} ou $\pi_{i_0, i_1}, \dots, \pi_{i_{n-2}, i_{n-1}}, \pi_{i_f, i_f}$ et l'on obtiendra ainsi certainement tous les termes ≤ 0 de $\pi^{(n)}$; si donc, nous posons $\pi^{(n)} = \alpha_n - \beta_n$, $\pi_1 = \alpha$, on a $\beta_n \leq nr\alpha_{n-1}$.

Or $\sum_j |\pi_{ij}| \leq r$ entraîne $\alpha_n \leq r^n$ et la série

$$\sum_1^{\infty} \frac{t^n}{n!} \pi^{(n)} = t\alpha_1 + \frac{t^2}{2!} \alpha_2 - \frac{t^2}{2!} \beta_2 + \dots + \frac{t^n}{n!} \alpha_n - \frac{t^n}{n!} \beta_n + \dots$$

étant absolument convergente, sa somme est celle de la série

$$\sum_1^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\alpha_n - \frac{\beta_{n+1}}{n+1} t \right)$$

bornée inférieurement par $\sum_1^{\infty} \frac{t^n}{n!} \alpha_n (1 - rt) \geq 0$ si $t < \frac{1}{r}$ (uniformément par rapport à i, j).

Ainsi

$$p_{ij} \geq 0$$

pour $t < \frac{1}{r}$ si $i \neq j$ et

$$t < \frac{\log r}{r}$$

pour $i = j$ [$p_{ii} \geq 1 - (e^{rt} - 1) = 2r - e^{rt}$], l'est quel que soit $t \geq 0$.

Pour généraliser cette démonstration, il faudrait définir pour $\pi^n(x, \mathcal{E})$ une partie ≥ 0 et une partie ≤ 0 .

Soit $x \notin \mathcal{E}$. Si nous cherchons à définir $\alpha^{(n)}(x, \mathcal{E})$ et $\beta^{(n)}(x, \mathcal{E})$ par

$$\alpha^{(n)} = \int_{\mathcal{C}(\mathcal{E})} \alpha^{(n-1)}(x, dy) \pi(y, \mathcal{E}) - \int_{\mathcal{E}} \beta^{(n-1)}(x, dy) \pi(y, \mathcal{E}),$$

$$\beta^{(n)} = - \int_{\mathcal{E}} \alpha^{(n-1)} \pi + \int_{\mathcal{C}(\mathcal{E})} \beta^{(n-1)} \pi,$$

$\mathcal{C}(\mathcal{E})$ étant le complémentaire de \mathcal{E} dans Ω , nous voyons que, en admettant $\alpha^{(n-1)}$, $\beta^{(n-1)}$ définis, ainsi que ces intégrales, $\alpha^{(n)}$ et $\beta^{(n)}$ seraient des fonctions subadditives de \mathcal{E} et non plus additives. La définition de ces intégrales est alors difficile, sauf peut-être dans certains cas particuliers; il faut toutefois remarquer que même s'il existe pour $\Lambda(t)$ une densité de probabilité, cela n'entraîne nullement que π se présente avec les mêmes propriétés de continuité.

On a

$$\alpha^{(n)}(\mathcal{E} + \mathcal{E}') = \alpha^{(n)}(\mathcal{E}) + \alpha^{(n)}(\mathcal{E}') - \int_{\mathcal{E}'} (\alpha^{(n-1)} + \beta^{(n-1)}) \pi(y, \mathcal{E} - \mathcal{E}') + \int_{\mathcal{E}} \alpha^{(n-1)} + (\beta^{(n-1)}) \pi(y, \mathcal{E}')$$

pour $x \notin \mathcal{E}$, \mathcal{E}' , et même terme soustraclif pour $\beta^{(n)}(\mathcal{E} + \mathcal{E}')$, puisque $\alpha^{(n)} - \beta^{(n)}$ est fonction additive de \mathcal{E} .

AUTRES PROPRIÉTÉS DE $\Lambda(t)$. — *Points du spectre de module* $= \|\Lambda\|$. — Soit une transformation linéaire bornée quelconque, A et $\|A\| = M$. Soit $C = \frac{A}{M} \cdot C^n$ est bornée par 1, quel que soit n . Soit $|\lambda| = 1$ et $\lambda \in \Sigma_p$ (spectre ponctuel); si λ est pôle d'ordre ν , nécessairement $\nu = 1$, car soit E_ν l'espace propre correspondant, $B = \lambda I - A$. On a $B^\nu E_\nu = 0$, $B^{\nu-1} E_\nu \neq 0$; il existe alors des f tel que $B f = f_1 \neq 0$ ou $A f = \lambda f + f_1$, f et f_1 étant linéairement indépendants, alors $|A^n f|$ augmente indéfiniment avec n , ce qui est incompatible avec $\|C\| = 1$. La décomposition de E_ν , quand il est de dimension finie (ce qui est équivalent à E_1 de dimension finie), n'est autre que la réduction à une forme canonique de Jordan (¹), et les matrices réduites de Jordan, itérées

(¹) Cf. G. JULIA, *Introduction mathématique aux théories quantiques*, Gauthier-Villars, 1936 (1, p. 86) et A. TORTRAT, *C. R. Acad. Sc.*, t. 228, 1949, p. 638.

une infinité de fois, ne restent bornées que si elles se réduisent à I. Dans le cas contraire (rang infini), une décomposition telle que celle de Jordan ne vaut plus, mais on peut toujours séparer une infinité de chaînes finies (de longueur ν au plus), f_1, \dots, f_p , avec $Bf_p = f_{p-1}$, qui rendent impossible si $\nu > 1$ que C^n soit borné.

Ainsi un pôle ne peut être que d'ordre 1, s'il est sur le cercle de convergence. Ceci a été démontré dans bien des cas (*cf.* réf. citées, Yosida, Fortet, et aussi Fréchet, *Bull. des Sc. Math.*, 1934). Mais pour λ singulier, isolé sur $|\lambda| = M = \|A\|$, on peut seulement affirmer que si E_i est défini comme E_ν ci-dessus,

$$E_1 = E_2 = \dots = E_\nu \quad \text{aussi grand que soit } \nu.$$

$E_i \neq 0$ si $\lambda \in \Sigma_p$; on sait aussi que $B^n f$, f appartenant à l'espace propre E_λ tend vers zéro avec n plus vite que n'importe lequel ε^n , si petit que soit ε .

Dans le cas le plus général, on sait cependant qu'un point λ_0 du spectre appartenant à sa frontière c'est-à-dire limite de points de $\rho(A)$, est tel que $B_{\lambda_0} = \lambda_0 I - A$ est diviseur généralisé de zéro, c'est-à-dire qu'il existe des A_n de norme 1, $\in \mathcal{A}$ (ayant un inverse) tels que $B_{\lambda_0} A_n \rightarrow 0$. On voit facilement que cette propriété est vérifiée pour le point isolé ci-dessus (*cf.* Hille, § 13, 1).

Dans le cas de M. Fréchet de la référence ci-dessus, où l'on suppose Ω borné (dans un espace à k dimensions) et l'existence d'une densité de probabilité dont l'une au moins des itérées est bornée, λ ne peut être, s'il appartient à Σ_p , que pôle, comme le démontre l'auteur (et c'est alors une racine de l'unité).

Mais d'autres restrictions s'ajoutent lorsque $A(1)$ appartient à une chaîne de Markoff continue $A(t)$.

Racines imaginaires pures de a . — Dans tous les cas (à ma connaissance) où il est question des λ de module 1, les auteurs sont amenés à démontrer que ces nombres sont racines de l'unité. Or, si les hypothèses faites valent pour deux valeurs de t incommensurables, t et kt (k irrationnel), et si $e^{i\theta}$ est racine (du spectre ponctuel) pour $A(t)$, $e^{ik\theta}$ l'est pour $A(kt)$; θ et $k\theta$ ne pouvant être à la fois des multiples rationnels de π , de telles racines ne peuvent exister. Mais la plupart du temps

il est bien difficile de savoir si $A(t)$ satisfait aux hypothèses faites quel que soit t , puisqu'en général $A(t)$ n'est pas mathématiquement défini à partir de $A(1)$, par exemple, et qu'on s'est surtout occupé de $A(n)$; en les faisant, on peut affirmer, par exemple dans les conditions de M. Fréchet ou de Doblin (réf. citée) que les valeurs propres de module 1 n'existent pas.

Voici une démonstration qui s'applique à des conditions à la fois moins et plus restrictives :

Dans les conditions générales de ce chapitre, nous supposons :

$A(t)$ converge uniformément vers J . Alors il n'existe pas de fonction propre f , avec $|\lambda| = 1$, atteignant sa borne supérieure en un point de Ω ($\lambda \neq 1$, bien entendu).

Il revient au même d'écrire que $a = \lim_{\eta} \frac{A(\eta) - I}{\eta}$ admet la même fonction propre avec λ imaginaire pure. Soit M le maximum de $|f(x)|$. Décomposons l'aire du cercle $|z| < M$ du plan complexe en parcelles dont le nombre augmente indéfiniment tandis que leur aire tend vers zéro (ainsi que leurs dimensions), lorsque $n \nearrow \infty$: $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ sont les ensembles de Ω où f prend respectivement des valeurs comprises dans chacune de ces parcelles, la valeur maximum $M = z^0$ (qui peut toujours être supposée réelle > 0) étant atteinte dans \mathcal{E}_0 en x_0 . \mathcal{E}_i est mesurable (d'après nos hypothèses générales) et désignant par $p_\eta(x_0, \mathcal{E}_i) : P(x, \mathcal{E}_i, \eta)$ pour $i \neq 0$ et $P(x, \mathcal{E}_i, \eta) - 1$ pour $i = 0$, on a

$$\lambda M = \lim_{n \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|p_\eta(x_0, \mathcal{E}_0)|}{\eta} [-M + G(n, \eta)],$$

$G(n, \eta)$ désignant le centre de gravité des points z_1, \dots, z_n , pris à l'intérieur des n parcelles (sauf celle contenant $M = z_0$), affectés des poids $p_\eta(x_0, \mathcal{E}_i)$ ($i = 1, \dots, n$), car

$$\sum_{i=1}^n p_\eta(x_0, \mathcal{E}_i) = -p_\eta(x_0, \mathcal{E}_0) = |p_\eta(x_0, \mathcal{E}_0)|.$$

Or λ devrait être imaginaire pure $\neq 0$, donc aussi la limite de

$$[G(n, \eta) - M] = \overrightarrow{MG}.$$

Or G est intérieur au cercle, ou au plus sur la circonférence et $|\overrightarrow{MG}| \rightarrow 0$ si l'argument tend vers $\frac{\pi}{2}$, alors $\frac{|p_\eta|}{\eta}$ augmente indéfiniment. Ceci est possible dans le cas de convergence forte de $A(t)$ vers J , mais non dans le cas uniforme où la limite $\pi(x_0, \mathcal{E}_0)$ est borné d'après le théorème de Hille sur l'existence d'un générateur borné.

Cette démonstration suppose nécessairement que la borne supérieure

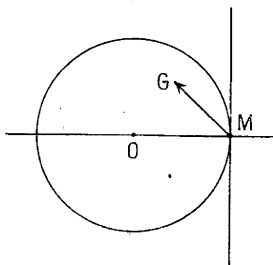


Fig. 1.

soit atteinte. C'est le cas si Ω est borné et avec certaines hypothèses de continuité. Dans le cas fini, cette même démonstration prend une forme bien simple et le résultat est d'ailleurs implicitement exprimé (p. 250-251 du livre de M. Fréchet), où il est observé que l'expression des $p_{ij}(n)$ n'est pas sinusoïdale, sans dire explicitement que cela entraîne que la racine correspondante de l'équation en s , de module 1, ne peut exister.

L'étude de la fonction de corrélation et la propriété que celle-ci soit une fonction caractéristique nous donnerons plus loin d'autres propriétés des λ de module 1, dans le cas où ils existent.

Nous donnerons aussi plus loin un exemple, dans le cas fini, montrant qu'il n'est pas suffisant que $A(1)$ n'ait pas de racines de module 1 différentes de 1 pour que $A(t)$, défini comme indiqué au début soit ≥ 0 [comme $A(1)$].

CHAPITRE III.

FONCTIONS DE CORRÉLATION, CAS GÉNÉRAL.

Avec les notations du chapitre précédent, la probabilité pour qu'au temps t_0 , se produise l'événement x , et qu'au temps $t_0 + t$, l'événement appartienne à l'ensemble E de Ω , est

$$p(x) P(x, E, t),$$

la fonction de corrélation $\rho(t)$ est la moyenne de $X(t_0)X^*(t_0 + t)$, soit

$$\int f(x) p(dx) P(x, dy, t) f^*(y) = (Af, g) \quad [A = A(t)],$$

$f(x)$ est la fonction des valeurs prises par X sur Ω . Il y a intérêt à bien la distinguer de l'opérateur A dans la donnée du processus, car la structure de la chaîne ne dépend vraiment que de ce dernier, et l'on passe facilement d'une fonction $f(x)$ à une autre, sans changer, si f est arbitraire, les propriétés de la fonction de corrélation.

(Af, g) est le produit scalaire de Af et de g avec $Af \in \mathcal{B}$ comme f , $g \in \mathcal{B}'$. Ici

$$g(dx) = f(x) p(dx),$$

p peut être considéré comme un opérateur multiplicatif (différent de ceux précédemment considérés), opérant aussi bien dans \mathcal{B}' que \mathcal{B} , mais transformant \mathcal{B} en une partie de \mathcal{B}' . On voit comment $\rho(t)$ est liée à A , mais ceci apparaîtra beaucoup mieux si nous cherchons la fonction de répartition $F(x)$ dont elle est la fonction caractéristique

$$\rho(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x).$$

$\rho(t)$ est ici une fonction continue pour tout $t > 0$ [$A(t)$ converge au moins fortement, par hypothèse] $\rightarrow 0$ si $A(t) \rightarrow J \neq I$ quand $s_i \neq 0$, $\rho(t)$ ne tend vers 1 que si f satisfait à $(If, g) = (f, g) = 1$; [nous supposons f normée, c'est-à-dire $\overline{|f|^2} = \int p(dx) |f(x)|^2 = 1$]. C'est dans ce cas seulement que $F(x)$ est une fonction de répartition au

sens propre c'est-à-dire que dans le cas contraire une partie des masses distribuées sur $-\infty, +\infty$ est rejetée à l'infini $\left[\int_{-\infty}^{+\infty} dF(x) < 1 \right]$.

PROPRIÉTÉS CONNUES DES FONCTIONS DE CORRÉLATION. — Noter que $\rho(-t) = \rho(t)^*$.

1. (Bochner.) Toute $\rho(t)$ continue à l'origine est fonction caractéristique c'est-à-dire transformée de Fourier d'une fonction de répartition.

2. (M. Kampé de Fériet, Colloque de juin-juillet 1948.) $\rho(t)$ est la transformée de Fourier de la mesure de Radon $\overline{|E_\lambda X|^2}$, soit

$$\rho(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} d\overline{|E_\lambda X|^2}, \quad \text{avec} \quad X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} dE_\lambda X,$$

ce qui donne à nouveau le théorème de Bochner.

Ce résultat est obtenu en utilisant la représentation de M. Paul Lévy en fonction d'une seule variable uniformément répartie. Mais cette méthode ne permet absolument pas, semble-t-il, de caractériser un processus de Markoff par rapport aux processus quelconques.

3. (Slutsky, Colloque de Genève, 1937, Hermann, *Actualités*, n° 738.) Si $X(t)$ est stationnaire d'ordre 2 et $\rho(t) \rightarrow 1$ si $t \rightarrow 0$, ainsi que $\overline{X^4(t)}$ borné, on peut décomposer $X(t)$, rapportée à sa valeur moyenne, en :

une fonction presque périodique correspondant à la partie discontinue du spectre de Fourier de $\rho(t)$;

une fonction à spectre continu *en moyenne*.

Nous verrons que dans le cas, pourtant beaucoup plus restreint, de Markoff et strictement stationnaire, la séparation d'une partie discontinue et d'une partie continue (mais plus au sens stochastique) n'est pas possible sans autres hypothèses.

RECHERCHE DU SPECTRE DE $\rho(t)$. — Plaçons-nous dans le cas fortement convergent et $J \neq I$.

Supposons que les points $\lambda \in \Sigma[A(t)]$ ou Σ_t spectre de $A(t)$, de module 1 soient des pôles, et que, de plus, les points de $\sigma(a)$ qui leur correspondent, sur l'axe imaginaire soient en nombre fini k (car si a n'est pas borné, ils pourraient être en nombre infini). Ils forment les deux « spectral sets » σ_2 et $e^{\sigma_2 t} = \Sigma_2(t)$ auxquels correspondent le même espace propre $E_2 = J_2 \mathcal{B}$ formé des vecteurs propres, car les pôles sont d'ordre 1.

On a

$$\Sigma_2 = e^{i\alpha_1 t}, \dots, e^{i\alpha_k t}, \quad \sigma_2 = i\alpha_1, \dots, i\alpha_k, \quad J_2 = \sum_1^k \mathcal{J}_i.$$

D'après le chapitre I, (demi-groupes, 2) :

$$\begin{aligned} A(t) &= A_1(t) + A_2(t), & I &= J_1 + J_2, \\ A_1(t) &= J_1 A(t) = A(t) J_1, & J_2 J &= J J_2 = J_2, \end{aligned}$$

$J_2 \perp J_1$ entraîne $J_2 \perp A_1(t)$, mais

$$A_2(t) = \sum_1^k \mathcal{J}_i e^{i\alpha_i t}, \quad \text{donc } A_2(t) \perp A_1(t)$$

et de

$$A(s) A(t) = A(s+t) \quad \text{et} \quad A_2(s) A_2(t) = A_2(s+t)$$

résulte

$$A_1(s) A_1(t) = A_1(s+t).$$

Ainsi $A_1(t)$ constitue un demi-groupe de générateur a_1 et

$$\lim_{t \rightarrow 0} A_1(t) = J' = J J_1 = J_1 J.$$

SPECTRE DE $A_1(t)$. — Soit $A_1 = A_1(1)$. $\Sigma_1(1)$, spectre de A_1 est entièrement intérieur au cercle de rayon 1, donc situé dans $|\lambda| \leq 1 - 2\varepsilon$

$$R_\lambda(A_1) = \frac{I}{\lambda} + \frac{A_1}{\lambda^2} + \dots + \frac{A_1^n}{\lambda^n} + \dots$$

qui représente la résolvante de A_1 au voisinage de $\lambda = \infty$, est convergente (toujours au sens de la convergence uniforme des opérateurs, pour $|\lambda| \geq 1 - \varepsilon$, mais alors (cf. R. Fortet, réf. citée,

section II, chap. I) la norme du terme général est bornée, et il existe M' et M tels que

$$\|A_1^n\| \leq M'(1-\varepsilon)^n \quad \text{ou} \quad \|A_1(t)\| \leq M\rho^t \quad (\rho < 1).$$

Donc

$$(1) \quad S(a_1, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda t} A_1(t) dt$$

est bien défini pour $\mathcal{R}(\lambda) \geq 0$, et S est la résolvante de a_1 , dans $J'\mathcal{B} = J_1 J\mathcal{B}$; puisque (cf. chap. I)

$$R(a_1)J_1 = R(a)J_1, \quad S(a_1, \lambda) = R(\lambda, a)J_1J.$$

Posons

$$\rho_1(t) = (A_1 f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_1(x).$$

On a, d'après la formule d'inversion de M. Paul Lévy,

$$F_1(x) - F_1(0) = \frac{1}{\pi} \lim_{c \rightarrow \infty} R(T_c f, g), \quad T_c = \int_0^c \frac{1 - e^{-itx}}{it} A_1(t) dt,$$

tenant compte de ce que $\rho(-t) = \rho^*(t)$.

Comme l'intégrale de la dérivée sous le signe \int dans T_c ,

$$\int_0^c e^{-itx} A_1(t) dt$$

converge uniformément par rapport à x dans $(-\infty, +\infty)$, cette dérivation est permise et $F_1(x)$ admet partout une dérivée

$$F_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \mathcal{R}[R(a, ix)J_1 J f, g] dx.$$

EXPRESSION DE $F_2(x)$:

$$\rho_2(t) = (A_2 f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_2(x).$$

Sous les hypothèses faites (a ne possède sur Oy , comme points singuliers qu'un nombre fini de pôles)

$$(2) \quad F_2(x) - F_2(0) = \frac{1}{\pi} \lim_{c \rightarrow \infty} \mathcal{R} \int_0^c \Sigma(\mathcal{Y} f, g) e^{i\alpha_i t} \frac{1 - e^{-itx}}{it} dt.$$

Remarques préliminaires. — Comme nous l'avons déjà noté dans l'introduction et au début de ce chapitre, p appartient (considéré comme opérateur multiplicatif) à la famille \mathfrak{C} des opérateurs linéaires qui transforment \mathcal{B} en une partie de \mathcal{B}' .

Alors qu'on peut définir l'adjoint A^* de A , comme opérant dans \mathcal{B}^* , on peut définir l'adjoint T^* de $T \in \mathfrak{C}$ comme un opérateur de même type (de \mathcal{B} sur $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}^*$) satisfaisant à

$$(Tf, g) = (f, T^*g) \quad (f, g \in \mathcal{B}),$$

tandis que pour A , on a

$$(g, Af) = (A^*g, f) \quad (f \in \mathcal{B}, g \in \mathcal{B}').$$

On a $(TA)^* = A^*T^*$, car

$$(TA g, f) = [g, (TA)^*f] = (A g, T^*f) = (g, A^*T^*f) \quad (f, g \in \mathcal{B}).$$

(Tf, f) réel entraîne T hermitien ($T = T^*$, définition qui a un sens dans \mathfrak{C}) car, remplaçant f par $f + g$, nous obtenons

$$(Tf, g) + (Tg, f) \text{ réel ou } \mathcal{I}(Tf, g) = \mathcal{I}(f, Tg)$$

et remplaçant f par if

$$-(Tf, g) + (Tg, f) \text{ imaginaire pur ou } \mathcal{R}(Tf, g) = \mathcal{R}(Tg, f) = \mathcal{R}(f, Tg),$$

donc

$$(Tf, g) = (f, Tg), \quad \text{G. Q. F. D.}$$

En particulier, si \mathcal{J} est projecteur dans \mathcal{B} , il lui correspond \mathcal{J}' dans \mathcal{B}' défini par $(\mathcal{J}'g, f) = (g, \mathcal{J}f)$; à une décomposition orthogonale de I dans \mathcal{B} correspond une décomposition orthogonale de I dans \mathcal{B}' . Si $I = J_1 + J_2$, $J_1 g = 0$, quel que soit g pour tout $f \in J_2 \mathcal{B}$.

Revenons maintenant à (2); pour $x = \alpha_i$, l'intégrale ne peut converger que si le produit $\frac{1}{i}(\mathcal{J}_i f, g)$ est imaginaire pur ou $(f, p\mathcal{J}_i f)$ réel ($g = pf$) et ceci doit être vrai, quel que soit $f \in \mathcal{B}$ [tout f déterminant avec $A(t)$ un processus de Markoff]; $p\mathcal{J}$ est donc hermitien et égale $\mathcal{J}'p$.

Or \mathcal{J}_i comme J_2 , est orthogonal à J_1 et A_1 , donc

$$A\mathcal{J}_i = \mathcal{J}_i A = e^{i\alpha_i t} \mathcal{J}_i = \lambda_i \mathcal{J}_i$$

entraîne $A' \mathcal{Y}' = \bar{\lambda} \mathcal{Y}'$ (A' est l'adjoint de A , mais réduit à l'opérateur induit par ce dernier dans $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}^*$, c'est pourquoi nous ne notons pas A^*). Par suite, $\mathcal{Y}' \mathcal{B}'$ est engendré par les vecteurs propres de A' pour $\lambda = e^{-i\alpha t}$.

Donc, p , par multiplication, transforme tout vecteur propre ($|\lambda| = 1$) de $A(t)$ en un vecteur propre de l'opérateur A' associé dans \mathcal{B}' pour la valeur $\bar{\lambda}$ conjuguée de λ , cette correspondance respectant la structure fine de A , c'est-à-dire valable quel que soit t et aussi bien pour les points de $\sigma(a)$ situés sur Oy . La correspondance n'est biunivoque que si $pf = 0$ n'a pas de solutions dans $\mathcal{Y}\mathcal{B}$. Ceci est vrai, en particulier, pour $\lambda = 1$, p étant vecteur propre de A' pour $\lambda = 1$ et ces conditions imposent des restrictions supplémentaires quant à $A(t)$ (s'il possède des pôles pour des $\lambda \neq 1$ et de module 1).

Calculons maintenant $F_2(x)$

$$F_2(x) - F_2(0) = \sum \frac{1}{\pi} (\mathcal{Y}_i f, g) \int_0^\infty \mathcal{R} e^{i\alpha_i t} \frac{1 - e^{-itx}}{it} dt;$$

puisque

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \mathcal{R} \int_0^\infty \frac{e^{itx}}{it} dt &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = \frac{1}{2} \quad \text{pour } x > 0, \\ &= -\frac{1}{2} \quad \text{pour } x < 0, \quad 0 \quad \text{pour } x = 0, \end{aligned}$$

nous obtenons comme coefficient de $(\mathcal{Y}_i f, g)$

$$\begin{aligned} 1 & \text{ si } 0 < \alpha < x, & -1 & \text{ si } x < \alpha < 0, \\ 0 & \text{ si } \alpha(\alpha - x) > 0, & \pm \frac{1}{2} & \text{ pour } \alpha = 0 \text{ (} x \gtrless 0 \text{)}. \end{aligned}$$

Mais si nous ajoutons

$$F_2(0) = F_2(0) - F_2(-\infty) = \sum u_i (\mathcal{Y}_i f, g),$$

avec

$$u_i = +1 \quad \text{si } \alpha < 0, \quad \frac{1}{2} \quad \text{si } \alpha = 0, \quad 0 \quad \text{si } \alpha > 0,$$

nous obtenons

$$F_2(x) = \sum \delta(x - \alpha_i) (\mathcal{Y}_i f, g),$$

où $\delta(u)$ est nul pour $u < 0$ et égal à 1 pour $u > 0$.

D'ailleurs,

$$\delta(x - \alpha) = \frac{1}{\pi} \mathcal{R} \int_{-\infty}^x \frac{dt}{it - \lambda} \quad (\lambda = i\alpha)$$

$$\left[\text{c'est aussi } \frac{\frac{\pi}{2} + \text{Arg}(ix - i\alpha_i)}{\pi} \right] \text{ et}$$

$$\sum \frac{\mathcal{I}_i f}{ix - i\alpha_i} = \mathcal{R}(a, ix) \mathcal{J}_r f,$$

d'où

THÉORÈME :

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \mathcal{R}[\mathcal{R}(a, ix) \mathcal{J}f, g] dx, \quad \rho(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x),$$

lorsque $x = \alpha_i$, on a un point de la partie discontinue du spectre et la signification de cette expression est celle qui vient d'être donnée : \mathcal{R} n'est pas définie, mais l'intégrale de sa partie réelle existe, c'est \mathcal{I}_i multiplié par un argument qui subit la discontinuité π au passage par α_i , $\lambda = i\alpha_i$ étant pôle de a . Rappelons les hypothèses faites : $A(t)$ converge uniformément ou fortement vers \mathcal{J} , quand t tend vers zéro, est mesurable au sens fort pour $t \geq 0$, et sur l'axe Oy le générateur a n'a qu'un nombre fini de points singuliers isolés, pôles de la résolvante; f est la fonction des valeurs sur Ω et $g(dx) = p(dx) f(x)$, $p(E)$ étant la mesure de probabilité sur Ω .

PROPRIÉTÉS DE $F(x)$. — Sous les hypothèses faites la fonction de répartition [au sens large puisque comme déjà vu, si $\mathcal{J} \neq \mathcal{I}$, $\rho(t)$ n'étant pas forcément continue en 0, $\int_{-\infty}^{+\infty} dF(x)$ peut être < 1], se compose d'une partie continue, qui est ici dérivable et analytique et d'une partie purement discontinue.

Pour cette dernière, ses propriétés sont simples; cependant la possibilité d'une forme arbitraire à cette partie reste problématique et liée, comme nous l'avons vu, à l'existence des racines du module 1.

Quant à $F_1(x)$, analytique sur $(-\infty, +\infty)$, elle définit une fonction $F(\lambda)$, analytique [se réduisant à $F_1(x)$ pour $\lambda = ix$], régu-

lière dans tout le demi-plan $\Re(\lambda) \geq -\varepsilon$. Les propriétés de F_1 sont liées de très près à celles de R_1 , c'est-à-dire, nous plaçant dans l'espace $J_1\mathcal{B}$, et notant R au lieu de R_1 (Hille 5, 8-9)

$$(3) \quad R_\lambda - R_\mu + (\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu = 0 \quad (\text{déjà citée}).$$

Dans le cas α borné, on a réciproquement :

Toute solution de (3) (dans l'algèbre \mathcal{A} des opérateurs linéaires bornés sur \mathcal{B}), quels que soient λ et μ dans un certain domaine D du plan complexe, et si elle est régulière (c'est-à-dire admet un inverse) pour au moins une valeur $\lambda_0 \in D$, est résolvante d'un élément A de \mathcal{A} .

On a

$$A = \lambda_0 I - [R(\lambda_0)]^{-1}$$

ou cette forme équivalente : R_λ a pour développement au voisinage de tout point où elle est bien définie

$$R_\lambda = \sum_0^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n A^{n+1} \quad (A \in \mathcal{A} \text{ et } A \text{ a un inverse}),$$

donc la densité du spectre $[F_1(x) = \varphi(x) dx]$ est

$$(4) \quad \varphi(x) = \frac{1}{\pi} \sum_0^{\infty} (ix_0 - ix)^n (A^{n+1} J f, g);$$

$\varphi(x)$ est, en outre, assujéti à être ≥ 0 et le problème réciproque peut se poser ainsi : $\varphi\left(\frac{z}{i}\right)$ étant analytique et régulière dans $\Re(z) \geq -\varepsilon$, existe-t-il un opérateur $A \in \mathcal{A}$ et une fonction $f \in \mathcal{B}$ (g est alors déterminé) tels que les coefficients du développement (4) égalent les $(A^{n+1} f, g)$? C'est, du moins, le premier problème à résoudre; il faut ensuite chercher à obtenir une chaîne ≥ 0 correspondant à notre problème de probabilités.

Exemple du mouvement brownien (M. Paul Lévy, Gauthier-Villars, 1948). — D'après les pages 15 et 16, on a

$$P_r\{X(t+h) - X(t)\} < x\sqrt{h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad \rho(h) = \sqrt{\frac{t}{t+h}}.$$

Posons $t = e^{2\theta}$,

$$X(t) = e^\theta Y(\theta), \quad \frac{X(t+h) - X(t)}{\sqrt{h}} = \frac{Y(\theta') - e^{-(\theta' - \theta)} Y(\theta)}{\sqrt{1 - e^{-2(\theta' - \theta)}}}$$

suit une loi réduite de Laplace.

Remplaçant $\theta' - \theta$ par t , on a pour $Y(t)$

$$\begin{aligned} P(x, y, t) &= \text{Pr} \{ Y(t_0 + t) \leq y / Y(t_0) = x \} \\ &= \int_{-\infty}^y e^{-\frac{(\xi - e^{-t}x)^2}{2(1 - e^{-2t})}} \frac{d\xi}{\sqrt{2\pi} \sqrt{1 - e^{-2t}}} \quad (\rho = e^{-t}), \end{aligned}$$

l'opérateur $A(t)$ est alors

$$A(t)f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} f(\xi \sqrt{1 - e^{-2t}} + e^{-t}x) d\xi.$$

Prenons pour espace \mathcal{B} celui des fonctions continues f sur $(-\infty, +\infty)$ telles que $e^{-\frac{x^2}{4}} f$ soit de carré sommable, la norme étant $\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} |f|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$; ces fonctions forment un espace de Hilbert.

Or $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{(y-\theta x)^2}{2(1-\theta^2)}}}{\sqrt{1-\theta^2}}$ est le noyau de la transformation intégrale qui admet pour fonctions propres les polynomes d'Hermite dérivés de $e^{-\frac{x^2}{2}}$, soit donnés par

$$e^{-\frac{x^2}{2} + hx} = \sum \frac{h^n}{n!} H_n(x) \quad (\text{cf. formule de Mehler}),$$

on a $A(t) H_n(x) = e^{-nt} H_n(x)$ et si les $\varphi_n(x)$ sont les $H_n(x)$ normés,

$$f = \sum_0^\infty a_n \varphi_n \quad \text{devient} \quad Af = \sum_0^\infty a_n e^{-nt} \varphi_n(x).$$

$A(\eta) - I$ tend vers zéro si $n \rightarrow 0$, car c'est

$$[A(\eta) - I]f = \sum a_n (1 - e^{-n\eta}) \varphi_n,$$

mais non uniformément, car $\|A(\eta) - I\| = 1$; en effet, pour n assez grand $(A_\eta - I)\varphi_n = (e^{-n\eta} - 1)\varphi_n$ est aussi voisin de $-\varphi_n$ qu'on le désire. D'ailleurs, la borne inférieure de $A(\eta)$ est 0, $A(\eta)$ n'a jamais

d'inverse; o point d'accumulation des $\lambda_n = e^{-n\eta}$ du spectre ponctuel, appartient au spectre continu.

Le générateur a est tel que $a\varphi_n = -n\varphi_n$. Il n'est défini que pour $\sum n^2 a_n^2 < \infty$, donc dans un domaine de \mathcal{B} dense sur \mathcal{B} , mais il n'est pas borné. On peut vérifier la formule exponentielle

$$A(t)f = \lim_{\eta \rightarrow 0} e^{A_\eta t} f, \quad A_\eta = \frac{1}{\eta} [A(\eta) - I],$$

car $e^{A_\eta t} \varphi_n(x) = e^{t \frac{e^{-n\eta} - 1}{\eta}} \varphi_n(x)$ et la limite forte résulte de

$$\sum_0^\infty a_n^2 \left[e^{-nt} - e^{-\frac{1-e^{-n\eta}}{\eta} t} \right]^2 \rightarrow 0 \quad \text{avec } \eta \quad (\sum a_n^2 < \infty).$$

Corrélation. — Dans cet exemple, la fonction des valeurs est $f(x) = x$, c'est une fonction propre $\left[\lambda = \frac{1}{e} \text{ pour } A(1) \right]$, aussi $R(a, ix)f$ se réduit à $\frac{f}{ix+1}$ et $F(x)$ à $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{dx}{1+x^2}$, tandis que $\rho(t)$ se réduit à $e^{-|t|}$. Si f n'est pas un polynôme, son développement comporte une infinité de termes $\neq 0$, et $F(x)$ mettrait en évidence tous les points singuliers du spectre et les principales propriétés de structure de la chaîne $A(t)$; le processus serait apparemment, avec cette nouvelle échelle de mesure, bien différent du mouvement brownien, quoique il s'y ramène par une simple transformation.

CHAPITRE IV.

CAS FINI, EXEMPLES DIVERS, RÉCIPROQUES.

CONSTRUCTION DE TOUTES LES CHAÎNES POSSIBLES. — La forme générale de la solution se trouve dans le livre de M. Fréchet; nous allons en donner ici une expression plus précise.

Nous partons de $A = A(1)$. Le problème est de trouver $A(t)$ tel que $AA(t) = A(t+1)$, ou de trouver n vecteurs $r_i(t)$ vérifiant

$$(1) \quad Ar_i(t) = r_i(t+1);$$

ce sont les colonnes de $A(t)$, du moins s'ils vérifient les conditions initiales, c'est-à-dire $r_i(1) =$ colonnes de $A(A_{ji})$, mais une fois trouvés n vecteurs $r_i(t)$, une combinaison linéaire convenable donnera aussitôt la solution cherchée.

a. Supposons que A ait n vecteurs propres distincts r_1, \dots, r_n , correspondant aux valeurs propres s_1, \dots, s_n , dont plusieurs peuvent être égales. On a

$$Ar_i = s_i r_i, \dots \quad \text{ou} \quad Ar = rS,$$

les r_i étant les colonnes de la matrice r , s étant la matrice diagonale de termes $s_{ij} = s_i \delta_{ij}$ ($\delta_{ij} = 0$ si $j \neq i$, 1 si $j = i$). Une fois A ramenée à ses axes sous la forme $r^{-1}Ar = S$, la solution est immédiate, c'est S^t facile à définir $s_{ij}(t) = s_i^t \delta_{ij}$ choisissant pour chaque s_i une détermination arbitraire; alors

$$A(t) = rS^t r^{-1}$$

forme bien la chaîne que nous cherchions [les $r_i(t)$ définis plus haut sont ici les $s_i^t r_i$]. Nous supposons le déterminant $|A| \neq 0$.

b. Supposons maintenant qu'il n'y ait pas n vecteurs r_i distincts (linéairement, bien entendu). Par exemple, s_1 est racine d'ordre p et il n'y qu'un vecteur propre r_1 ; alors $s_1^t r_1 = r_1(t)$ est solution de (1), il faut en trouver $p-1$ autres. Nous pouvons imaginer que l'on construise $A(\varepsilon)$ continu en ε et tendant vers A quand $\varepsilon \rightarrow 0$ (ε n'ayant aucun rapport avec t), et que pour $\varepsilon \neq 0$, il y ait n racines de l'équation en S , et vecteurs propres distincts. On peut alors définir par des combinaisons linéaires des solutions $s_i^t(\varepsilon) r_i(\varepsilon)$ de $A(\varepsilon) r_i(\varepsilon, t) = r_i(\varepsilon, t+1)$ des quantités qui, à la limite, nous donnent des dérivées par rapport à s .

Soit $p = 2$,

$$r_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{s_1^t(\varepsilon) r_1(\varepsilon) - s_2^t(\varepsilon) r_2(\varepsilon)}{s_1 - s_2} = \frac{d}{ds} s_1^t(\varepsilon) r_1(\varepsilon) \quad \text{pour } \varepsilon = 0.$$

Supposons aussi que $\frac{d}{ds} r_1(\varepsilon)$ existe pour $\varepsilon = 0$, alors

$$A\left(\frac{d}{ds} s^t r\right) = \frac{d}{ds} (s^{t+1} r), \quad \text{d'où} \quad (A - s) \frac{dr}{ds} = r.$$

Plus généralement, le même calcul peut être fait par exemple, et pour ne pas compliquer, supposons $p = 3$ et

$$s_2(\varepsilon) = s_1 + \delta(\varepsilon), \quad s_3(\varepsilon) = s_1 + 2\delta(\varepsilon);$$

la troisième solution serait

$$\lim \frac{s_1^t r_1(\varepsilon) + (s_1 + 2\delta)^t r_3(\varepsilon) - 2(s_1 + \delta)^t r_2(\varepsilon)}{\delta^2(\varepsilon)} = \frac{d^2}{ds^2} (s^t r).$$

On vérifie par récurrence que

$$(2) \quad (A - S) \frac{d^p r}{ds^p} = p \frac{d^{p-1} r}{ds^{p-1}},$$

car si (2) vaut pour $i \leq p - 1$, de

$$A(s^t r)^{(p)} = (s^{t+1} r)^{(p)} \quad [\text{l'indice entre } () \text{ étant un indice de dérivation}],$$

on tire en développant

$$\sum_{i=1}^p C_p^i (s^t)^{(i)} [s^t r^{(p-i)} + (p-i) - i r^{(p-i-1)}] A s^t r^{(p)} = \sum_1^p C_p^i (s^{t+1})^{(i)} r^{(p-i)} + s^{t+1} r^{(p)},$$

d'où il ne reste que

$$(A - s) s^t r^{(p)} + C_p^1 s^t t r^{(p-1)} = (t + 1) s^t C_p^1 r^{(p-1)}.$$

G. Q. F. D.

Nous supposons ici que $r_2(\varepsilon)$ et $r_3(\varepsilon)$ tendent vers r_1 .

En général, les $p r_i(\varepsilon)$ tendent vers l'un ou l'autre des vecteurs propres de A, quand il y en a plusieurs. Ainsi nous voyons, si α_1 d'entre eux tendent vers r_1 , qu'il existe une chaîne de α_1 vecteurs vérifiant

$$\begin{array}{ll} (A - s_1) X_1 = 0 & \text{en posant } X_1 = r_1; \\ (A - s_1) X_2 = X_1 & X_2 = \frac{dr_1}{ds}, \quad X_3 = \frac{1}{2} \frac{d^2 r_1}{ds^2}; \\ \dots & \dots; \\ (A - s_1) X_{\alpha_1} = X_{\alpha_1-1} & X_{\alpha_1} = \frac{1}{(\alpha_1 - 1)!} \frac{d^{\alpha_1-1} r_1}{ds^{\alpha_1-1}} \end{array}$$

et il existe p vecteurs se répartissant en chaînes de cette nature, le nombre de chaînes étant le rang de s_1 , c'est-à-dire le nombre de

vecteurs propres correspondants. L'ordre du pôle s_1 est le plus grand des nombres α_1 . Nous retrouvons la décomposition de Jordan des matrices finies dans le groupe projectif (cf. M. G. Julia, Réf. citée).

Ces différents vecteurs X_i forment la matrice r que nous cherchions et

$$Ar = r\varpi,$$

ϖ est une matrice formée de la succession sur la diagonale principale des matrices réduites du type

$$\begin{vmatrix} s_1 & 1 & . & . & . & . & . \\ . & s_1 & 1 & . & . & . & . \\ . & . & s_1 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . & s_1 \end{vmatrix}$$

d'ordre α_1 , n'ayant que deux diagonales (dont la principale) non nulles.

L'itération de la matrice ϖ nous est immédiate maintenant : une matrice partielle d'ordre α_1 s'obtiendra en développant les

$$\frac{d^i(s^t r)}{ds^i} \frac{1}{i!} \quad (i \leq \alpha_1 - 1),$$

suivant les

$$\frac{1}{i!} \frac{d^i r}{ds^i} = X_{t+1},$$

chacune formant une colonne de $\varpi(t)$.

En rapportant les indices à une matrice partielle, on a

$$\varpi_{ij}(t) = \text{coef. de } \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1} r}{ds^{i-1}} \text{ dans } \frac{d^{j-1}(s^t r)}{ds^{j-1}} \frac{1}{(j-1)!},$$

soit

$$\begin{aligned} & \frac{(i-1)!}{(j-1)!} \frac{(j-i)!}{(i-1)! (j-i)!} t(t-1) \dots (t-j+i+1) s^{t-j+i} \\ & = \text{coef. de } s^{t-j+i} \text{ dans } (s+1)^t, \\ \varpi_{ij}(t) & = \frac{t(t-1) \dots (t-j+i+1)}{(j-i)!} s^{t-(j-i)} \quad (j \geq i), \end{aligned}$$

ne dépend que de $j-i$.

Soit

$$\begin{vmatrix} s^t & ts^{t-1} & \frac{t(t-1)}{2!} s^{t-2} & \dots & \dots \\ 0 & s^t & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & s^t & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & s^t & ts^{t-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & s^t \end{vmatrix}$$

On peut vérifier que

$$\varpi(t)\varpi(t') = \varpi(t+t'),$$

$\varpi(t)$ est ainsi la forme canonique d'une chaîne, déterminée de façon unique par la donnée des s_i , de leur ordre p_i de multiplicité, de leur rang r_i , de l'ordre de leur pôle ν_i , et des nombres de chaînes de longueur 1, ..., 2, ν_i , leur total valant r_i .

Donc $r(t) = r\varpi(t)$ et la combinaison linéaire $r(t)\mu$ qui égale I pour $t=0$ est

$$A(t) = r\varpi(t)r^{-1}.$$

Notons qu'une détermination de s^t doit être choisie pour chaque chaîne; il peut y en avoir autant pour une valeur s_i qu'il y a de vecteurs propres correspondants (rang r_i).

Partant d'une matrice $A(1)$ de probabilités, il reste uniquement à exprimer que $A(t) \geq 0$, ce qui conduit à des inégalités limitant le choix de la matrice r . A étant réel, les valeurs propres ainsi que les colonnes de r , sont deux à deux conjuguées s'il s'y introduit des valeurs complexes.

Soit

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

exemple de M. Fréchet (collection Borel, p. 109),

$$\Delta(s) = 1 - s^3, \quad s = \frac{i\sqrt{3}-1}{2},$$

soit

$$r = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & s & s^2 \\ 1 & s^2 & s \end{vmatrix}.$$

Cherchons la décomposition de l'unité $I = J_1 + J_2 + J_3$ correspondant aux trois valeurs propres 1, $\frac{i\sqrt{3}-1}{2}$ et $\frac{-i\sqrt{3}-1}{2}$, les

vecteurs propres étant $\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ s^2 \\ s \end{vmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \frac{x+y+z}{3} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} 1 \\ s^2 \\ s \end{vmatrix},$$

$$\lambda + \mu = \frac{2x-y-z}{3}, \quad \lambda - \mu = \frac{y-z}{s-s^2} = i \frac{z-y}{\sqrt{3}},$$

$$\lambda = \frac{x - \frac{(y+z)}{2}}{3} + i \frac{z-y}{\sqrt{3}}, \quad \mu = \bar{\lambda},$$

$$A(t) = J_1 + s^t J_2 + s^{2t} J_3 = J_1 + e^{2i\pi(k_1 + \frac{1}{3})t} J_2 + e^{-2i\pi(k_2 + \frac{1}{3})t} J_3;$$

donc

$$A(t) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} \left(1 + 2 \cos 2\pi \frac{t}{3} \right) & \frac{1}{3} \left(1 + 2 \cos 2\pi \frac{t-1}{3} \right) & \frac{1}{3} \left(1 + 2 \cos 2\pi \frac{t+1}{3} \right) \\ \frac{1}{3} \left(1 + 2 \cos 2\pi \frac{t+1}{3} \right) & \frac{1}{3} \left(1 + 2 \cos 2\pi \frac{t}{3} \right) & \frac{1}{3} \left(1 + 2 \cos 2\pi \frac{t-1}{3} \right) \\ \frac{1}{3} \left(1 + 2 \cos 2\pi \frac{t-1}{3} \right) & \frac{1}{3} \left(1 + 2 \cos 2\pi \frac{t+1}{3} \right) & \frac{1}{3} \left(1 + 2 \cos 2\pi \frac{t}{3} \right) \end{vmatrix}$$

en faisant, par exemple, $k_1 = k_2 = 0$.

Pour t entier seulement la matrice est à termes ≥ 0 . Nous savons que cela ne pouvait avoir lieu pour t irrationnels, donc par continuité pour des t rationnels denses sur $(0, 1)$, puisque $A(t)$ a toujours des λ racines de l'unité.

Le générateur est

$$a = \begin{vmatrix} 0 & \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} & -\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \\ -\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \\ \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} & \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} & 0 \end{vmatrix}.$$

Mais l'absence de λ de module 1 ne suffit pas pour que $A(t)$ soit ≥ 0 . Pour le voir, envisageons la discussion complète du cas $n = 3$, avec les racines réelles 1, $s, s', s < 1, s' < 1$.

Soit

$$r = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha' \\ 1 & \beta & \beta' \\ 1 & \gamma & \gamma' \end{vmatrix},$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \beta\gamma' - \beta'\gamma, \\ b &= \gamma\alpha' - \gamma'\alpha, \\ c &= \alpha\beta' - \alpha'\beta, \end{aligned} \right\} a + b + c = \Delta, \quad \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

$$A(t) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha' & \left| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s^t & 0 \\ 0 & 0 & s^t \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a & b & c \\ \beta' - \gamma' & \gamma' - \alpha' & \alpha' - \beta' \\ \gamma - \beta & \alpha - \gamma & \beta - \alpha \end{vmatrix} \right. \\ 1 & \beta & \beta' \\ 1 & \gamma & \gamma' \end{vmatrix},$$

soit encore

$$A(t) = \frac{1}{\Delta} \left\{ \begin{aligned} & \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} + s^t \begin{vmatrix} \alpha(\beta' - \gamma') & \alpha(\gamma' - \alpha') & \alpha(\alpha' - \beta') \\ \beta(\beta' - \gamma') & \beta(\gamma' - \alpha') & \beta(\alpha' - \beta') \\ \gamma(\beta' - \gamma') & \gamma(\gamma' - \alpha') & \gamma(\alpha' - \beta') \end{vmatrix} \\ & + s^{t'} \begin{vmatrix} \alpha'(\gamma - \beta) & \alpha'(\alpha - \gamma) & \alpha'(\beta - \alpha) \\ \beta'(\gamma - \beta) & \beta'(\alpha - \gamma) & \beta'(\beta - \alpha) \\ \gamma'(\gamma - \beta) & \gamma'(\alpha - \gamma) & \gamma'(\beta - \alpha) \end{vmatrix} \end{aligned} \right\}$$

le $\frac{1}{\Delta}$ doit s'entendre en ce sens que tous les termes de A sont à diviser par Δ .

a, b, c doivent avoir le même signe, soit + (dans le cas contraire on échangera α et α', \dots , ce qui revient à échanger s et s'). α, β, γ ne peuvent avoir tous le même signe, de même α', β', γ' .

Envisageons le groupe de solutions :

$$\alpha \leq 0 \leq \beta \leq \gamma, \quad \beta' \leq \alpha' \leq 0 \leq \gamma',$$

nous aurons

$$\frac{\gamma}{\gamma'} \leq \frac{\alpha}{\alpha'}.$$

$A(t)$ s'écrit aussi sous la forme

$$I + (s^t - 1)|T| + (s^{t'} - 1)|T'|,$$

et nous devons écrire que les termes de ces deux dernières matrices, ajoutés, sont ≥ 0 pour les termes non principaux, et ≥ -1 pour ceux de la diagonale principale. Faisons $t = 1$, posons $\frac{1-s'}{1-s} = k$

$$\begin{aligned} |\alpha(\gamma' - \alpha')| - k\alpha'(\alpha - \gamma) &\geq 0, & -\beta(\alpha' - \beta') + k|\beta'(\beta - \alpha)| &\geq 0; \\ |\gamma(\beta' - \gamma')| - k\gamma'(\gamma - \beta) &\geq 0, & -\gamma(\gamma' - \alpha') + k|\gamma'(\alpha - \gamma)| &\geq 0 \end{aligned}$$

équivalent à

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{\beta(\alpha' - \beta')}{\beta'(\beta - \alpha)} \right| \leq k \leq \left| \frac{\alpha(\gamma' - \alpha')}{\alpha'(\alpha - \gamma)} \right|, \\ \left| \frac{\gamma(\gamma' - \alpha')}{\gamma'(\alpha - \gamma)} \right| \leq k \leq \left| \frac{\gamma(\beta' - \gamma')}{\gamma'(\gamma - \beta)} \right|; \end{array} \right.$$

les termes de la diagonale, tels

$$A_{11} = 1 + \frac{s-1}{\Delta} \{-\alpha(\beta' - \gamma') - k|\alpha'\beta - \gamma|\}$$

séront certainement ≥ 0 pour $(s-1)$ assez petit.

Mais pour que $A(t)$ soit ≥ 0 , quel que soit t , il faut et il suffit que les $\frac{dA_{ij}(t)}{dt}$ soient pour $t=0$, ≥ 0 si $i \neq j$, (ce qui entraîne ≤ 0 si $i=j$). Pour les premiers, nous aurons les mêmes inégalités que ci-dessus, mais en remplaçant k par $k' = \frac{Ls'}{Ls}$, et il est aisé de choisir les α tels que (3) soit vérifié par k et non par k' ($s' < s$ entraîne $k' > k$). Prenons, par exemple,

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} -1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{l} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} 2 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{array} \right|, \quad p = \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \end{array} \right|, \\ s' = \frac{1}{4}, \quad s = \frac{1}{2}; \end{array}$$

nous obtenons

$$A(t) = \begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{array} \right| + 2^{-t} \left| \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{array} \right| + 4^{-t} \left| \begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right|, \\ A(1) = \left| \begin{array}{ccc} \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{16} & \frac{5}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{16} & \frac{9}{16} \end{array} \right| \end{array}$$

$A_{12} = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{3}{2^t} + \frac{2}{4^t} \right)$ est < 0 pour $\frac{1}{2} < 2^{-t} < 1$ ($0 < t < 1$). On aurait aussi bien pu choisir s et s' pour que A_{12} soit > 0 pour $t=1$ et < 0 dans une partie de $(0, 1)$ seulement, attenante à 0. Nous pouvons donc affirmer que n'importe quelle matrice A de probabilités, n'appartient pas nécessairement à une chaîne continue de Markoff, même si $\lambda = 1$ est la seule valeur propre de module égal à 1.

Cas $n=3$, $s=s'$. — Avec les mêmes notations, nous avons maintent

$$\varpi(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s^t & ts^{t-1} \\ 0 & 0 & s^t \end{vmatrix}.$$

D'où

$$A(t) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} + s^t |T| + s^t |T'| \\ + ts^{t-1} \begin{vmatrix} \alpha(\gamma - \beta) & \alpha(\alpha - \gamma) & \alpha(\beta - \alpha) \\ \beta(\gamma - \beta) & \beta(\alpha - \gamma) & \beta(\beta - \alpha) \\ \gamma(\gamma - \beta) & \gamma(\alpha - \gamma) & \gamma(\beta - \alpha) \end{vmatrix},$$

ou encore

$$A(t) = s^t I + \frac{1-s^t}{\Delta} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} + \frac{ts^{t-1}}{\Delta} \begin{vmatrix} \alpha(\gamma - \beta) & \alpha(\alpha - \gamma) & \alpha(\beta - \alpha) \\ \beta(\gamma - \beta) & \beta(\alpha - \gamma) & \beta(\beta - \alpha) \\ \gamma(\gamma - \beta) & \gamma(\alpha - \gamma) & \gamma(\beta - \alpha) \end{vmatrix}$$

et le générateur

$$a = LsI + \frac{-Ls}{\Delta} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} + \frac{1}{s\Delta} \begin{vmatrix} \alpha(\gamma - \beta) & \alpha(\alpha - \gamma) & \alpha(\beta - \alpha) \\ \beta(\gamma - \beta) & \beta(\alpha - \gamma) & \beta(\beta - \alpha) \\ \gamma(\gamma - \beta) & \gamma(\alpha - \gamma) & \gamma(\beta - \alpha) \end{vmatrix}.$$

Il nous suffit d'écrire que les termes non diagonaux sont ≥ 0 (dans a), ce qui par exemple, sous les hypothèses $\Delta > 0$, $\alpha \leq 0 \leq \beta \leq \gamma$, se réduit à :

$$(4) \quad sL \frac{1}{s} \geq \frac{|\alpha(\beta - \alpha)|}{c}, \quad sL \frac{1}{s} \geq \frac{|\gamma(\alpha - \gamma)|}{b},$$

conditions réalisables si $\frac{|\alpha(\beta - \alpha)|}{c}$ et $\frac{|\gamma(\alpha - \gamma)|}{b}$ sont $< \frac{1}{e}$.

Pour $n > 3$, le problème se pose de façon analogue : exprimant

que les éléments non diagonaux A_{ij} du générateur sont ≥ 0 , on obtient des formes linéaires en $-Ls_i$, homogènes. Il faut choisir les r_{ij} de façon que les coefficients ne soient pas tous < 0 , on obtient alors des conditions analogues à (3) qui limitent les rapports des Ls_i entre eux, en même temps qu'elles imposent certaines inégalités aux r_{ij} . Ceci s'il existe n vecteurs propres; sinon $\varpi(t)$ n'est pas diagonale, les formes linéaires ci-dessus en Ls_i dépendront, en outre, de $\frac{1}{s_i}, \dots, \frac{1}{s_i^{\nu_i}}$, ν_i étant l'ordre du pôle Ls_i pour la résolvante $R(a, \lambda)$, et les conditions imposées sont plus restrictives pour les s_i .

Corrélations. — Ce qui va être dit pour le cas fini vaut aussi pour la portion de $\rho(t)$ qui dans le cas général, correspond à un sous-espace E_λ , λ étant pôle d'ordre ν de $R_\lambda(A)$, de rang fini (c'est-à-dire E_λ à un nombre fini de dimensions); lorsque le rang est infini et $\nu > 1$, nous avons déjà noté que, en général, la décomposition canonique de Jordan ne vaut plus (cf. *C. R. Acad. Sc.*, t. 228, 1949, p. 638), on peut imaginer des cas où l'expression donnée ci-dessus de $\varpi(t)$ vaudrait pour des matrices de rang infini, et même dans le cas contraire, cette expression peut être valable appliquée à un vecteur particulier (ici f , fonction des valeurs prises par la variable aléatoire dans chacun des états possibles).

Au lieu de f , désignons par x_i la valeur de X pour le $i^{\text{ème}}$ état

$$\rho(t) = x_i p_i r_{ik} \varpi_{kl}(t) r_{ij}^{-1} x_j^*.$$

Il est plus simple ici d'étudier ρ sous sa forme directe plutôt que son spectre de Fourier

$$(5) \quad \rho(t) = \sum P_u e^{-\lambda_u t}, \quad \lambda_u = L \frac{1}{s_u};$$

P_u est un polynome en t et en $\frac{1}{s}$, de degré au plus égal à $\nu_u - 1$ par rapport à chacune de ces variables, ν_u étant toujours l'ordre du pôle $-\lambda_u$ pour $R_\lambda(a)$. Le degré est effectivement celui-là pour un choix arbitraire des x_i .

Comme nous supposons

$$\bar{X} = p_i x_i = 0 \quad \text{et} \quad |\bar{X}|^2 = p_i x_i x_i^* = 1,$$

on a

$$P_1 \equiv 0 (\lambda_1 = 0), \quad \sum_u P_u(t=0) = 1.$$

P_u se présente d'ailleurs sous la forme

$$\sum_0^{v_u-1} C_{u,i} \frac{t(t-1)\dots(t-i+1)}{i! s_u^i},$$

forme sous laquelle peut se mettre tout polynôme de degré $v_u - 1$ en t .

Nous allons essayer de poser sous une forme plus précise le problème réciproque :

Toute fonction $\rho(t)$ de la forme (5) est-elle fonction de corrélation d'un processus de Markoff à un nombre fini d'états possibles? [Bien entendu $\rho(t)$ est définie pour $t \geq 0$, $\rho(-t) = \rho^*(t)$ et nous supposons $|\rho(t)|^2 \leq 1$].

Posons

$$\sigma_k = x_i p_i r_i k, \quad \text{soit } \sigma' = x' p r$$

(l'accent indique qu'on a transposé la matrice, ici le vecteur σ pris habituellement sous forme de colonne $Y' = X' A$ équivaut à $Y = A' X$).

Puis

$$\tau_k = r_{kj}^{-1} x_j^* \quad \text{ou} \quad \tau = r^{-1} x^*, \quad \text{soit } x^* = r \tau,$$

nous avons

$$(6) \quad c_{ui} = \sum_k \sigma_k \tau_{k+i}, \quad l_u \leq k, \quad k+i \leq l_u + v_u - 1$$

et nous essayons $A(t)$ étant donnée, c'est-à-dire r et $\varpi(t)$ de déterminer les x_i , supposés inconnus de façon que $\rho(t)$ prenne la forme imposée à l'avance

$$\sum C_{ui} \frac{t(t-1)\dots(t-i+1)}{i! s_u^i} e^{-\lambda_u t} \quad (i \text{ variant de } 0 \text{ à } v_{u-1}).$$

Le premier problème est donc de résoudre (6) facile à expliciter en τ_k : remplaçons dans σ , x par $r^* \tau^*$

$$\sigma = r' p r^* \tau^*, \quad \sigma = \gamma \tau^*,$$

γ est une matrice hermitienne, définie ≥ 0 , car

$$\gamma_{ij} = r_{ki} p_k r_{kj}^* = \gamma_{ji}^* \quad \text{et} \quad \gamma_{ij} x_i x_j = p_k |r_{ki} x_i|^2 \geq 0 \quad (\text{si les } x_i \text{ sont réels}).$$

Le cas le plus simple est celui où les λ_k sont tous simples, c'est-à-dire pôles d'ordre 1, auquel cas nous avons à résoudre les n équations quadratiques (les P_u se réduisant à ρ_k)

$$(7) \quad \gamma_{ki} \tau_i^* \tau_k = \rho_k;$$

si les ρ_k sont réels il y a une solution avec τ_i réels, et le problème s'énonce ainsi : trouver le point τ tel que la projection de 0 sur son plan polaire par rapport à la quadrique $\gamma_{ki} \tau_i^* \tau_k = 1$, soit τ' , lui corresponde dans l'affinité $\tau'_i = \frac{\tau_i}{\rho_i}$. Il s'agit de trouver pour r et $\omega(t)$ des valeurs satisfaisant à la fois aux conditions $A(t) \geq 0$ discutées plus haut, et aux conditions de résolubilité de (7) (par $x = r^* \tau^*$, on en déduit alors aussitôt les x_i).

Le cas général est plus compliqué; (7) est remplacé par un ensemble de groupes d'équations tels que

$$\begin{aligned} \sigma_l \tau_l + \sigma_{l+1} \tau_{l+1} + \dots + \sigma_{l+v-1} \tau_{l+v-1} &= c_{l,0}, \\ \sigma_l \tau_{l+1} + \dots + \sigma_{l+v-2} \tau_{l+v-1} &= c_{l,1}, \\ \dots & \\ \sigma_l \tau_{l+v-1} &= c_{l,v-1}. \end{aligned}$$

Examinons de façon plus complète les deux cas les plus simples.

1. $n = 2$, $\rho(t) = s^t$. Tout processus à deux états possibles, réduit (c'est-à-dire rapporté à sa valeur moyenne et normé) a une corrélation de cette forme et x_1, x_2 seront toujours déterminés par

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = 0, \quad p_1 |x_1|^2 + p_2 |x_2|^2 = 1.$$

Nous avons

$$r = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \beta \end{vmatrix}, \quad r^{-1} = \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{vmatrix} \beta & -\alpha \\ -1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$p_1 = \frac{\beta}{\beta - \alpha}, \quad p_2 = -\frac{\alpha}{\beta - \alpha}.$$

Soit

$$A(t) = \begin{vmatrix} \beta - \alpha s^t & -\alpha(1 - s^t) \\ \beta(1 - s^t) & -\alpha + \beta s^t \end{vmatrix},$$

$$x_2 = \frac{\beta}{\alpha} x_1 \quad \text{entraîne} \quad |x_1|^2 = -\frac{\alpha}{\beta}, \quad |x_2|^2 = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

2. $n = 3$, $s = s'$. s est donc réel. Désignant par x, y, z les valeurs de X pour les trois états possibles. On a

$$\rho = s^t + \frac{t s^{t-1}}{\Delta^2} [(\Sigma a \alpha x)(\Sigma (\gamma - \beta) x^*)]$$

en nous reportant à l'expression déjà écrite dans ce cas particulier de $A(t)$.

Supposons $\Delta = 1$ (ou $a + b + c = 1$) et posons $T = \Sigma a \alpha x$. $\Sigma (\gamma - \beta) x^*$. Une restriction concernant s et T est imposée par la condition $\rho(t) \leq 1$. $\frac{d\rho}{dt} \leq 0$ pour $t = 0$ nous donne

$$T \leq sL \frac{1}{s}$$

et ceci entraîne

$$\rho(t) \leq s^t \left(1 + tL \frac{1}{s} \right) = e^{-tL \frac{1}{s}} \left(1 + tL \frac{1}{s} \right) \leq 1.$$

Nous allons voir que ceci n'est pas suffisant, en cherchant à résoudre le problème réciproque dans le cas x, y, z réels (donc aussi T).

Construire un processus de Markoff à trois états possibles admettant la corrélation $\rho = s^t + T t s^{t-1}$.

Pour résoudre le système

$$(8) \quad \begin{cases} ax + by + cz = 0, \\ ax^2 + by^2 + cz^2 = 1, \\ \Sigma a \alpha x \cdot \Sigma (-\gamma \beta) x = T, \end{cases}$$

posons comme plus haut

$$\begin{aligned} \sigma &= a \alpha x + b \beta y + c \gamma z, \\ \tau &= (\gamma - \beta) x + (\alpha - \gamma) y + (\beta - \alpha) z, \\ 0 &= ax + by + cz. \end{aligned}$$

et ajoutons

Le déterminant D de ce nouveau système vaut

$$\begin{vmatrix} a\alpha & b\beta & c\gamma \\ \gamma - \beta & \alpha - \gamma & \beta - \alpha \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b\beta & c\gamma \\ 0 & \alpha - \gamma & \beta - \alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \Sigma a\alpha^2 = D,$$

d'où

$$Dx = \begin{vmatrix} \sigma & b\beta & c\gamma \\ \tau & \alpha - \gamma & \beta - \alpha \\ 0 & b & c \end{vmatrix} = \alpha\sigma + bc(\gamma - \beta)\tau$$

et, portant dans (8), on obtient

$$D^2 = \Sigma a[\alpha\sigma + bc(\gamma - \beta)\tau]^2 = D\sigma^2 + abc\tau^2 \Sigma bc(\gamma - \beta)^2;$$

mais de $\Sigma a = 1$ et $\Sigma a\alpha = 0$, on tire

$$2 \Sigma a\alpha b\beta = - \Sigma a^2\alpha^2,$$

donc

$$\Sigma bc(\gamma - \beta)^2 = \Sigma bc(\gamma^2 + \beta^2) + \Sigma a^2\alpha^2 = \Sigma \alpha^2(a - a^2) + \Sigma a^2\alpha^2 = \Sigma a\alpha^2 = D,$$

soit $D = \sigma^2 + abc\tau^2$ et, compte tenu de $\sigma\tau = T$,

$$abc\tau^4 - D\tau^2 + T^2 = 0,$$

résoluble si $T^2 \leq \frac{D^2}{4abc}$. Comme $T \leq sL^{\frac{1}{s}}$, on a nécessairement dans le cas déjà examiné $\alpha \leq 0 \leq \beta \leq \gamma$,

$$(4') \quad \frac{D^2}{4abc} \leq \begin{cases} \frac{|\alpha(\beta - \alpha)|^2}{c^2}, \\ \frac{|\gamma(\alpha - \gamma)|^2}{b^2}, \end{cases}$$

car, sans cela, on pourrait satisfaire à (4) et (4') avec $T \geq sL^{\frac{1}{s}}$, ce qui serait absurde.

Restons tout d'abord dans le cas $\alpha \leq 0 \leq \beta \leq \gamma$. Posons

$$\begin{aligned} \frac{D^2}{4abc} &= \theta, & c_2 &= \frac{|\gamma(\alpha - \gamma)|^2}{b^2}, & c_3 &= \frac{|\alpha(\beta - \alpha)|^2}{c^2}, \\ z_3 &= \frac{\theta}{c_3}, & z_2 &= \frac{\theta}{c_2}, & y_1 &= \sqrt{z_2 z_3}; \end{aligned}$$

Soit $\beta = k|\alpha|$, $\gamma = k'|\alpha|$. Supposons k, k' choisis, $k \leq k'$; de

$$b + c = 1 - a, \quad kb + k'c = a,$$

on tire

$$c = \frac{a(1+k) - k}{k' - k}, \quad b = \frac{k' - a(1+k')}{k' - k},$$

$$a + k^2b + k'^2c = a(1+k)(1+k') - kk'.$$

a étant choisi, donc b et c , on peut toujours en multipliant $\alpha, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$, par un même coefficient convenable, faire en sorte que $c_2 \leq \frac{1}{e}$, $c_3 \leq \frac{1}{e}$ (sauf à la limite, c'est-à-dire pour $b = 0$ ou $c = 0$, mais cela n'est pas gênant). a varie entre $\frac{k}{1+k}$ et $\frac{k'}{1+k'}$.

Posons encore

$$1+k=l, \quad 1+k'=l', \quad kk'=\tau, \quad all' - \tau = u, \quad \text{d'où} \quad \frac{bl}{cl'} = \frac{k'-u}{u-k},$$

u varie entre k et k' , et dans cet intervalle nous devons étudier le maximum de la plus petite des deux quantités z_2 et z_3 ; soit M ce maximum

$$y_1 = \frac{u^2}{4ak'l'l'} = \frac{u^2}{4k'(u+\tau)}, \quad y_1' = \frac{u(u+2\tau)}{4k'(u+\tau)^2},$$

y_1 croît dans l'intervalle k, k' , de

$$y_1(k) = \frac{k}{4k'(1+k')} \quad \text{à} \quad y_1(k') = \frac{1}{4(1+k)}, \quad \text{donc} \quad M \leq \frac{1}{4(1+k)}.$$

Mais pour $z_2 = z_3$, soit

$$\frac{l}{c} = \frac{k'l'}{b} \quad \text{ou} \quad k' = \frac{k'-u}{u-k}, \quad u_1 = \frac{k'l}{l'} \quad (k \leq u_1 \leq k'),$$

nous avons

$$y_1 = \frac{l^2}{4l'(l+k'l')} = \frac{1+2k+k^2}{4(1+k')(1+2k+kk')},$$

valeur qui peut certainement être atteinte par $\frac{T^2}{\left(sL\frac{1}{s}\right)^2}$, et qui si $k \rightarrow k'$,

tend vers $\frac{1}{4(1+k')}$. Pour $k = k'$, il faut reprendre le calcul ci-dessus :

$a = \frac{k}{1+k}$, b et c restent indéterminés, mais $z_2 = z_3$ entraîne $\frac{b}{c} = k$,
 $D = k$,

$$\gamma_1 = \frac{1}{4(1+k)}$$

Conclusion. — Dans ce cas $\frac{\dot{T}}{sL\frac{1}{s}}$ ne peut dépasser $\frac{1}{2}$, l'approche d'aussi près que voulu pour $k = k'$ assez petit, et l'atteint dans le cas trivial $k = k' = 0$.

Remarque. — Comme déjà remarqué, $a, b, c \geq 0$ demandent que α, β, γ n'aient pas tous les trois le même signe; nous pouvons

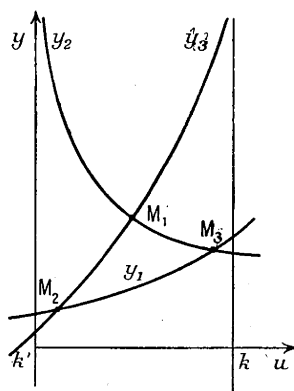


Fig. 2.

supposer qu'un seul d'entre eux est < 0 [dans le cas contraire, il suffit de changer tous les signes (de α, α', \dots)], soit α . Pour épuiser notre discussion, il suffit d'envisager maintenant le

Cas $\alpha \leq 0 \leq \gamma \leq \beta$, où $k' \leq k$. — Il faut alors ajouter aux conditions précédentes

$$sL\frac{1}{s} \geq \frac{|\beta(\gamma - \beta)|}{\alpha} = c_1^{\frac{1}{2}}$$

Posons donc $z_1 = \frac{\theta}{c_1}$,

$$\left. \begin{aligned} y_2 = \sqrt{z_1 z_3} &= \frac{D^2}{4 b k l \delta} = \frac{u^2}{4 k (u - k')} \\ y_3 = \sqrt{z_1 z_2} &= \frac{D^2}{4 k k' l' c \delta} = \frac{u^2}{4 k k' (k - u)} \end{aligned} \right\} (\delta = k - k').$$

M est toujours limité par le maximum du plus petit des trois nombres y_1, y_2, y_3 . u varie de k' à k .

Considérons y_2 ,

$$y_2 = y_1 \quad \text{pour} \quad k(u - k') = k'(u + \tau) \quad \text{ou} \quad u_3 = \frac{\tau l'}{\delta},$$

Si $u_3 \geq k$, la figure montre que notre méthode borne M par

$$y_1(k) = \frac{k}{4 k' (1 + k')},$$

ceci si

$$k'(1 + k') \geq k - k' \quad \text{ou} \quad k \leq k'(2 + k'), \quad l \leq l'^2.$$

Soit la borne maximum $\frac{2 + k'}{4(1 + k')} \leq \frac{1}{2}$; si $l \geq l'^2$,

$$y_2' = \frac{u(u - 2k')}{4k(u - k')^2}, \quad 2k' \leq k \leq u_3, \quad \text{donc} \quad y_2' \geq 0 \quad \text{pour} \quad u \geq u_2;$$

à partir de M_3 , y_2 croît jusqu'à

$$y_2(k) = \frac{k}{4(k - k')} \leq \frac{1}{2} \quad \text{puisque} \quad 2k' \leq k.$$

y_3 ne peut apporter aucune limitation supplémentaire.

Nous pouvons prendre comme valeur effectivement atteinte par z_1, z_2, z_3 à la fois, $y_1(u_1)$, lorsque

$$y_2(u_2) = y_3(u_1) \geq y_1(u_1),$$

car alors $z_2 = z_3 \leq z_1$, c'est-à-dire lorsque $u_2 \leq u_3$.

Or $k(k - u_2) = (u_2 + \tau)$ nous donne

$$u_2 = \frac{k\delta}{1 + k}, \quad \text{donc} \quad \frac{k\delta}{l} \leq \frac{\tau l'}{\delta},$$

ou

$$(k - k')^2 \leq k'(1 + k + k' + kk') \quad k'(1 + 3k + kk') - k^2 \geq 0,$$

soit

$$(1 + k')(1 + 2k + kk') = k' + 3kk' + kk'^2 + 2k + 1 \geq 1 + 2k + k^2 = l^2,$$

donc $\gamma_1(u_1) \leq \frac{1}{4}$; nous n'obtenons de pas valeur meilleure.

Donc, pour une chaîne à trois états possibles, la forme $s^t + T s^{t-1}$ n'est possible pour la corrélation que si $T \leq \frac{1}{\sqrt{2}} s L \frac{1}{s}$. Nous pouvons construire des exemples où la valeur $\frac{1}{2} - \varepsilon$ est prise par $\frac{T}{s L \frac{1}{s}}$, si petit

que soit ε , dans des cas non triviaux, et n'affirmons pas que $\frac{1}{2}$ peut être dépassé (ceci exigerait une discussion plus compliquée). Ceci d'ailleurs ne résoudrait pas complètement le problème, car nous ne pouvons affirmer ici qu'il n'existe pas de processus de Markoff quelconque ou même à un nombre fini d'états possibles qui aurait la fonction de corrélation ci-dessus avec $T = s L \frac{1}{s}$ ou du moins $T > \frac{1}{\sqrt{2}} s L \frac{1}{s}$.

Citons enfin un exemple concret du cas à trois états étudié ⁽⁸⁾.

Soit $k = k' = 1$; prenant $b = c$, on a $a = \frac{1}{2}$, $b = c = \frac{1}{4}$, et, d'après (4),

$8\alpha^2 \leq \frac{1}{e}$; prenons

$$\alpha = -\frac{1}{5} \quad \text{et} \quad \alpha' = \beta' = -\frac{5}{8}, \quad \gamma' = \frac{15}{8}, \quad s = \frac{1}{2},$$

$$A(t) = \begin{vmatrix} 2^{-t} + \frac{1}{2}(1 - 2^{-t}) & \frac{1}{4}(1 - 2^{-t}) + \frac{4}{25}t \cdot 2^{-t} & \frac{1}{4}(1 - 2^{-t}) - \frac{4}{25}t \cdot 2^{-t} \\ \frac{1}{2}(1 - 2^{-t}) & 2^{-t} + \frac{1}{4}(1 - 2^{-t}) - \frac{4}{25}t \cdot 2^{-t} & \frac{1}{4}(1 - 2^{-t}) + \frac{4}{25}t \cdot 2^{-t} \\ \frac{1}{2}(1 - 2^{-t}) & \frac{1}{4}(1 - 2^{-t}) - \frac{4}{25}t \cdot 2^{-t} & 2^{-t} + \frac{1}{4}(1 - 2^{-t}) + \frac{4}{25}t \cdot 2^{-t} \end{vmatrix},$$

⁽⁸⁾ C'est, légèrement modifié, ce contre-exemple que j'avais indiqué à M. Paul Lévy, montrant que $\rho(t)$ n'est pas forcément de la forme $e^{-c|t|}$ (cf. P. LÉVY, *Processus stochastiques*, Gauthier-Villars, 1948). M. Paul Lévy m'a demandé de dire qu'il était d'accord avec moi sur ce sujet.

puis pour $\rho(t)$, avec

$$2x + y + z = 0, \quad 2x^2 + y^2 + z^2 = 4,$$

$$T = -\frac{4x\sqrt{2}}{25}\sqrt{1-x^2}, \quad \rho(t) = 2^{-t} - \frac{4\sqrt{2}}{25}x\sqrt{1-x^2}t \cdot 2^{-t}.$$

T est maximum pour $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et vaut $\frac{2}{25}$, tandis que $sL\frac{1}{s}$ est

$$\geq \frac{8}{25} = 0,32 \quad \left(\frac{1}{2}L_2 = 0,34, \dots \right).$$

Remarque sur le cas $A(t) \rightarrow J \neq I$ quand $t \rightarrow 0$. — Utilisons, dans le cas fini, les résultats de l'étude de Doblin (déjà cité) sur les transitions instantanées : soient u_{ij} les termes de $A(+0) = J$. Les états r_1, \dots, n , se répartissent en groupes F, G_1, \dots, G_s , avec

$$u_{ij} = 0 \quad \text{si } j \in F, \quad u_{ij} = \delta_{iJ} u_j \quad \text{pour } i \in I, j \in J,$$

I, J désignant les groupes indiqués et $J \neq F$

$$\delta_{iJ} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i \in J} u_j = 1.$$

Les groupes G sont des groupes finaux de M. Fréchet et ils sont stochastiquement fermés ($\delta_{iJ} = 0$ si $I \neq J$).

Les p_i satisfont à

$$p_j A_{ji} = p_i, \quad \text{avec } A_{ji}(t) = \omega_{jI} u_i \quad \text{si } i \notin F,$$

les $\omega_{jI}(t)$ étant les probabilités de passage du groupe J au groupe I dans le temps t ; les $\sum_{i \in J} p_j = q_j$ satisfont à

$$q_j \omega_{jI} = q_I$$

et la relation

$$A_{ij}(s) A_{jk}(t) = A_{ik}(s+t)$$

devient

$$\omega_{jI}(s) \omega_{iK}(t) = \omega_{jK}(s+t).$$

Les ω et q constituent un processus markoffien, continu à l'origine, et la corrélation $\rho(t)$ du processus originel vaut

$$x_i p_i A_{ij}(t) x_j^* = \gamma_I q_I \omega_{jI}(t) \gamma_j^*, \quad \text{avec } \gamma_j = \sum_{i \in J} x_i u_i.$$

Pour $t > 0$, elle s'identifie avec la corrélation d'un processus continu, comme nous l'avions déjà remarqué; il y a une discontinuité à l'origine

$$\rho(0) = \sum_{i,1} q_{1i} |x_i|^2,$$

tandis que

$$\rho(+0) = \sum_I q_I | \sum u_i x_i |^2, \quad \rho(+0) \leq \rho(0),$$

car le premier terme tient compte des transitions instantanées possibles à l'intérieur d'un même groupe.

La même remarque vaut pour le cas dénombrable, auquel Doob a généralisé la valabilité des propriétés de décomposition en groupes instantanés (*Trans. Amer. Math. Soc.*, July 1942).

BIBLIOGRAPHIE.

- DOBLIN, *Ann. de l'Éc. norm. sup.*, t. LVII, fasc. II; *Bull. des Sc. Math.*, 1938.
 DOOB, *Trans. Amer. Math. Soc.*, July 1942 et 1943.
 DUNFORD, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1943.
 FORTET, *Thèse (Revista de Ciencias, Lima, 1938)*.
 FRÉCHET, *Bull. des Sc. Math.*, 1934; *Recherches théoriques modernes*, collection Borel, p. 109, 250-251.
 HILLE, *Functional Analysis and semi-groups (Am. Math. Soc., Colloquium XXXI, § 3.8 et 3.10; ibid., § 5.14; ibid., chap. VIII, IX et XI)*.
 JULIA, *Introduction mathématique aux théories quantiques (Gauthier-Villars, 1936, 1, p. 86)*.
 KAMPÉ DE FÉRIET, Colloque de juin-juillet 1948.
 P. LÉVY, *Addition des variables aléatoires*, collection Borel, 1948, chap. II, § 10.
 LENGYEL et STONE, *Ann. of Math.*, 1936.
 SLUTSKY, Colloque de Genève, 1937 (*Actualités*, n° 738, Hermann).
 YOSIDA et KAKUTANI, *Ann. of Math.*, 1941.

